Просьба сообщить о всех замеченных опечатках, описках, возникших вопросах, замечаниях и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

Глава 4.

Аффинные пространства.

§1. Аффинное пространство.

Пусть K — либо поле действительных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. L — конечномерное линейное пространство над полем K .

Множество P называется *аффинным пространством* с направляющим пространством L , если определено отображение $\varphi : P \times P \rightarrow L$ (“аффинная структура на P ”, образ упорядоченной пары (A, B) будем обозначать также $\overrightarrow{AB}$: $\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}$) удовлетворяющая условиям:

1. Для любых трех точек A, B и C множества P имеем:
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

2. Найдется такая точка $O \in P$, что отображение $\varphi_O : P \rightarrow L$, $\varphi_O(A) = \overrightarrow{OA}$ является взаимно однозначным.

Из условия 1 вытекает, что $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (ибо $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AC}$) и что $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (ибо $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$).

Возьмем любую другую точку $O_1 \in P$ и соответствующее отображение $\varphi_{O_1}(A) = \overrightarrow{O_1A}$. По условию 1 для любой точки $A \in P$ имеем:

$$\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA}$$

или

$$\varphi_{O_1}(A) = \overrightarrow{O_1O} + \varphi_O(A).$$

В силу того, что сдвиг пространства L на фиксированный вектор $\overrightarrow{O_1O}$ является взаимно однозначным отображением, из условия 2 вытекает условие

2'. Для любой точки $O \in P$ отображение $\varphi_O : P \rightarrow L$, $\varphi_O(A) = \overrightarrow{OA}$ является взаимно однозначным.

Отображение φ_O назовем *картой* аффинного пространства P с началом в точке O , а вектор $\overrightarrow{OA}$ — *радиусом-вектором* точки $A \in P$. Удобно, зафиксировав такое отображение, описывать с его помощью пространство P . Если, к тому же, в направляющем пространстве L зафиксирован базис, то мы получаем систему координат на P .

В силу сделанного выше замечания, одна карта аффинного пространства получается из другой сдвигом на фиксированный вектор направляющего пространства P .

Примером аффинного пространства с направляющим пространством L является само множество L . При этом аффинная структура φ_L на L сопоставляет упорядоченной паре (u, v) элементов L их разность $v - u$: $\varphi_L(u, v) = v - u$. Выполнение условий 1 и 2 очевидно.

Карта φ_O переводит аффинную структуру φ аффинного пространства P в аффинную структуру φ_L линейного пространства L :

$$\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \varphi_O(B) - \varphi_O(A) = \varphi_L(\varphi_O(A), \varphi_O(B)).$$

Таким образом, изучение произвольного аффинного пространства сводится к изучению аффинной структуры его направляющего линейного пространства.

§2. Аффинная система координат. Размерность.

Аффинная система координат в аффинном пространстве P , φ задается указанием репера, состоящего из начала $O \in P$ и базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ в направляющем пространстве L .

Указание базиса в пространстве L вводит на L систему координат: любой вектор u пространства L однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$$

и коэффициенты $x^1, x^2, \dots, x^n$ этой линейной комбинации называются *координатами* вектора u .

Координатами точки $A \in P$ называются координаты ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OA}$.

Размерность направляющего пространства L называется *размерностью* *аффинного пространства* P .

§3. Плоскости. Аффинная оболочка.

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, приведем другой пример аффинного пространства. Пусть P — аффинное пространство с направляющим пространством L , $\varphi : P \times P \rightarrow L$ — соответствующая аффинная структура на P , L_1 — линейное подпространство пространства L , $O_1 \in P$, $P_1 = \varphi_{O_1}^{-1}(L_1)$.

Ограничение аффинной структуры φ на P_1 делает P_1 аффинным пространством с направляющим пространством L_1 , называемым *плоскостью* пространства P .

Посмотрим, как на карте φ_O отображается описанная выше плоскость P_1 . Пусть $M = \varphi_O(O_1)$. Точка $A \in P$ принадлежит плоскости P_1 тогда и только тогда, когда $\varphi_{O_1}(A) \in L_1$. То есть, тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{O_1A} \in L_1$. То есть, тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO_1} \in L_1$, $\varphi_O(A) - \varphi_O(O_1) \in L_1$. Таким образом, $\varphi_O(P_1) = \{\varphi_O(O_1) + u : u \in L_1\}$. Но множество $\{\varphi_O(O_1) + u : u \in L_1\}$ в пространстве L с указанной выше аффинной структурой, есть плоскость.

Пример 3.1. Пусть $\Phi : L_1 \rightarrow L_2$ линейное отображение линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 . Покажем, что прообраз $P_1 = \Phi^{-1}(M)$ любой точки $M \in \text{Im } \Phi$ является плоскостью. В качестве направляющего пространства возьмем $L_0 = \ker \Phi$. Напомним, аффинная структура в линейном пространстве L_1 задается формулой $\varphi(u, v) = v - u$. Для $u, v \in \Phi^{-1}(M)$ имеем: $\Phi(v - u) = \Phi(v) - \Phi(u) = M - M = \vec{0}$, поэтому $\Phi(v - u) \in L_0$. В обратном направлении, если $u \in \Phi^{-1}(M)$ и $v - u \in L_0$, то $\Phi(v) = \Phi(u + (v - u)) = \Phi(u) - \Phi(v - u) = M - \vec{0} = M$. Поэтому отображение φ является взаимно однозначным на P_1 и P_1 является плоскостью с направляющим пространством L_0 .

Пример 3.2. Пусть $\Phi : L \rightarrow K$ (ненулевой) линейный функционал. В силу замечаний примера 3.1 прообраз $P_1 = \Phi^{-1}(M)$ любой точки $M \in K$ является плоскостью. В этом случае $\dim \ker \Phi = n - 1$, где $n = \dim L$. Плоскость размерности $n - 1$ называется *гиперплоскостью*.

Лемма 3.1. Если пересечение $\cap\{P_\alpha : \alpha \in A\}$ плоскостей аффинного пространства P непусто, то оно является плоскостью. Его направляющим пространством является пересечение направляющих пространств плоскостей P_α , $\alpha \in A$.

Доказательство. Рассмотрим карту φ_O . Возьмем любую точку O_1 пересечения $\cap\{P_\alpha : \alpha \in A\}$. Образ плоскости P_α на карте имеет вид $\{\varphi_O(O_1) + u : u \in L_\alpha\}$, где L_α — направляющее пространство плоскости P_α . Точка $M \in P$ принадлежит пересечению $\cap\{P_\alpha : \alpha \in A\}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{O_1M} \in L_\alpha$ при любом $\alpha \in A$. То есть, тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{O_1M} \in \cap\{L_\alpha : \alpha \in A\}$. Но пересечение $\cap\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ есть подпространство пространства L . Поэтому пересечение $\cap\{P_\alpha : \alpha \in A\}$ есть плоскость с направляющим пространством $\cap\{L_\alpha : \alpha \in A\}$. Лемма доказана.

Аффинной оболочкой $\pi(M)$ непустого множества $M \subseteq P$ называется пересечение всех плоскостей пространства P , содержащих множество M . В силу леммы 3.1 аффинная оболочка множества является плоскостью. Она является наименьшей плоскостью, содержащей множество M , в том смысле, что лежит в любой плоскости, содержащей M .

Зафиксируем любую точку A_0 множества M . Тогда все векторы вида $\overrightarrow{A_0A}$, где $A \in M$ будут принадлежать направляющему пространству любой плоскости, содержащей множество M . Поэтому линейная оболочка $L_1 = L(\{\overrightarrow{A_0A} : A \in M\})$ множества $\{\overrightarrow{A_0A} : A \in M\}$ лежит в направляющем пространстве любой плоскости, содержащей множество M . Поэтому плоскость, проходящая через точку A_0 и имеющая L_1 в качестве направляющего пространства, лежит в любой плоскости, содержащей множество M . Поэтому плоскость, проходящая через точку A_0 и имеющая L_1 в качестве направляющего пространства, является аффинной оболочкой множества M .

§4. Параметрические уравнения плоскости.

Переход к новой аффинной системе координат в пространстве.

Пусть в аффинном пространстве P зафиксирован репер A , состоящий из начала $O \in P$ и базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ направляющего пространства L .

Пусть на плоскости $P_1 \subseteq P$ зафиксирована начальная точка O_1 с координатами $x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n$ в репере A и пусть в направляющем пространстве $L_1 \subseteq L$ плоскости P_1 зафиксирован свой базис

$$f_1 = c_1^1 e_1 + c_1^2 e_2 + \dots + c_1^n e_n,$$

$$f_2 = c_2^1 e_1 + c_2^2 e_2 + \dots + c_2^n e_n,$$

...

$$f_k = c_k^1 e_1 + c_k^2 e_2 + \dots + c_k^n e_n.$$

Точка O_1 и базис $f_1, f_2, \dots, f_k$ составляют репер B плоскости P_1 .

Для любой точки $M \in P_1$ плоскости P_1 вектор $\overrightarrow{O_1 M}$ представим в виде линейной комбинации

$$\overrightarrow{O_1 M} = y^1 f_1 + y^2 f_2 + \dots + y^k f_k$$

(то есть, $y^1, y^2, \dots, y^k$ — координаты точки M в репере B).

Аналогично, вектор $\overrightarrow{OM}$ представим в виде линейной комбинации

$$\overrightarrow{OM} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$$

(то есть, $x^1, x^2, \dots, x^n$ — координаты точки M в репере A).

При этом $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1 M}$, поэтому

$$\begin{aligned} x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n &= \overrightarrow{OM} = \\ &= \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1 M} = x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + \dots + x_1^n e_n + y^1 f_1 + y^2 f_2 + \dots + y^k f_k = \\ &= x_1^1 e_1 + x_1^2 e_2 + \dots + x_1^n e_n + y^1 (c_1^1 e_1 + c_1^2 e_2 + \dots + c_1^n e_n) + \\ &+ y^2 (c_2^1 e_1 + c_2^2 e_2 + \dots + c_2^n e_n) + \dots + y^k (c_k^1 e_1 + c_k^2 e_2 + \dots + c_k^n e_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1^1 + c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \dots + c_k^1 y^k) e_1 + \\
&+ (x_1^2 + c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 + \dots + c_k^2 y^k) e_2 + \dots + \\
&+ (x_1^n + c_1^n y^1 + c_2^n y^2 + \dots + c_k^n y^k) e_n.
\end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора по базису получаем:

$$\begin{cases} x^1 = c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \dots + c_k^1 y^k + x_1^1 \\ x^2 = c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 + \dots + c_k^2 y^k + x_1^2 \\ \dots \\ x^n = c_1^n y^1 + c_2^n y^2 + \dots + c_k^n y^k + x_1^n \end{cases}$$

— *параметрические уравнения* плоскости P_1 .

При $k = n$ векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$ составляют базис пространства L и мы как бы имеем “параметрические уравнения” самого пространства P . На самом деле в этом случае мы получаем формулы преобразования координат векторов при переходе от репера A к реперу B в пространстве P :

$$\begin{cases} x^1 = c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \dots + c_n^1 y^n + x_1^1 \\ x^2 = c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 + \dots + c_n^2 y^n + x_1^2 \\ \dots \\ x^n = c_1^n y^1 + c_2^n y^2 + \dots + c_n^n y^n + x_1^n. \end{cases}$$

§5. Плоскости как пространства решений систем линейных уравнений.

Пусть в аффинном пространстве P зафиксирован репер A , состоящий из начала $O \in P$ и базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ направляющего пространства L .

Пусть на плоскости $P_1 \subseteq P$ зафиксирована начальная точка O_1 с координатами $x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n$ в репере A . Пусть $L_1 \subseteq L$ — направляющее пространство плоскости P_1 .

Точка $M \in P$ принадлежит плоскости P_1 тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{O_1 M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO_1}$ принадлежит пространству L_1 .

Линейное подпространство $L_1 \subseteq L$ может быть задано как пространство решений линейной системы

$$\begin{cases} f^1(u) = 0 \\ f^2(u) = 0 \\ \dots \\ f^m(u) = 0, \end{cases}$$

где $f^1, f^2(u), \dots, f^m \in L^*$. Поэтому система

$$\begin{cases} f^1(\overrightarrow{O_1M}) = 0 \\ f^2(\overrightarrow{O_1M}) = 0 \\ \dots \\ f^m(\overrightarrow{O_1M}) = 0 \end{cases}$$

задает плоскость P_1 . Упростим ее.

$$\begin{cases} f^1(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO_1}) = 0 \\ f^2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO_1}) = 0 \\ \dots \\ f^m(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO_1}) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^1(\overrightarrow{OM}) = f^1(\overrightarrow{OO_1}) \\ f^2(\overrightarrow{OM}) = f^2(\overrightarrow{OO_1}) \\ \dots \\ f^m(\overrightarrow{OM}) = f^m(\overrightarrow{OO_1}). \end{cases}$$

Точки O и O_1 фиксированы. Поэтому в правых частях системы стоят числа $f^1(\overrightarrow{OO_1}), f^2(\overrightarrow{OO_1}), \dots, f^m(\overrightarrow{OO_1}) \in K$. Обозначив их через $a_1, a_2, \dots, a_m$ приводим нашу систему к виду

$$\begin{cases} f^1(\overrightarrow{OM}) = a_1 \\ f^2(\overrightarrow{OM}) = a_2 \\ \dots \\ f^m(\overrightarrow{OM}) = a_m. \end{cases}$$

В обратном направлении. В силу замечаний примера 3.2 каждое из уравнений

$$f^i(\overrightarrow{OM}) = a_i$$

задает гиперплоскость. Множество решений всей системы есть пересечение этих гиперплоскостей и потому является плоскостью.

Пусть $x^1, x^2, \dots, x^n$ — координаты точки M . Тогда система

$$\begin{cases} f^1(\overrightarrow{OM}) = a_1 \\ f^2(\overrightarrow{OM}) = a_2 \\ \dots \\ f^m(\overrightarrow{OM}) = a_m \end{cases}$$

приобретает вид:

$$\begin{cases} c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + \dots + c_n^1 x^n = a_1 \\ c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + \dots + c_n^2 x^n = a_2 \\ \dots \\ c_1^m x^1 + c_2^m x^2 + \dots + c_n^m x^n = a_m, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} f^1 = c_1^1 e^1 + c_2^1 e^2 + \dots + c_n^1 e^n = a_1 \\ c_1^2 e^1 + c_2^2 e^2 + \dots + c_n^2 e^n = a_2 \\ \dots \\ c_1^m e^1 + c_2^m e^2 + \dots + c_n^m e^n = a_m, \end{cases}$$

а направляющее пространство плоскости, заданной последней системой, задается системой

$$\begin{cases} c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + \dots + c_n^1 x^n = 0 \\ c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + \dots + c_n^2 x^n = 0 \\ \dots \\ c_1^m x^1 + c_2^m x^2 + \dots + c_n^m x^n = 0. \end{cases}$$

§6. Взаимное расположение плоскостей.

Пусть даны две плоскости P_1 и P_2 аффинного пространства P . Пусть L_1, L_2 — их направляющие пространства, $A_1 \in P_1$, $A_2 \in P_2$.

Лемма 6.1. *Плоскости P_1 и P_2 пересекаются тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ принадлежит $L_1 + L_2$.*

Доказательство. I. Пусть плоскости P_1 и P_2 пересекаются, A — их общая точка. Тогда

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AA_2} \in L_1 + L_2.$$

II. Пусть $\overrightarrow{A_1A_2} \in L_1 + L_2$. То есть, найдутся такие векторы $u \in L_1$ и $v \in L_2$, что $\overrightarrow{A_1A_2} = u + v$. Возьмем такую точку $A \in P_1$, что $u = \overrightarrow{A_1A}$. Тогда $v = \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{AA_2}$. Поэтому $\overrightarrow{A_2A} = -\overrightarrow{AA_2} = -v \in L_2$. Поэтому точка A принадлежит P_2 .

Таким образом, плоскости P_1 и P_2 имеют общую точку A . Лемма доказана.

Параллельные плоскости.

Плоскости P_1 и P_2 называются *параллельными* “в широком смысле”, если $L_1 \subseteq L_2$. При этом либо они не имеют общих точек (говорят: они *параллельны “в узком смысле”*), либо такая общая точка A есть.

Рассмотрим второй случай.

Для любой точки B плоскости P_1 вектор $\overrightarrow{AB}$ принадлежит L_1 . В силу включения $L_1 \subseteq L_2$ вектор $\overrightarrow{AB}$ принадлежит L_2 . Но это означает, что точка B принадлежит плоскости P_2 . Мы показали, что $P_1 \subseteq P_2$.

Пусть, для определенности $\dim L_1 \leq \dim L_2$. Тогда $L_1 \subseteq L_2$. В силу леммы 6.1,

если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ принадлежит L_2 , то плоскости P_1, P_2 имеют общую точку и по сказанному выше $P_1 \subseteq P_2$.

если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ не принадлежит L_2 , то плоскости P_1, P_2 не имеют общих точек и параллельны “в узком смысле”.

Пересекающиеся плоскости.

Плоскости P_1 и P_2 называются *пересекающимися*, если они не параллельны “в широком смысле” и имеют общую точку.

Итак, пусть плоскости P_1 и P_2 имеют общую точку A . По лемме 3.1 направляющим пространством плоскости $Q_1 = P_1 \cap P_2$ является пересечение $L_1 \cap L_2$.

Обозначим через Q_2 аффинную оболочку объединения $P_1 \cup P_2$. В соответствии с замечаниями §3 его направляющим пространством является линейная оболочка $L(L_1 \cup L_2)$ объединения множеств L_1 и L_2 , которая совпадает с суммой $L_1 + L_2$.

Для линейных пространств мы имеем равенство

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 + L_2).$$

Так как размерность плоскости совпадает с размерностью ее направляющего пространства, то

$$\dim P_1 + \dim P_2 = \dim Q_1 + \dim Q_2.$$

Скрещивающиеся плоскости.

Плоскости P_1 и P_2 называются *скрещивающимися*, если они не параллельны “в широком смысле” и не имеют общих точек.

Итак, пусть плоскости P_1 и P_2 не имеют общих точек. Q — аффинная оболочка объединения $P_1 \cup P_2$ плоскостей P_1 и P_2 . Все векторы из L_1 , все векторы из L_2 и вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ принадлежат направляющему пространству L_3 плоскости Q . То есть, $L_1 + L_2 + L(\overrightarrow{A_1A_2}) \subseteq L_3$. С другой стороны, рассмотрим плоскость Q' содержащую точку A и имеющую $L'_3 = L_1 + L_2 + L(\overrightarrow{A_1A_2}) \subseteq L_3$ в качестве направляющего пространства. По сказанному выше $Q' \subseteq Q$. При этом, если $B \in P_1$, то $\overrightarrow{A_1B} \in L_1 \subseteq L'_3$ и поэтому $P_1 \subseteq Q'$. Если $B \in P_2$, то

$$\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B} \in L(\overrightarrow{A_1A_2}) + L_1 \subseteq L'_3,$$

поэтому $P_2 \subseteq Q'$. Вместе включения $P_1 \subseteq Q'$ и $P_2 \subseteq Q'$ означают, что $Q \subseteq Q'$. Вместе включения $Q \subseteq Q'$ и $Q' \subseteq Q$ означают, $Q = Q'$. Таким образом,

$$L_3 = L_1 + L_2 + L(\overrightarrow{A_1A_2})$$

и

$$\begin{aligned}\dim Q &= \dim L_3 = \dim(L_1 + L_2) + 1 = \\ &= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) + 1 = \\ &= \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(L_1 \cap L_2) + 1.\end{aligned}$$

§7. Аффинная оболочка конечного множества точек. Барицентрические координаты.

Пусть аффинная система координат в аффинном пространстве P задана указанием начала $O \in P$ и базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ направляющего пространства L .

Пусть P_1 — аффинная оболочка конечного набора точек $A_0, A_1, \dots, A_k$.

Как мы уже отмечали, направляющее пространство L_1 плоскости P_1 совпадает с линейной оболочкой векторов $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$, а также с линейной оболочкой любого из наборов векторов $\overrightarrow{A_iA_0}, \dots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ при $i = 2, \dots, k-1$ и, наконец, с линейной оболочкой векторов $\overrightarrow{A_kA_0}, \overrightarrow{A_kA_1}, \dots, \overrightarrow{A_kA_{k-1}}$. Как следствие получаем, что ранги всех этих наборов векторов равны, потому что все они равны размерности пространств L_1 и P_1 .

Мы говорим, что точки $A_0, A_1, \dots, A_k$ находятся “в общем положении”, если размерность плоскости P_1 равна k (то есть, наибольшая из возможных).

В этом случае векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ составляют базис пространства L_1 . Добавив к этому базису точку A_0 в качестве начала, мы получаем репер.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — координаты точки M в этой системе координат, $\lambda_0 = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$. Тогда

$$\overrightarrow{A_0M} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{A_0A_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{A_0A_k},$$

$$\overrightarrow{OM} = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) \overrightarrow{OA_0} +$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \lambda_2\overrightarrow{A_0A_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{A_0A_k} = \\
= \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1(\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_1}) + \lambda_2(\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_2}) + \cdots + \lambda_k(\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_k}) = \\
& = \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k}.
\end{aligned}$$

Числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ называются *барицентрическими координатами* точки $M \in P_1$ относительно точек $A_0, A_1, \dots, A_k$. Для них $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$.

Приведенная выше цепочка равенств, прочитанная в обратном порядке, приводит к следующему: если для радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки $M \in P$ имеет место представление

$$\overrightarrow{OM} = \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k}$$

с $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$, то точка M лежит в аффинной оболочке точек $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k = 1$ являются ее координатами в репере $A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$.

Пусть P_1 — аффинная оболочка конечного набора точек $A_0, A_1, \dots, A_k$.

Замечание 7.1. Числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ (то есть, барицентрические координаты точки $M \in P_1$) не зависят от положения начала O пространства P . Верно даже больше. Не будем предполагать, что точки $A_0, A_1, \dots, A_k$ находятся в общем положении. Пусть

$$\overrightarrow{OB} = \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k}.$$

Посмотрим, что произойдет с этим равенством при переносе начала из точки O в точку O_1 . Прибавляя к обеим частям этого равенства вектор $\overrightarrow{O_1O}$, получаем:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OB} &= (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)\overrightarrow{O_1O} + \\
& + \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k}, \\
\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OB} &= \lambda_0(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_0}) + \lambda_1(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_1}) + \\
& + \lambda_2(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_2}) + \cdots + \lambda_k(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_k}),
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{O_1 B} = \lambda_0 \overrightarrow{O_1 A_0} + \lambda_1 \overrightarrow{O_1 A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{O_1 A_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{O_1 A_k}.$$

То есть, коэффициенты в этом представлении не меняются при переносе начала из точки O в точку O_1 .

Отрезок.

Пусть теперь $K = \mathbb{R}$.

Прямая AB есть ни что иное как аффинная оболочка пары точек $A \neq B$. В соответствии с нашими рассуждениями она может быть описана уравнением $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, где $\lambda + \mu = 1$.

Подставляя $\lambda = 1 - \mu$ в уравнение $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, получаем:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = (1 - \mu) \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = \\ &= \overrightarrow{OA} + \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

В силу последнего представления точка $M \in P$ лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда $0 \leq \mu \leq 1$.

Возвращаясь к уравнению $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, получаем: точка $M \in P$ лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ и $\lambda + \mu = 1$.

§8. Выпуклые множества. Выпуклая оболочка. Симплекс.

Пусть $K = \mathbb{R}$.

Подмножество M аффинного пространства P называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками A и B оно содержит весь отрезок AB .

В силу замечаний предыдущего параграфа это означает, что если $A, B \in M$, $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ и $\lambda + \mu = 1$, то точка $C \in P$, для которой $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, также принадлежит M .

Пример 8.1. *Всякое аффинное подпространство выпукло.*

Пример 8.2. Пусть в аффинном пространстве P зафиксировано начало $O \in P$, L — направляющее пространство аффинного

пространства P , $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный функционал, $a \in \mathbb{R}$.
В силу замечания примера 3.2 уравнение

$$f(\overrightarrow{OM}) = a$$

задает гиперплоскость, являющуюся аффинным подпространством и, следовательно, выпуклым множеством.

Пример 8.3. Сохраняя обозначения примера 8.2 рассмотрим *открытое полупространство*

$$f(\overrightarrow{OM}) > a.$$

Покажем, что оно является выпуклым множеством. Пусть точки $A, B \in P$ удовлетворяют указанному неравенству, $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ и $\lambda + \mu = 1$, $C \in P$, $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{OC}) &= f(\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}) = \\ &= \lambda f(\overrightarrow{OA}) + \mu f(\overrightarrow{OB}) > \\ &> \lambda a + \mu a = (\lambda + \mu)a = a, \end{aligned}$$

что и требовалось. Аналогично показывается, что выпукло открытое полупространство

$$f(\overrightarrow{OM}) < a$$

и что выпуклы *замкнутые полупространства*

$$f(\overrightarrow{OM}) \geq a$$

и

$$f(\overrightarrow{OM}) \leq a.$$

В координатах линейный функционал f задается формулой

$$f(u) = c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n,$$

где $u = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$. Соответственно, полупространства задаются неравенствами

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n > a,$$

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n < a,$$

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \geq a,$$

и

$$c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \leq a.$$

Лемма 8.1. Если пересечение $\cap\{M_\alpha: \alpha \in A\}$ выпуклых подмножеств аффинного пространства P непусто, то оно выпукло.

Доказательство. Пусть зафиксировано начало O пространства P . Пусть A и B — любые две точки пересечения $\cap\{M_\alpha: \alpha \in A\}$ и точка $C \in P$ принадлежит отрезку AB . Тогда при любом $\alpha \in A$ в силу выпуклости множества M_α точка C принадлежит множеству M_α , а так как это имеет место при любом $\alpha \in A$, то $C \in \cap\{M_\alpha: \alpha \in A\}$. Лемма доказана.

Лемма 8.2. Пусть M — выпуклое подмножество аффинного пространства P , $A_0, A_1, \dots, A_k \in M$, числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ неотрицательны и $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$, то точка $B \in P$, для которой

$$\overrightarrow{OB} = \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k},$$

принадлежит множеству M .

Доказательство поведем индукцией по k .

I. При $k = 0$ это очевидно.

II. При $k = 1$ это следует из определения выпуклого множества.

III. Пусть $k \geq 2$ и утверждение доказано для $k - 1$. Если в представлении

$$\overrightarrow{OB} = \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k},$$

по крайней мере одно из чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ равно нулю, то доказываемое справедливо в силу предположения индукции.

Остается случай, когда все числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ положительны. Для $i = 1, 2, \dots, k$ положим

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda'},$$

где $\lambda' = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$. Имеем: $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = 1$. Поэтому в силу предположения индукции точка $C \in P$, для которой

$$\overrightarrow{OC} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \mu_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \mu_k \overrightarrow{OA_k},$$

принадлежит множеству M . Для точки B имеем:

$$\overrightarrow{OB} = \lambda_0 \overrightarrow{OA_0} + \lambda' \overrightarrow{OC}$$

$\lambda_0 + \lambda' = 1$, $\lambda_0 > 0$, $\lambda' > 0$ и доказываемое следует из определения выпуклого множества. Лемма доказана.

Линейная комбинация

$$\lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k,$$

в которой числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ неотрицательны и $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$, называется *выпуклой комбинацией* векторов $u_0, u_1, \dots, u_k$.

Отождествляя точку с ее радиусом-вектором, говорят также, что точка B является *выпуклой комбинацией* точек $A_0, A_1, \dots, A_k$, если радиус-вектор точки B представим в виде выпуклой комбинации радиусов-векторов точек $A_0, A_1, \dots, A_k$. В силу замечания 7.1 это определение корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора начала аффинного пространства P , ибо по замечанию 7.1 при переносе начала из точки O в точку O_1 коэффициенты в соответствующей выпуклой комбинации не меняются.

Лемма 8.3. *Для любого множества $M \subseteq P$ множество $\text{con}(M)$ точек аффинного пространства P , представимых в виде выпуклых комбинаций точек из M , является выпуклым.*

Доказательство. Пусть B и B' принадлежат $\text{con}(M)$, то есть, их радиусы-векторы можно представить в виде:

$$\overrightarrow{OB} = \lambda_0 \overrightarrow{OA_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k},$$

и

$$\overrightarrow{OB'} = \lambda'_0 \overrightarrow{OA'_0} + \lambda'_1 \overrightarrow{OA'_1} + \cdots + \lambda'_l \overrightarrow{OA'_l},$$

где точки $A_0, A_1, \dots, A_k, A'_0, A'_1, \dots, A'_l$ принадлежат M , числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_l$ неотрицательны и $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1, \lambda'_0 + \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_l = 1$. Для точки C отрезка BB' есть представление

$$\overrightarrow{OC} = \mu \overrightarrow{OB} + \mu' \overrightarrow{OB'},$$

где $\mu \geq 0, \mu' \geq 0$ и $\mu + \mu' = 1$. Сделаем соответствующие подстановки:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \mu \overrightarrow{OB} + \mu' \overrightarrow{OB'} = \\ &= \mu(\lambda_0 \overrightarrow{OA_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}) + \\ &+ \mu'(\lambda'_0 \overrightarrow{OA'_0} + \lambda'_1 \overrightarrow{OA'_1} + \lambda'_2 \overrightarrow{OA'_2} + \cdots + \lambda'_l \overrightarrow{OA'_l}) = \\ &= \mu\lambda_0 \overrightarrow{OA_0} + \mu\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \mu\lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \mu\lambda_k \overrightarrow{OA_k} + \\ &+ \mu'\lambda'_0 \overrightarrow{OA'_0} + \mu'\lambda'_1 \overrightarrow{OA'_1} + \mu'\lambda'_2 \overrightarrow{OA'_2} + \cdots + \mu'\lambda'_l \overrightarrow{OA'_l}. \end{aligned}$$

Все коэффициенты в этих линейных комбинациях, являясь произведениями неотрицательных чисел, неотрицательны и

$$\begin{aligned} &\mu\lambda_0 + \mu\lambda_1 + \cdots + \mu\lambda_k + \\ &+ \mu'\lambda'_0 + \mu'\lambda'_1 + \cdots + \mu'\lambda'_l = \\ &= \mu(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k) + \\ &+ \mu'(\lambda'_0 + \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_l) = \mu + \mu' = 1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Выпуклой оболочкой непустого множества $M \subseteq P$ называется пересечение семейства C всех выпуклых подмножеств пространства P , содержащих множество M . В силу леммы 8.1 это пересечение выпукло. В силу леммы 8.2 в каждом из множеств семейства C лежит множество $\text{con}(M)$. В силу леммы 8.3 множество $\text{con}(M)$ выпукло и поэтому само входит в семейство C . Поэтому множество $\text{con}(M)$ совпадает с пересечением семейства C , то есть, является

выпуклой оболочкой множества M . Она является наименьшим выпуклым множеством, содержащим множество M , в том смысле, что лежит в любом выпуклом множестве, содержащем множество M .

Пусть $A_0, A_1, \dots, A_k$ — точки аффинного пространства P , находящиеся в общем положении. k -мерным *симплексом* с вершинами $A_0, A_1, \dots, A_k$ называется выпуклая оболочка $\text{con}(\{A_0, A_1, \dots, A_k\})$ множества $\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$.

В аффинной оболочке $\pi(\{A_0, A_1, \dots, A_k\})$ множества $\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ введем систему координат, взяв в качестве начала точку A_0 и векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ в качестве базисных векторов ее направляющего пространства.

Как мы видели, если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — координаты точки M в этой системе координат, $\lambda_0 = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$, то числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ составляют набор барицентрических координат точки M относительно точек $A_0, A_1, \dots, A_k$. Точка M принадлежит нашему симплексу тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \lambda_0 \geq 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \dots \\ \lambda_k \geq 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к реперу $A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ получаем: точка M принадлежит нашему симплексу тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \dots \\ \lambda_k \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \leq 1. \end{cases}$$

Первые k неравенств задают соответствующие координатные полупространства. Последнее неравенство задает полупространство с граничной гиперплоскостью, проходящей через точки $A_1, A_2, \dots, A_k$ и содержащее точку A_0 . Симплекс является пересечением этих полупространств.