

Просьба сообщить о всех замеченных опечатках,
описках, возникших вопросах, замечаниях
и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

версия 03.04.2020

Глава 3.

Сопряженные пространства.

§1. Пространство линейных функционалов.

Пусть L — линейное пространство над полем K .

Линейным функционалом на L называется линейное отображение $L \rightarrow K$.

В соответствии с замечаниями §2.4 на множестве L^* линейных функционалов на пространстве L определены линейные операции и при этом само множество L^* является линейным пространством над полем K .

Примеры линейных функционалов.

1. Пусть L — пространство действительных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Отображение $f : L \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющее функции $u \in L$ интеграл $\int_a^b u(t)dt$, является линейным функционалом.

2. Пусть в обозначениях предыдущего примера $s \in L$. Отображение $f_s : L \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющее функции $u \in L$ интеграл $\int_a^b s(t)u(t)dt$, является линейным функционалом.

3. Пусть L — пространство действительных функций на множестве X и $x_0 \in X$. Отображение $f : L \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющее функции $u \in L$ ее значение в точке x_0 , является линейным функционалом.

4. Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляют базис n -мерного пространства L . Отображение ε^i , сопоставляющее вектору $u \in L$ его i -тую координату, является линейным функционалом.

Базис пространства линейных функционалов.

Пусть L — n -мерное линейное пространство над полем K , $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L , $f : L \rightarrow K$ — линейный функционал. Тогда для вектора

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$$

из L

$$f(u) = x^1 f(e_1) + x^2 f(e_2) + \dots + x^n f(e_n).$$

Для рассматриваемого функционала f символы $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ обозначают элементы поля K . Упростим их обозначения, положив $a_1 = f(e_1), a_2 = f(e_2), \dots, a_n = f(e_n)$. Тогда формула для $f(u)$ приобретает вид

$$f(u) = a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Как и в примере 4 обозначим через ε^i отображение, сопоставляющее вектору $u \in L$ его i -тую координату. Тогда $x^i = \varepsilon^i(u)$ и формула для $f(u)$ приобретает вид

$$f(u) = a_1\varepsilon^1(u) + a_2\varepsilon^2(u) + \dots + a_n\varepsilon^n(u).$$

Мы представили линейный функционал f в виде линейной комбинации функционалов $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$.

Таким образом, $L^* = L(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n)$.

Покажем, что система векторов $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$ пространства L^* линейно независима. Пусть линейная комбинация

$$f = \lambda_1\varepsilon^1 + \lambda_2\varepsilon^2 + \dots + \lambda_n\varepsilon^n$$

этих векторов равна $\vec{0} \in L^*$ (то есть, равна функционалу, тождественно равному нулю). Тогда

$$f(e_i) = \lambda_1\varepsilon^1(e_i) + \lambda_2\varepsilon^2(e_i) + \dots + \lambda_n\varepsilon^n(e_i).$$

Так как $\varepsilon^j(e_i) = 0$ при $i \neq j$ и $\varepsilon^j(e_i) = 1$ при $i = j$, то $f(e_i) = \lambda_i$. Но функционал f тождественно равен нулю, поэтому $\lambda_i = 0$. В силу произвольности $i = 1, 2, \dots, n$ это означает тривиальность линейной комбинации

$$\lambda_1\varepsilon^1 + \lambda_2\varepsilon^2 + \dots + \lambda_n\varepsilon^n$$

и, далее, линейную независимость элементов $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$ пространства L^* .

Таким образом, $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$ — базис пространства L^* и пространство L^* n -мерно, то есть, $\dim L^* = \dim L$. Он называется *взаимным*, или *двойственным*, или *сопряженным* к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L .

§2. Пространство $(L^*)^*$.

Пусть $u \in L$. Отображение $\varphi_u : L^* \rightarrow K$ зададим формулой $\varphi_u(f) = f(u)$ (см. пример 3 из §1).

Покажем, что отображение φ_u линейно.

Если $f, g \in L^*$, то $\varphi_u(f + g) = (f + g)(u) = f(u) + g(u) = \varphi_u(f) + \varphi_u(g)$.

Если $f \in L^*$, $\lambda \in K$, то $\varphi_u(\lambda f) = (\lambda f)(u) = \lambda f(u) = \lambda \varphi_u(f)$. Линейность отображения φ_u проверена.

Таким образом, мы имеем отображение $\Phi : L \rightarrow (L^*)^*$, сопоставляющее вектору $u \in L$ линейный функционал φ_u .

Покажем, что отображение Φ линейно.

Если $u, v \in L$, то $\varphi_{(u+v)}(f) = f(u+v) = f(u) + f(v) = \varphi_u(f) + \varphi_v(f)$ для любого $f \in L^*$, поэтому $\varphi_{(u+v)} = \varphi_u + \varphi_v$. То есть, $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$.

Если $u \in L$, $\lambda \in K$, то $\varphi_{\lambda u}(f) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda \varphi_u(f)$ для любого $f \in L^*$, поэтому $\varphi_{\lambda u} = \lambda \varphi_u$. То есть, $\Phi(\lambda u) = \lambda \Phi(u)$. Линейность отображения Φ проверена.

Покажем, что гомоморфизм $\Phi : L \rightarrow (L^*)^*$ является мономорфизмом.

Если $u \in \ker \Phi$, то $f(u) = \varphi_u(f) = 0$ для любого функционала $f \in L^*$.

В частности, $\varepsilon^i(u) = 0$ при любом $i = 1, 2, \dots, n$. То есть, все координаты вектора u равны нулю. Следовательно, $u = \vec{0}$.

Но размерность пространства $(L^*)^*$ совпадает с размерностью пространства L^* , то есть, совпадает с размерностью пространства L .

Поэтому гомоморфизм $\Phi : L \rightarrow (L^*)^*$ является изоморфизмом.

§3. Линейные отображения и билинейные функции.

Пусть L_1 и L_2 — линейные пространства.

Функция $a : L_1 \times L_2 \rightarrow K$ называется билинейной, если

1. Для любого $v \in L_2$ функция $\varphi_v : L_1 \rightarrow K$, $\varphi_v(u) = a(u, v)$ является линейной (то есть, $\varphi_v \in L_1^*$).

2. Для любого $u \in L_1$ функция $\psi_u : L_2 \rightarrow K$, $\psi_u(v) = a(u, v)$ является линейной (то есть, $\psi_u \in L_2^*$).

При выполнении условия 1 мы имеем отображение $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$, сопоставляющее вектору v функционал φ_v .

Лемма 3.1. При выполнении условий 1 и 2 отображение $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$ является линейным.

Доказательство. I. Пусть $v_1, v_2 \in L_2$. Тогда для любого $u \in L_1$ имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_{v_1+v_2}(u) &= a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2) = \varphi_{v_1}(u) + \varphi_{v_2}(u) = \\ &= a(u, v_1) + a(u, v_2) = \varphi_{v_1}(u) + \varphi_{v_2}(u).\end{aligned}$$

В силу произвольности $u \in L_1$ это означает, что

$$\varphi_{v_1+v_2} = \varphi_{v_1} + \varphi_{v_2}$$

в пространстве L_1^* ,

$$\Phi_a(v_1 + v_2) = \Phi_a(v_1) + \Phi_a(v_2).$$

II. Пусть $v \in L_2$ и $\lambda \in K$. Тогда для любого $u \in L_1$ имеем:

$$\varphi_{\lambda v}(u) = a(u, \lambda v) = \lambda a(u, v) = \lambda \varphi_v(u).$$

В силу произвольности $u \in L_1$ это означает, что

$$\varphi_{\lambda v} = \lambda \varphi_v.$$

в пространстве L_1^* ,

$$\Phi_a(\lambda v) = \lambda \Phi_a(v).$$

Лемма доказана.

Симметрично, при выполнении условия 2 мы имеем отображение $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$, сопоставляющее вектору u функционал ψ_u и, соответственно, справедлива

Лемма 3.1'. *При выполнении условий 1 и 2 отображение $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$ является линейным.*

Проведенное выше построение допускает обращение.

Пусть отображение $\Phi : L_2 \rightarrow L_1^*$ является линейным. Для $v \in L_2$ положим $\varphi_v = \Phi(v)$ и определим функцию $a_\Phi : L_1 \times L_2 \rightarrow K$ по формуле $a_\Phi(u, v) = \varphi_v(u)$.

Лемма 3.2. *В описанных выше обозначениях функция $a = a_\Phi$ является билинейной.*

Доказательство. I. Выполнение условия 1 вытекает из того, что φ_v принадлежит L_1^* .

II. Покажем выполнение условия 2. В силу линейности отображения Φ

a) $\varphi_{v_1+v_2} = \varphi_{v_1} + \varphi_{v_2}$ при любых $v_1, v_2 \in L_2$.

Поэтому при любом $u \in L_1$

$$a(u, v_1 + v_2) = \varphi_{v_1+v_2}(u) = \varphi_{v_1}(u) + \varphi_{v_2}(u) = a(u, v_1) + a(u, v_2).$$

b) $\varphi_{\lambda v} = \lambda \varphi_v$ при любых $v \in L_2$ и $\lambda \in K$. Поэтому при любом $u \in L_1$

$$a(u, \lambda v) = \varphi_{\lambda v}(u) = \lambda \varphi_v(u) = \lambda a(u, v).$$

Лемма доказана.

Итак, каждое линейное отображение $\Phi : L_2 \rightarrow L_1^*$ порождает билинейную функцию $a(u, v) = \varphi_v(u)$, где $\varphi_v = \Phi(v)$. Причем, $\varphi_v(u) = a(u, v)$, что совпадает с определением этого символа в рассуждении начала параграфа и поэтому отображение Φ , порождающее билинейную функцию $a(u, v)$, совпадает с отображением Φ_a .

Таким образом, определяемое этими формулами соответствие между билинейными функциями $L_1 \times L_2 \rightarrow K$ и линейными отображениями $L_2 \rightarrow L_1^*$ является взаимно однозначным.

Симметрично, пусть отображение $\Psi : L_1 \rightarrow L_2^*$ является линейным. Для $u \in L_1$ положим $\psi_u = \Psi(u)$ и определим функцию $a'_\Psi : L_1 \times L_2 \rightarrow K$ по формуле $a'_\Psi(u, v) = \psi_u(v)$. И опять, определяемое этими формулами соответствие между билинейными функциями $L_1 \times L_2 \rightarrow K$ и линейными отображениями $L_1 \rightarrow L_2^*$ является взаимно однозначным.

Рассмотрим теперь отображение $\tilde{\Phi} : B \rightarrow H$ пространства B билинейных функций $L_1 \times L_2 \rightarrow K$ в пространство H линейных отображений $L_2 \rightarrow L_1^*$ по формуле $\tilde{\Phi}(a) = \tilde{\Phi}_a$.

Покажем, что оно линейно.

Отображение $\tilde{\Phi}(a)$ сопоставляет вектору $v \in L_2$ функционал $\varphi_v : L_1 \rightarrow K$, $\varphi_v(u) = a(u, v)$.

Отображение $\tilde{\Phi}(a')$ сопоставляет вектору $v \in L_2$ функционал $\varphi'_v : L_1 \rightarrow K$, $\varphi'_v(u) = a'(u, v)$.

Отображение $\tilde{\Phi}(a + a')$ сопоставляет вектору $v \in L_2$ функционал $\varphi''_v : L_1 \rightarrow K$,

$$\varphi''_v(u) = a(u, v) + a'(u, v) = \varphi_v(u) + \varphi'_v(u).$$

То есть,

$$\varphi''_v = \varphi_v + \varphi'_v(u) = (\varphi_v + \varphi'_v)(u).$$

или

$$\tilde{\Phi}(a + a') = \tilde{\Phi}(a) + \tilde{\Phi}(a').$$

Отображение $\tilde{\Phi}(\lambda a)$ сопоставляет вектору $v \in L_2$ функционал $\varphi'_v : L_1 \rightarrow K$,

$$\varphi'_v(u) = (\lambda a)(u, v) = \lambda a(u, v) = \lambda \varphi_v(u) = (\lambda \varphi_v)(u).$$

То есть,

$$\varphi'_v = \lambda \varphi_v$$

или

$$\tilde{\Phi}(\lambda a) = \lambda \tilde{\Phi}(a).$$

Мы проверили, что отображение $\tilde{\Phi}$ линейно. Таким образом, мы имеем изоморфизм $\tilde{\Phi}$ пространства B билинейных функций на пространство H линейных отображений.

Аналогично доказывается, что отображение $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Psi}(a) = \Psi_a$, является изоморфизмом соответствующих линейных пространств.

Матрицы отображений Φ и Ψ .

Пусть теперь $e_1^1, e_2^1, \dots, e_{n_1}^1$ — базис пространства L_1 , $e_1^2, e_2^2, \dots, e_{n_2}^2$ — базис пространства L_2 , $\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_1^{n_1}$ — базис пространства L_1^* и $\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, \dots, \varepsilon_2^{n_2}$ — базис пространства L_2^* , указанные в §1.

В матричной форме линейное отображение $\Phi : L_2 \rightarrow L_1^*$ может быть задано равенством

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_2} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_1 1} & a_{n_1 2} & \dots & a_{n_1 n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^{n_2} \end{pmatrix},$$

где $b_1, b_2, \dots, b_{n_1}$ — координаты образа $v' = \Phi(v)$ вектора $v = y^1 e_1^2 + y^2 e_2^2 + \dots + y^{n_1 2} e_{n_2}^2 \in L_2$ в базисе $\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1, \dots, \varepsilon_{n_1}^1$ пространства L_1^* . Поэтому значение $a_\Phi(u, v) = v'(u)$ функционала $\Phi(v)$ на векторе $u = x^1 e_1^1 + x^2 e_2^1 + \dots + x^{n_1} e_{n_1}^1 \in L_1$ равно

$$\begin{aligned} v'(u) &= b_1 x^1 + b_2 x^2 + \dots + b_{n_1} x^{n_1} = \\ &= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n_1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_2} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_1 1} & a_{n_1 2} & \dots & a_{n_1 n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^{n_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу координаты базисных векторов, получаем:

$$(3.2) \quad a_\Phi(e_i^1, e_j^2) = a_{ij}.$$

То есть, матрица линейного отображения Φ совпадает с *матрицей билинейной функции* a_Φ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_2} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_1 1} & a_{n_1 2} & \dots & a_{n_1 n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\Phi(e_1^1, e_1^2) & a_\Phi(e_1^1, e_2^2) & \dots & a_\Phi(e_1^1, e_{n_2}^2) \\ a_\Phi(e_2^1, e_1^2) & a_\Phi(e_2^1, e_2^2) & \dots & a_\Phi(e_2^1, e_{n_2}^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_\Phi(e_{n_1}^1, e_1^2) & a_\Phi(e_{n_1}^1, e_2^2) & \dots & a_\Phi(e_{n_1}^1, e_{n_2}^2) \end{pmatrix}.$$

Перейдем к отображению $\Psi : L_1 \rightarrow L_2^*$

В матричной форме линейное оно может быть задано равенством

$$(3.3) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n_1} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n_2 1} & a'_{n_2 2} & \dots & a'_{n_2 n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^{n_1} \end{pmatrix},$$

аналогичным равенству (3.1). Здесь $b_1, b_2, \dots, b_{n_2}$ — координаты образа $u' = \Psi(u)$ вектора $u = x^1 e_1^1 + x^2 e_2^1 + \dots + x^{n_1} e_{n_1}^1 \in L_1$ в базисе $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \dots, \varepsilon_{n_1}^2$ пространства L_2^* . Поэтому значение $a_\Psi(u, v) = u'(v)$ функционала $\Psi(u)$ на векторе $v = y^1 e_1^2 + y^2 e_2^2 + \dots + y^{n_2} e_{n_2}^2 \in L_2$ равно

$$u'(v) = b_1 y^1 + b_2 y^2 + \dots + b_{n_2} y^{n_2} =$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^{n_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n_2} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n_1 1} & a'_{n_1 2} & \dots & a'_{n_1 n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^{n_2} \end{pmatrix}.$$

Подставляя в эту формулу координаты базисных векторов, получаем:

$$a_\Phi(e_i^1, e_j^2) = a'_{ji}.$$

Сравнивая это с (3.2), видим, что $a'_{ji} = a_{ij}$. Таким образом, если билинейные функции a_Φ и a'_Ψ совпадают, то в указанных базисах матрица отображения Φ связана с матрицей отображения Ψ транспонированием.

§4. Отношение сопряженности линейных пространств.

Пусть L_1 и L_2 — конечномерные линейные пространства, $a : L_1 \times L_2 \rightarrow K$ — билинейная функция, причем

1. Отображение $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$, сопоставляющее вектору v функционал φ_v , $\varphi_v(u) = a(u, v)$, является изоморфизмом линейных пространств.

Новым в этом условии по сравнению с ситуацией, исследованной в предыдущем параграфе, является то, что линейное отображение $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$ есть изоморфизм. В силу этого, если $\dim L_2 = n$, то $\dim L_1^* = n$ и далее $\dim L_1 = n$ в силу замечаний §2.

В силу замечаний предыдущего параграфа определено линейное отображение $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$, сопоставляющую вектору $u \in L_1$ функционал ψ_u , $\psi_u(v) = a(u, v)$.

Докажем выполнение условия

2. Для любого вектора $u \neq \vec{0}$ из L_1 найдется такой вектор v из L_2 , что $a(u, v) \neq 0$.

Допустив противное, получаем, что $a(u, v) = 0$ для любого вектора $v \in L_2$. Но $\Phi_a : L_2 \rightarrow L_1^*$ — изоморфизм, поэтому $f(u) = 0$ для любого линейного функционала $f \in L_1^*$. В частности, в обозначениях §2 $\varepsilon^i(u) = 0$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. То есть, все координаты вектора u равны нулю и, следовательно, $u = \vec{0}$.

Покажем, что отображение Ψ_a является мономорфизмом. Пусть $u \in L_1$ и $\Psi_a(u) = \vec{0}$. Это означает, что $a(u, v) = 0$ для любого вектора $v \in L_2$. В силу 2 $u = \vec{0}$.

Таким образом, мономорфизм Ψ_a отображает n -мерное пространство L_1 в n -мерное пространство L_2^* . По теореме 2.3.2 отображение Ψ является изоморфизмом, то есть выполнено условие

1'. Отображение $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$, сопоставляющее вектору u функционал ψ_u , $\psi_u(v) = a(u, v)$, является изоморфизмом линейных пространств.

Аналогично 2 доказывается, что из 1' вытекает

2'. Для любого вектора $v \neq \vec{0}$ из L_2 найдется такой вектор u из L_1 , что $a(u, v) \neq 0$.

При выполнении условий 1 и (или) 1' пространства L_1 и L_2 будем называть *сопряженными*, а связывающее их отображение $a : L_1 \times L_2 \rightarrow K$ будем называть *сверткой*.

Замечание. Название “свертка” для отображения $a(u, v)$ не является общеупотребительным. Но ниже мы обсудим связь этой свертки со сверткой тензоров и это сделает понятной нашу терминологию.

Подойдем к этой ситуации в обратном направлении. Пусть L_1 и L_2 — n -мерные векторные пространства и определена билинейная функция $a(u, v)$, $a : L_1 \times L_2 \rightarrow K$, удовлетворяющая условию 2 (или 2'). Тогда отображение $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$ является мономорфизмом. В силу равенства размерностей L_1 и L_2^* отображение $\Psi_a : L_1 \rightarrow L_2^*$ является изоморфизмом, что означает выполнение условия 1', то есть, сопряженность пространств L_1 и L_2 .

Пример. Возьмем в качестве L_1 и пространства L_2 пространство векторов, параллельных плоскости, либо пространство векторов трехмерного пространства. В качестве $a(u, v)$ возьмем скалярное произведение. Все условия выполнены.

Но основным примером сопряженных пространств является пара L и L^* . При этом свертка $a(u, f) = a_L(u, f)$ для элементов u из L_1 и f из L^* определяется по формуле $a_L(u, f) = f(u)$. Определенный по билинейной функции $a_L(u, f)$ изоморфизм $\Phi_L : L^* \rightarrow L^*$ оказывается тождественным отображением. Изоморфизм $\Psi_L : L \rightarrow (L^*)^*$ определяется по формулам $\psi_u(f) = f(u)$ и $\Psi_L(u) = \psi_u$, см. в связи с этим пример 3 §1, только в качестве множества X примера здесь фигурирует линейное пространство L , а функции на L рассматриваются не все, а только линейные (и, соответственно, вместо пространства всех функций здесь фигурирует пространство L^*).

Заметим, что мы определили изоморфизм $\Psi_L : L \rightarrow (L^*)^*$ “естественно”. То есть, в этом определении мы не опирались ни на какой выбор. Например, мы не опирались на выбор базиса, как мы делали, устанавливая изоморфность пространств L и L^* в §2.

В общем случае в обозначениях условия 1 $a(u, v) = \varphi_v(u) = a_{L_1}(u, \Phi_a(v))$ или в обозначениях условия 2 $a(u, v) = \psi_u(v) = a_{L_2}(v, \Psi(u))$. Поэтому $a_{L_1}(u, \Phi_a(v)) = a(u, v) = a_{L_2}(v, \Psi(u))$.

Если в последнем равенстве взять пару $L_1 = L$ и $L_2 = L^*$, то получим $a_L(u, v) = a(u, v) = a_{L^*}(v, \Psi_L(u))$.

§5. Взаимные базисы в сопряженных пространствах.

Сохраним обозначения предыдущих параграфов.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ базис пространства L_1 , $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$ — взаимный базис пространства L_1^* .

Обозначим: $e^1 = \Phi^{-1}(\varepsilon^1) \in L_2$, $e^2 = \Phi^{-1}(\varepsilon^2) \in L_2$, $\dots$, $e^n = \Phi^{-1}(\varepsilon^n) \in L_2$.

То есть, $\varphi_{e^1} = \varepsilon^1$, $\varphi_{e^2} = \varepsilon^2$, $\dots$, $\varphi_{e^n} = \varepsilon^n$.

Так как $\Phi : L_2 \rightarrow L_1^*$ — изоморфизм, а $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$ — базис пространства L_1^* , то $e^1, e^2, \dots, e^n$ — базис пространства L_2 .

При этом, если

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n \in L^1,$$

то

$$a(u, e^i) = \varphi_{e^i}(u) = \varepsilon^i(u) = x^i.$$

В частности,

$$(5.1) \quad a(e_j, e^i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Подойдем с другой стороны. Пусть $v \in L_2$ и

$$a(e_j, v) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Тогда для функционала $f_v \in L_1^*$, $f_v(u) = a(u, v)$, имеем:

$$\begin{aligned} f_v(u) &= x^1 f_v(e_1) + x^2 f_v(e_2) + \cdots + x^n f_v(e_n) = \\ &= x^1 a(e_1, v) + x^2 a(e_2, v) + \cdots + x^n a(e_n, v) = x^i. \end{aligned}$$

То есть, $f_v = \varepsilon^i = \Phi(e^i)$. Таким образом, элементы сопряженного базиса определяются условиями (5.1) однозначно. Однозначно определяется и их смысл: они соответствуют при изоморфизме Φ функционалам ε^i .

Условие сопряженности симметрично: пространства L_1 и L_2 в нем равноправны. Чтобы воспользоваться этой симметрией поступают следующим образом. Индексы в нумерации элементов базиса в одном из них ставят в нижний регистр. Тогда индексы в нумерации элементов базиса в другом пространстве ставят в верхний регистр. При этом соответствующие координаты в первом пространстве нумеруются в верхнем регистре, во втором — в нижнем регистре. Но этот выбор зависит от нашего произвола. Можем сделать обратный выбор.

Базисы в пространствах L_1 и L_2 , связанные условиями (5.1), называются *взаимными*, или *двойственными*, или *сопряженными*. В силу сказанного, каждый из них однозначно определяется по другому.

Это определение расширяет определение, данное в §2 для пары L и L^* .

Формула свертки для

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n \in L^1$$

и

$$v = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \cdots + x_n e^n \in L^2$$

во взаимных базисах выглядит просто:

$$a(u, v) = x^1 x_1 a(e_1, e^1) + x^2 x_1 (e_2, e^1) + \cdots + x^n x_1 (e_n, e^1) +$$

$$+x^1x_2a(e_1, e^2) + x^2x_1(e_2, e^2) + \cdots + x^nx_2(e_n, e^2) + \cdots + \\ +x^1x_na(e_1, e^n) + x^2x_n(e_2, e^n) + \cdots + x^nx_n(e_n, e^n),$$

$$(5.2) \quad a(u, v) = x^1x_1 + x^2x_2 + \cdots + x^nx_n.$$

Верно и обращение сделанного наблюдения. Если $u_1, u_2, \dots, u_n$ — базис в L_1 , $v^1, v^2, \dots, v^n$ — базис в L_2 и свертка вычисляется по формуле (5.2), то указанные базисы взаимны. В самом деле, у базисных векторов u_i и v^i все координаты относительно своих базисов, кроме i -той, равны нулю, а i -тая координата равна единице, из чего и вытекает выполнение условий (5.1).

Скалярное произведение на плоскости или в трехмерном пространстве дает пример сопряжения векторного пространства с самим собой. Соответственно, взаимные базисы реализуются в рамках одного пространства и обе системы обозначений могут использоваться одновременно. При этом базис сопряжен себе тогда и только тогда, когда он ортонормирован.

Отметим очень важный факт. Сопоставляя базису взаимный базис мы вводим отношения между базисами, а не между векторами, составляющими базисы. То есть, если $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e^1, e^2, \dots, e^n$ взаимные базисы и от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ мы переходим к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$, в котором $f_1 = e_1$, то это не значит, что в базисе $f^1, f^2, \dots, f^n$, взаимном с базисом $f_1, f_2, \dots, f_n$, мы будем иметь $f^1 = e^1$.

Позволим себе упростить наши обозначения, говоря о паре сопряженных пространств L_1 и L_2 и подчеркивая симметрию ситуации. Если M обозначает одно из пространств сопряженной пары, то будем обозначать другое пространство символом M^* . То есть, распространим на сопряженные пары обозначение, применявшееся ранее к пространству линейных функционалов. Тогда $(M^*)^* = M$. К недоразумениям это не приводит. Кроме того, $a(u, v)$ будем обозначать также $v(u)$ или $u(v)$, то есть, отождествим вектор $v \in L_2$ с функционалом φ_v и вектор $u \in L_1$ с функционалом ψ_u . Это также не приводит к недоразумениям и также упрощает обозначения. Всегда от новых обозначений можно однозначно вернуться к старым.

Сопряженные отображения.

Пусть векторные пространства L_1 и L_2 связаны сверткой $a(u, v)$.

Говорят, что линейные отображения $\psi : L_1 \rightarrow L_1$ и $\varphi : L_2 \rightarrow L_2$ сопряжены, если $a(\psi(u), v) = a(u, \varphi(v))$ для любых $u \in L_1$ и $v \in L_2$.

В обозначениях §3 это равносильно тому, что линейные отображения $\Psi \cdot \psi : L_1 \rightarrow L_2^*$ и $\Phi \cdot \varphi : L_2 \rightarrow L_1^*$ порождают одну и ту же билинейную функцию. Здесь $\Psi : L_1 \rightarrow L_2^*$ и $\Phi : L_2 \rightarrow L_1^*$ — отображения, порожденные сверткой $a(u, v)$.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L_1 , $f_1, f_2, \dots, f_n$ — базис пространства L_2 , A — матрица отображения $\psi : L_1 \rightarrow L_1$ в базисе $e_1, e_2,$

$\dots, e_n$, B — матрица отображения $\varphi : L_2 \rightarrow L_2$ в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$, G — матрица билинейной функции $a(u, v)$ в базисах $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Тогда по замечаниям §3 матрица G будет одновременно матрицей отображения $\Phi : L_2 \rightarrow L_1^*$, а матрица G^T будет одновременно матрицей отображения $\Psi : L_1 \rightarrow L_2^*$ в соответствующих базисах. Матрицей отображения $\Phi \cdot \varphi$ будет произведение матриц $G \cdot B$. Матрицей отображения $\Psi \cdot \psi$ будет произведение матриц $G^T \cdot A$. По замечаниям §3 отображения $\psi : L_1 \rightarrow L_1$ и $\varphi : L_2 \rightarrow L_2$ сопряжены тогда и только тогда, когда $G \cdot B = (G^T \cdot A)^T = A^T \cdot G$.

Если указанные выше базисы взаимны (относительно свертки $a(u, v)$), то $G = E$ и последняя формула упрощается: $B = A^T$.

§6. Переход к новому взаимному базису.

Пусть в пространстве L_1 зафиксирован базис $e_1, e_2, \dots, e_n$.

По описанной выше процедуре в сопряженном пространстве L_2 определяется взаимный базис $e^1, e^2, \dots, e^n$.

Пусть в пространстве L_1 совершается переход к новому базису

$$\begin{cases} f_1 = p_1^1 e_1 + p_1^2 e_2 + \dots + p_1^n e_n \\ f_2 = p_2^1 e_1 + p_2^2 e_2 + \dots + p_2^n e_n \\ \dots \\ f_n = p_n^1 e_1 + p_n^2 e_2 + \dots + p_n^n e_n. \end{cases}$$

Для него в сопряженном пространстве L_2 определен свой взаимный базис $f^1, f^2, \dots, f^n$.

Ответим на вопрос, как связан переход от базиса $e^1, e^2, \dots, e^n$ к базису $f^1, f^2, \dots, f^n$ в сопряженном пространстве L_2 с уже описанным выше переходом от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$ в пространстве L_2 .

Матрицу

$$P = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 & \dots & p_1^n \\ p_2^1 & p_2^2 & \dots & p_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n^1 & p_n^2 & \dots & p_n^n \end{pmatrix}$$

назовем *матрицей перехода* от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Преобразование координат при переходе от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$ описывается системой

$$(6.1) \quad \begin{cases} x^1 = p_1^1 y^1 + p_1^2 y^2 + \dots + p_1^n y^n \\ x^2 = p_2^1 y^1 + p_2^2 y^2 + \dots + p_2^n y^n \\ \dots \\ x^n = p_n^1 y^1 + p_n^2 y^2 + \dots + p_n^n y^n, \end{cases}$$

где $x^1, x^2, \dots, x^n$ — координаты вектора u в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, $y^1, y^2, \dots, y^n$ — координаты того же вектора u в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$. Матрица этой

системы получается транспонированием матрицы P , то есть, эта матрица есть матрица P^T .

Так как $x^i = e^i(u)$, $y^i = f^i(u)$, то систему (6.1) можем переписать в виде

$$\begin{cases} e^1(u) = p_1^1 f^1(u) + p_2^1 f^2(u) + \dots + p_n^1 f^n(u) \\ e^2(u) = p_1^2 f^1(u) + p_2^2 f^2(u) + \dots + p_n^2 f^n(u) \\ \dots \\ e^n(u) = p_1^n f^1(u) + p_2^n f^2(u) + \dots + p_n^n f^n(u), \end{cases}$$

а так как эти уравнения справедливы при всех $u \in L_1$, то

$$\begin{cases} e^1 = p_1^1 f^1 + p_2^1 f^2 + \dots + p_n^1 f^n \\ e^2 = p_1^2 f^1 + p_2^2 f^2 + \dots + p_n^2 f^n \\ \dots \\ e^n = p_1^n f^1 + p_2^n f^2 + \dots + p_n^n f^n. \end{cases}$$

То есть, матрица P^T является матрицей перехода от базиса $f^1, f^2, \dots, f^n$ к базису $e^1, e^2, \dots, e^n$ в пространстве L_2 .

Решая систему (6.1) относительно $y^1, y^2, \dots, y^n$, получаем систему

$$\begin{cases} y^1 = q_1^1 x^1 + q_2^1 x^2 + \dots + q_n^1 x^n \\ y^2 = q_1^2 x^1 + q_2^2 x^2 + \dots + q_n^2 x^n \\ \dots \\ y^n = q_1^n x^1 + q_2^n x^2 + \dots + q_n^n x^n. \end{cases}$$

Учитывая, что $x^i = e^i(u)$ и $y^i = f^i(u)$, перепишем последнюю систему в виде

$$\begin{cases} f^1(u) = q_1^1 e^1(u) + q_2^1 e^2(u) + \dots + q_n^1 e^n(u) \\ f^2(u) = q_1^2 e^1(u) + q_2^2 e^2(u) + \dots + q_n^2 e^n(u) \\ \dots \\ f^n(u) = q_1^n e^1(u) + q_2^n e^2(u) + \dots + q_n^n e^n(u). \end{cases}$$

Эти равенства справедливы при всех значениях аргумента $u \in L_1$. Поэтому они справедливы для $e^1, e^2, \dots, e^n, f^1, f^2, \dots, f^n$ как для элементов пространства L_2 :

$$(6.2) \quad \begin{cases} f^1 = q_1^1 e^1 + q_2^1 e^2 + \dots + q_n^1 e^n \\ f^2 = q_1^2 e^1 + q_2^2 e^2 + \dots + q_n^2 e^n \\ \dots \\ f^n = q_1^n e^1 + q_2^n e^2 + \dots + q_n^n e^n. \end{cases}$$

Это означает, что матрица

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1 & \dots & q_n^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^n & q_2^n & \dots & q_n^n \end{pmatrix}$$

есть матрица перехода базиса $f^1, f^2, \dots, f^n$ к базису $e^1, e^2, \dots, e^n$.

В матричной форме системы преобразования координат записывается в виде равенств

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Поэтому $P^T = Q^{-1}$.

При переходе от базиса $e^1, e^2, \dots, e^n$ к базису $f^1, f^2, \dots, f^n$ в пространстве L_2 по формулам (6.2) преобразование координат описывается системой

$$\begin{cases} x_1 = q_1^1 y_1 + q_1^2 y_2 + \dots + q_1^n y_n \\ x_2 = q_2^1 y_1 + q_2^2 y_2 + \dots + q_2^n y_n \\ \dots \\ x_n = q_n^1 y_1 + q_n^2 y_2 + \dots + q_n^n y_n. \end{cases}$$

То есть,

$$\begin{cases} e_1(u) = q_1^1 f_1(u) + q_1^2 f_2(u) + \dots + q_1^n f_n(u) \\ e_2(u) = q_2^1 f_1(u) + q_2^2 f_2(u) + \dots + q_2^n f_n(u) \\ \dots \\ e_n(u) = q_n^1 f_1(u) + q_n^2 f_2(u) + \dots + q_n^n f_n(u). \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} e_1 = q_1^1 f_1 + q_1^2 f_2 + \dots + q_1^n f_n \\ e_2 = q_2^1 f_1 + q_2^2 f_2 + \dots + q_2^n f_n \\ \dots \\ e_n = q_n^1 f_1 + q_n^2 f_2 + \dots + q_n^n f_n \end{cases}$$

— матрица Q^T является матрицей перехода от базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ в пространстве L_1 .

§7. Аннулятор.

Пусть L_1 и L_2 — сопряженные пространства, $a(u, v)$ — их свертка.

Пусть $M \subseteq L_1$. Множество $\text{Ann}(M) = \{v: v \in L_2, a(u, v) = 0 \text{ для любого } u \in M\}$ называется *аннулятором* множества M .

Покажем, что аннулятор является линейным подпространством пространства L_2 .

1. Пусть $v_1, v_2 \in \text{Ann}(M)$. Тогда для любого $u \in M$ имеем: $a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2) = 0 + 0 = 0$.

2. Пусть $v \in \text{Ann}(M)$ и $\lambda \in K$. Тогда для любого $u \in M$ имеем: $a(u, \lambda v) = \lambda a(u, v) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Что и требовалось.

Очевидно, если $M_1 \subseteq M_2$, то $\text{Ann}(M_2) \subseteq \text{Ann}(M_1)$.

Утверждение 7.1. *Аннулятор любого множества $M \subseteq L_1$ совпадает с аннулятором его линейной оболочки $L(M)$.*

Доказательство. I. В силу включения $M \subseteq L(M)$ и предыдущего замечания имеем: $\text{Ann}(L(M)) \subseteq \text{Ann}(M)$.

II. Пусть $v \in \text{Ann}(M)$ и $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k \in L(M)$, где $u_1, u_2, \dots, u_k \in M$. Тогда

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v) + \dots + \lambda_k a(u_k, v) = \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности $u \in L(M)$ это означает, что $\text{Ann}(M) \subseteq \text{Ann}(L(M))$.

III. Таким образом, $\text{Ann}(M) = \text{Ann}(L(M))$ и лемма доказана.

Утверждение 7.2. *Для любого множества $M \subseteq L_1$*

$$\text{Rang}(M) + \dim \text{Ann}(M) = \dim L_1.$$

Доказательство. I. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_r$ максимальная линейно независимая система элементов множества M . Тогда $r = \text{Rang}(M)$. Дополним систему $e_1, e_2, \dots, e_r$ до базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L_1 . Пусть $e^1, e^2, \dots, e^n$ взаимный базис пространства L_2 .

Вектор

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n \in L_1$$

принадлежит линейной оболочке $L(M)$ множества M тогда и только тогда, когда

$$x^{r+1} = x^{r+2} = \dots = x^n = 0.$$

То есть, тогда и только тогда, когда

$$a(u, e^{r+1}) = a(u, e^{r+2}) = \dots = a(u, e^n) = 0.$$

II. Пусть

$$v = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \dots + x_n e^n \in L_2.$$

и

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n \in L(M).$$

Тогда

$$a(u, v) = x_1 x^1 + x_2 x^2 + \dots + x_n x^n.$$

В силу I

$$x^{r+1} = x^{r+2} = \dots = x^n = 0.$$

Поэтому $a(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0,$$

то есть, тогда и только тогда, когда

$$v = x_{r+1} e^{r+1} + x_{r+2} e^{r+2} + \dots + x_n e^n,$$

то есть, тогда и только тогда, когда вектор v принадлежит

$$L(e^{r+1}, e^{r+2}, \dots, e^n).$$

Таким образом,

$$\text{Ann}(L(M)) = L(e^{r+1}, e^{r+2}, \dots, e^n).$$

III. Векторы $e^{r+1}, e^{r+2}, \dots, e^n$ линейно независимы. Поэтому из II вытекает $\dim \text{Ann}(L(M)) = \dim \text{Ann}(M) = n - r$.

Имеем:

$$\text{Rang}(M) + \dim \text{Ann}(M) = r + (n - r) = n = \dim L_1.$$

Утверждение доказано.

§8. Аннулятор и нулевое подпространство. Системы однородных уравнений.

Сказанное в предыдущем параграфе применимо к ситуации, когда $L_1 = L$ и $L_2 = L^*$ для n -мерного пространства L , а функция $a(u, f)$ определена по формуле $a(u, f) = f(u)$.

Пусть $M \subseteq L$. Аннулятор множества M есть множество $\text{Ann}(M) = \{f: f \in L^*, f(u) = 0 \text{ для любого } u \in M\}$.

По замечаниям предыдущего параграфа аннулятор является линейным подпространством пространства L^* .

Из утверждения 7.1 вытекает

Утверждение 8.1. Аннулятор любого множества $M \subseteq L_1$ совпадает с аннулятором его линейной оболочки $L(M)$.

Из утверждения 7.2 вытекает

Утверждение 8.2. Для любого множества $M \subseteq L_1$

$$\text{Rang}(M) + \dim \text{Ann}(M) = \dim L_1.$$

Применим наблюдения предыдущего параграфа к ситуации, когда $L_1 = L^*$ и $L_2 = L$ для n -мерного пространства L , а функция $a(u, v)$ определена по формуле $a(f, v) = f(v)$.

Пусть $M \subseteq L^*$. Множество $N(M) = \{v: v \in L, f(v) = 0 \text{ для любого } f \in M\}$ называется *нулевым подпространством* множества M .

В терминах предыдущего параграфа $N(M)$ есть аннулятор множества M . В соответствии с замечаниями предыдущего параграфа мы имеем следующее.

Нулевое подпространство является линейным подпространством пространства L .

Очевидно, если $M_1 \subseteq M_2$, то $N(M_2) \subseteq N(M_1)$.

Утверждение 8.3. Нулевое подпространство любого множества $M \subseteq L^*$ совпадает с нулевым подпространством его линейной оболочки $L(M)$.

Утверждение 8.4. Для любого множества $M \subseteq L^*$

$$\text{Rang}(M) + \dim N(M) = \dim L$$

в силу утверждения 7.2.

Пусть далее $f_1, f_2, \dots, f_m \in L^*$.

Нулевое подпространство системы $f_1, f_2, \dots, f_m$ есть множество векторов $u \in L$, удовлетворяющих системе

$$(8.1) \quad \begin{cases} f_1(u) = 0 \\ f_2(u) = 0 \\ \dots \\ f_m(u) = 0. \end{cases}$$

То есть, нулевое подпространство системы линейных функционалов $f_1, f_2, \dots, f_m \in L^*$ есть пространство решений системы (8.1).

Уточним ситуацию. Пусть $L = \mathbb{R}^n$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ — стандартный базис пространства $L = \mathbb{R}^n$: $e_1 = \{1, 0, \dots, 0\}$, $e_2 = \{0, 1, \dots, 0\}$, $\dots$, $e_n = \{0, 0, \dots, 1\}$. Пусть линейные функционалы $f_1, f_2, \dots, f_m \in L^*$ даны своими координатами во взаимном базисе $e^1, e^2, \dots, e^n$: $f_i = \{c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}\}$, то есть, для

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n \in \mathbb{R}^n$$

$$f_i(u) = c_{i1} x^1 + c_{i2} x^2 + \dots + c_{in} x^n.$$

Соответственно, система (1) приобретает вид

$$(8.2) \quad \begin{cases} c_{11}x^1 + c_{12}x^2 + \dots + c_{1n}x^n = 0 \\ c_{21}x^1 + c_{22}x^2 + \dots + c_{2n}x^n = 0 \\ \dots \\ c_{m1}x^1 + c_{m2}x^2 + \dots + c_{mn}x^n = 0. \end{cases}$$

В соответствии с утверждением 8.4 размерность пространства решений системы (8.2) (то есть, число элементов фундаментальной системы решений), равно $n - r_1$, где r_1 ранг системы строк матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, пространство решений M системы (8.2) совпадает с ядром линейного отображения φ_C с матрицей C . По теореме 2.3.1 $\dim \operatorname{Im} \varphi_C + \dim \ker \varphi_C = n$. По замечаниям §3.6 $\dim \operatorname{Im} \varphi_C$ равно рангу r_2 системы столбцов матрицы C . То есть, $r_2 + \dim M = n$. Сравнивая равенства $\dim M = n - r_1$ и $r_2 + \dim M = n$, получаем: $r_1 = r_2$. То есть, *ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов*.

В обратном направлении. Пусть L_1 — подпространство n -мерного линейного пространства L , $\dim L_1 = k < n$. По утверждению 7.2 размерность аннулятора L_2 подпространства L_1 равна $n - k$.

Пусть линейные функционалы $f_1, f_2, \dots, f_{n-k} \in L^*$ составляют базис подпространства L_2 . По утверждению 7.2 размерность нулевого подпространства L_3 системы $f_1, f_2, \dots, f_{n-k}$ равна $n - (n - k) = k$. При этом $f_i(u) = 0$ для любых $i = 1, 2, \dots, n - k$ и $u \in L_1$. То есть, $L_1 \subseteq L_3$, а так как размерности L_1 и L_3 совпадают (они равны k), то $L_1 = L_3$ и система

$$\begin{cases} f_1(u) = 0 \\ f_2(u) = 0 \\ \dots \\ f_{n-k}(u) = 0 \end{cases}$$

задает пространство L_1 .