

Просьба сообщить о всех замеченных опечатках,
описках, возникших вопросах, замечаниях
и т.д. на адрес vvfil@ mech.math.msu.su

версия 25.04.2020

Глава 2.

Линейные отображения.

§1. Линейное отображение.

Отображение φ векторного пространства L_1 в векторное пространство L_2 называется *линейным отображением* или *гомоморфизмом*, если

1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ для любых векторов u и v из L_1 .
2. $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$ для любого вектора u из L_1 и любого числа $\lambda \in K$.

В курсе аналитической геометрии мы встречались с такими отображениями.

Например, аффинное преобразование порождает линейное отображение соответствующего пространства векторов.

Другой пример. Проекция плоскости на прямую l_1 параллельно прямой l_2 , или проекция пространства на прямую l параллельно плоскости π , или проекция пространства на плоскость π параллельно прямой l порождают линейные отображения соответствующих пространств векторов.

Как легко видеть *композиция двух линейных отображений также является линейным отображением*.

Ядром линейного отображения $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ векторного пространства L_1 в векторное пространство L_2 называется множество $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\vec{0}) = \{u: u \in L_1, \varphi(u) = \vec{0}\}$.

Покажем, что ядро является линейным подпространством пространства L_1 .

1. Для любых векторов u и v из $\ker \varphi$ имеем: $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ и поэтому $u + v \in \ker \varphi$.

2. Для любого вектора u из $\ker \varphi$ и любого числа $\lambda \in K$ имеем: $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$ и поэтому $\lambda u \in \ker \varphi$.

Покажем, что *образ* $\varphi(M) = \{\varphi(u): u \in M\}$ любого линейного подпространства M пространства L_1 является линейным подпространством пространства L_2 .

1. Для любых векторов u_2 и v_2 из $\varphi(M)$ найдутся $u_1, v_1 \in M$, для которых $u_2 = \varphi(u_1)$ и $v_2 = \varphi(v_1)$. Имеем: $\varphi(u_1 + v_1) = \varphi(u_1) + \varphi(v_1) = u_2 + v_2$ и поэтому $u_2 + v_2 \in \varphi(M)$.

2. Для любого вектора u_2 из $\varphi(M)$ найдется вектор $u_1 \in M$, для которого $u_2 = \varphi(u_1)$. Теперь, для любого числа $\lambda \in K$ имеем: $\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1) = \lambda u_2$ и поэтому $\lambda u_2 \in \varphi(M)$. Что и требовалось.

В частности, образ $\text{Im } \varphi = \varphi(L_1) = \{\varphi(u) : u \in L_1\}$ отображения φ является линейным подпространством пространства L_2 .

Лемма 1.1. *Образы $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$ векторов $u, v \in L_1$ совпадают тогда и только тогда, когда $u - v \in \ker \varphi$.*

Доказательство. Начнем с равенства

$$\varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v).$$

I. Если образы $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$ векторов $u, v \in L_1$ совпадают, то $\varphi(u - v) = \vec{0}$ и $u - v \in \ker \varphi$.

II. Если $u - v \in \ker \varphi$, то $\varphi(u - v) = \vec{0}$,

$$\varphi(u) - \varphi(v) = \vec{0},$$

$$\varphi(u) = \varphi(v) + \vec{0} = \varphi(v).$$

Лемма доказана.

§2. Мономорфизмы, эпиморфизмы, изоморфизмы. Изоморфность линейных пространств.

Линейное отображение $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ векторного пространства L_1 в векторное пространство L_2 называется *мономорфизмом*, если $\ker \varphi = \{\vec{0}\}$. В силу леммы 1.1 это равносильно условию: *если $u \neq v$, то $\varphi(u) \neq \varphi(v)$* . (Другими словами, отображение φ *инъективно*).

Линейное отображение $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ векторного пространства L_1 в векторное пространство L_2 называется *эпиморфизмом*, если образ отображения φ совпадает со всем пространством L_2 , то есть, $L_2 = \text{Im } \varphi$. (Другими словами, отображение φ *сюръективно*).

Если выполнены оба эти условия, то есть, если рассматриваемое отображение является одновременно и инъективным, и сюръективным (является одновременно и мономорфизмом, и эпиморфизмом), то оно взаимно однозначно и определено обратное отображение $\varphi^{-1} : L_2 \rightarrow L_1$ (то есть, $\varphi^{-1}(u_2) = u_1$, тогда и только тогда, когда $\varphi(u_1) = u_2$).

Покажем, что в этих условиях *обратное отображение $\varphi^{-1} : L_2 \rightarrow L_1$ также является линейным*.

1. Пусть u_2 и $v_2 \in L_2$, $u_1 = \varphi^{-1}(u_2)$ и $v_1 = \varphi^{-1}(v_2)$

Имеем:

$$\varphi(u_1 + v_1) = \varphi(u_1) + \varphi(v_1) = \varphi(\varphi^{-1}(u_2)) + \varphi(\varphi^{-1}(v_2)) = u_2 + v_2$$

и поэтому

$$\varphi^{-1}(u_2 + v_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1 + v_1)) = u_1 + v_1.$$

2. Пусть $u_2 \in L_2$, $u_1 = \varphi^{-1}(u_2)$ и $\lambda \in K$.

Имеем:

$$\varphi(\lambda u_1) = \lambda \varphi(u_1) = \lambda u_2$$

и поэтому

$$\varphi^{-1}(\lambda u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda u_1)) = \lambda u_1.$$

Линейное отображение $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ векторного пространства L_1 в векторное пространство L_2 называется *изоморфизмом*, если оно одновременно является и мономорфизмом, и эпиморфизмом.

В силу только что доказанного *отображение, обратное к изоморфизму, также является изоморфизмом*.

Это позволяет ввести отношение *изоморфности*: линейное пространство L_1 *изоморфно* линейному пространству L_2 , если существует изоморфизм $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$. В силу сказанного выше обратное отображение $\varphi^{-1} : L_2 \rightarrow L_1$ также является изоморфизмом, поэтому отношение изоморфности симметрично: *если линейное пространство L_1 изоморфно линейному пространству L_2 , то линейное пространство L_2 изоморфно линейному пространству L_1* .

Линейное пространство изоморфно самому себе, так как тождественное отображение очевидно является изоморфизмом.

Наконец, композиция двух мономорфизмов является мономорфизмом (более общо, композиция двух инъективных отображений является инъективным отображением), композиция двух эпиморфизмов является эпиморфизмом (более общо, композиция двух сюръективных отображений является сюръективным отображением), поэтому композиция двух изоморфизмов является изоморфизмом (более общо, композиция двух взаимно однозначных отображений является взаимно однозначным отображением).

Поэтому, *если линейное пространство L_1 изоморфно линейному пространству L_2 , а линейное пространство L_2 изоморфно линейному пространству L_3 , то линейное пространство L_1 изоморфно линейному пространству L_3 (транзитивность)*.

§3. Леммы о сохранении линейной зависимости и линейной независимости векторов при линейных отображениях.

Лемма 3.1. Пусть $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — линейное отображение, векторы $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$ линейно зависимы. Тогда векторы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in L_2$ также линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$, равную $\vec{0}$.

В силу линейности отображения φ $\lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2) + \dots + \lambda_k \varphi(u_k) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$, что означает линейную зависимость векторов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in L_2$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — линейное отображение, $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$, векторы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in L_2$ линейно независимы. Тогда векторы $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$ также линейно независимы.

Доказательство. Предположив линейную зависимость векторов $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$ мы войдем в противоречие с леммой 3.1, что и дает требуемое. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — линейное отображение, $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$. Тогда ранг системы векторов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in L_2$ не больше ранга системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$.

Доказательство. Удобнее показать, что ранг системы $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$ не меньше ранга системы векторов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in L_2$.

Среди векторов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k)$ отберем максимальную линейно независимую систему $\varphi(u_{i_1}), \varphi(u_{i_2}), \dots, \varphi(u_{i_r})$. Число r элементов в ней равно рангу системы векторов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k)$.

По лемме 3.2 векторы $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ линейно независимы. То есть, в системе $u_1, u_2, \dots, u_k$ есть, по крайней мере, r линейно независимых векторов. Следовательно, ее ранг не меньше r . Лемма доказана.

Следствие. Пусть $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — линейное отображение. Тогда $\dim \varphi(L_1) \leq \dim L_1$, так как размерность линейного пространства совпадает с его рангом. Лемма доказана.

Лемма 3.4. Пусть $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — мономорфизм, векторы $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$ линейно независимы. Тогда векторы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in L_2$ также линейно независимы.

Доказательство. Предположим, что векторы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in L_2$ линейно зависимы. Рассмотрим их нетривиальную линейную комбинацию $\lambda_1\varphi(u_1) + \lambda_2\varphi(u_2) + \dots + \lambda_k\varphi(u_k)$, равную $\vec{0} \in L_2$. В силу линейности отображения φ вектор $v = \lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \dots + \lambda_ku_k \in L_1$ отображается в $\vec{0} \in L_2$:

$$\varphi(v) = \varphi(\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \dots + \lambda_ku_k) = \lambda_1\varphi(u_1) + \lambda_2\varphi(u_2) + \dots + \lambda_k\varphi(u_k) = \vec{0} \in L_2.$$

В силу мономорфности отображения φ $\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \dots + \lambda_ku_k = \vec{0}$. То есть, векторы $u_1, u_2, \dots, u_k \in L_1$ оказались линейно зависимыми, что противоречит первоначальным предположениям. Таким образом, предположение о линейной зависимости векторов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in L_2$ привело нас к противоречию и лемма доказана.

Лемма 3.5. Пусть $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — линейное отображение, $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L_1 , причем векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ составляют базис подпространства $\ker \varphi$. Тогда векторы $\varphi(e_{k+1}), \varphi(e_{k+2}), \dots, \varphi(e_n)$ составляют базис подпространства $\operatorname{Im} \varphi$.

Доказательство. I. Покажем, что любой вектор $v \in \operatorname{Im} \varphi$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\varphi(e_{k+1}), \varphi(e_{k+2}), \dots, \varphi(e_n)$.

Пусть $v = \varphi(u)$ и $u = \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \dots + \lambda_ne_n$. Тогда $v = \lambda_1\varphi(e_1) + \lambda_2\varphi(e_2) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n)$. Так как векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ принадлежат ядру $\ker \varphi$ отображения φ , то $\varphi(e_1) = \vec{0}, \varphi(e_2) = \vec{0}, \dots, \varphi(e_k) = \vec{0}$ и поэтому $v = \lambda_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \lambda_{k+2}\varphi(e_{k+2}) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n)$, что и дает требуемое.

II. Покажем, что векторы $\varphi(e_{k+1}), \varphi(e_{k+2}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы.

В силу замечания 1.6.1 $L(e_1, e_2, \dots, e_k) \cap L(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n) = \{\vec{0}\}$. Поэтому ни один вектор из $L(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n) \setminus \{\vec{0}\}$ не отображается в $\vec{0}$ под действием φ . Поэтому ограничение отображения φ на подпространство $L(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n)$ является мономорфизмом и мы получаем требуемое из леммы 3.4. Лемма доказана.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — линейное отображение. Тогда $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim L_1$.

Доказательство. Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_i$ составляют базис пространства $\ker \varphi$. Добавляя векторы $f_1, f_2, \dots, f_j$, дополним его до базиса пространства L_1 . По лемме 3.5 векторы $\varphi(f_1), \varphi(f_2), \dots, \varphi(f_j)$, составляют базис пространства $\operatorname{Im} \varphi$. Имеем: $\dim \operatorname{Im} \varphi = j$, $\dim \ker \varphi = i$, $\dim L_1 = i + j$, что и дает требуемое. Теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — линейное отображение n -мерного пространства L_1 в n -мерное пространство L_2 . Тогда следующие условия равносильны:

1. φ — эпиморфизм.
2. φ — мономорфизм.
3. φ — изоморфизм.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ Если φ — эпиморфизм, то $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim L_1$. Тогда по теореме 3.1 $\dim \ker \varphi = 0$, что дает требуемое.

$2 \Rightarrow 1$ Если φ — мономорфизм, то $\dim \ker \varphi = 0$. Тогда по теореме 3.1 $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim L_1$, что дает требуемое.

$1, 2 \Rightarrow 3$ — очевидно.

$3 \Rightarrow 1$ и $3 \Rightarrow 2$ — очевидно. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Формулы $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = \dim L_1$ для линейного отображения φ и $\dim(L_1 \oplus L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$ для прямой суммы пространств достаточно похожи и на этом основании “у плохих студентов” иногда появляется искушение, рассматривая линейное отображение $\varphi : L \rightarrow L$ пространства L в себя, сказать, что $L = \operatorname{Im} \varphi \oplus \ker \varphi$. Это может иметь место, но не обязательно. Например, для отображения пространства L векторов плоскости в себя, сопоставляющего вектору $u = \{\alpha, \beta\}$ вектор $v = \{0, \alpha\}$, и ядро, и образ совпадают с множеством L_1 векторов, параллельных оси ординат и, следовательно, представление $L = \operatorname{Im} \varphi \oplus \ker \varphi$ не имеет места. Как легко видеть, для того, чтобы указанная формула была справедлива, необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{Im} \varphi \cap \ker \varphi = \{\vec{0}\}$.

Теорема 3.3. Два конечномерных линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

Доказательство. I. Пусть $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — изоморфизм линейного пространства L_1 на линейное пространство L_2 . По следствию леммы 3.3 $\dim L_2 \leq \dim L_1$. По тому же следствию леммы 3.3, примененной к отображению $\varphi^{-1} : L_2 \rightarrow L_1$ имеем: $\dim L_1 \leq \dim L_2$, что и дает требуемое.

II. Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляют базис n -мерного пространства L .

Вектору $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ сопоставим строку $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, являющуюся элементом пространства K^n .

В силу замечаний §1.4 этим мы определяем изоморфизм $\varphi : L \rightarrow K^n$. Таким образом, любое n -мерное линейное пространство изоморфно K^n . В силу симметричности и транзитивности отношения изоморфности из сказанного следует, что все n -мерные линейные пространства изоморфны. Теорема доказана.

§4. Пространство линейных отображений.

Отображения φ_1 и φ_2 произвольного множества X в векторное пространство L_2 (над полем K) можно складывать. Сумма φ отображений φ_1 и φ_2 определяется следующим образом. Для $x \in X$ $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$.

Отображение φ_1 множества X в векторное пространство L_2 можно умножать на числа из K . Произведение φ отображения φ_1 на $\lambda \in K$ определяется следующим образом. Для $x \in X$ $\varphi(x) = \lambda \varphi_1(x)$.

При этом введенные на множестве отображений множества X в пространство L_2 операции удовлетворяют всем восьми условиям из определения векторного пространства: при фиксированном $x \in X$ символы $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и т.д. обозначают элементы пространства L_2 и каждое из этих условий выполнено просто как для элементов линейного пространства L_2 . Но эти условия выполнены при каждом $x \in X$. То есть, они выполнены для $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и т.д. тождественно по $x \in X$, то есть, то есть, они выполнены для φ , φ_1 , φ_2 и т.д. как для функций.

Предположим теперь, что X — это линейное пространство L_1 и будем рассматривать только линейные отображения $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$. Проверим, что они при введенных выше операциях сложения и умножения на числа из K образуют линейное пространство. То есть, нам надо показать, что введенные операции сложения и умножения на числа из K являются внутренними для этого множества или, иными словами, что линейные отображения из L_1 в L_2 составляют подпространство пространства всех отображений из L_1 в L_2 .

1. Пусть отображения $\varphi_1, \varphi_2 : L_1 \rightarrow L_2$ являются линейными. Покажем, что отображение $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ также является линейным.

Возьмем произвольно $u, v \in L_1$ и $\lambda \in K$. Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(u+v) &= \varphi_1(u+v) + \varphi_2(u+v) = \\ &= (\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) + (\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) = \\ &= (\varphi_1(u) + \varphi_2(u)) + (\varphi_1(v) + \varphi_2(v)) = \varphi(u) + \varphi(v) \end{aligned}$$

и

$$\varphi(\lambda u) = \varphi_1(\lambda u) + \varphi_2(\lambda u) = \lambda \varphi_1(u) + \lambda \varphi_2(u) = \lambda(\varphi_1(u) + \varphi_2(u)) = \lambda \varphi(u).$$

2. Пусть отображение $\varphi_1 : L_1 \rightarrow L_2$ является линейным и $\mu \in K$. Покажем, что отображение $\varphi = \mu \varphi_1$ также является линейным.

Возьмем произвольно $u, v \in L_1$ и $\lambda \in K$. Имеем:

$$\varphi(u + v) = \mu\varphi_1(u + v) = \mu(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) = \mu\varphi_1(u) + \mu\varphi_1(v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

и

$$\varphi(\lambda u) = \mu\varphi_1(\lambda u) = \mu(\lambda\varphi_1(u)) = \lambda(\mu\varphi_1(u)) = \lambda\varphi(u),$$

что и требовалось.

§5. Матрица линейного отображения. Связь пространства линейных отображений и пространства матриц.

Пусть L_1 и L_2 — конечномерные линейные пространства.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ — какой-то базис в пространстве L_1 , $f_1, f_2, \dots, f_n$ — какой-то базис в пространстве L_2 .

Линейное отображение $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ опишем через эти базисы. Для этого возьмем разложения образов базисных векторов пространства L_1 в базисе пространства L_2 :

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a_1^1 f_1 + a_1^2 f_2 + \dots + a_1^n f_n \\ \varphi(e_2) &= a_2^1 f_1 + a_2^2 f_2 + \dots + a_2^n f_n \\ &\vdots \\ \varphi(e_m) &= a_m^1 f_1 + a_m^2 f_2 + \dots + a_m^n f_n\end{aligned}$$

Возьмем теперь произвольный вектор

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^m e_m$$

пространства L_1 . Имеем:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= x^1 \varphi(e_1) + x^2 \varphi(e_2) + \dots + x^m \varphi(e_m) = \\ &= x^1 (a_1^1 f_1 + a_1^2 f_2 + \dots + a_1^n f_n) + \\ &+ x^2 (a_2^1 f_1 + a_2^2 f_2 + \dots + a_2^n f_n) + \dots + \\ &+ x^m (a_m^1 f_1 + a_m^2 f_2 + \dots + a_m^n f_n) = \\ &= (a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_m^1 x^m) f_1 + \\ &+ (a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_m^2 x^m) f_2 + \dots + \\ &+ (a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + a_m^n x^m) f_n.\end{aligned}$$

То есть, если

$$\varphi(u) = y^1 f_1 + y^2 f_2 + \dots + y^n f_n,$$

то

$$\begin{cases} y^1 = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_m^1 x^m \\ y^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_m^2 x^m \\ \dots \\ y^n = a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + a_m^n x^m \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

Отображение $f^j : L_2 \rightarrow K$, ставящее в соответствие вектору $v \in L_2$ его j -ую координату в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$, линейно. При этом $a_i^j = f^j(\varphi(e_i))$.

Пусть линейное отображение $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ есть сумма двух линейных отображений $\varphi_1 : L_1 \rightarrow L_2$ и $\varphi_2(x) : L_1 \rightarrow L_2$, $b_i^j = f^j(\varphi_1(e_i))$ и $c_i^j = f^j(\varphi_2(e_i))$. Тогда

$$a_i^j = f^j(\varphi(e_i)) = f^j(\varphi_1(e_i)) + f^j(\varphi_2(e_i)) = b_i^j + c_i^j.$$

Пусть линейное отображение $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ есть произведение линейного отображения $\varphi_1 : L_1 \rightarrow L_2$ на $\lambda \in K$, $b_i^j = f^j(\varphi_1(e_i))$. Тогда

$$a_i^j = f^j(\varphi(e_i)) = f^j(\lambda \varphi_1(e_i)) = \lambda b_i^j.$$

Таким образом, элементы матрицы линейного отображения линейно зависят от отображения.

Мы отмечали, что в смысле структуры линейного пространства множество матриц M_{mn} тождественно арифметическому пространству K^{mn} . В силу этого отождествления числа a_i^j суть ни что иное как координаты матрицы в соответствующем базисе.

Таким образом, отображение, сопоставляющее линейному отображению $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ его матрицу в базисах $e_1, e_2, \dots, e_m$ и $f_1, f_2, \dots, f_n$, является линейным. Оно, очевидно, взаимно однозначно. Поэтому фиксируя базисы в пространствах L_1 и L_2 мы определяем изоморфизм пространства линейных отображений $L_1 \rightarrow L_2$ и пространства матриц M_{mn} .

Пусть в конечномерных линейных пространствах L_1, L_2 и L_3 зафиксированы базисы: $e_1, e_2, \dots, e_m$ — в L_1 , $f_1, f_2, \dots, f_n$ — в L_2 и $g_1, g_2, \dots, g_p$ — в L_3 и

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

— матрица линейного отображения $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$,

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^p & b_2^p & \dots & b_n^p \end{pmatrix}$$

— матрица линейного отображения $\psi : L_2 \rightarrow L_3$.

Это означает, что если

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^m e_m \in L_1,$$

$$\varphi(u) = v = y^1 f_1 + y^2 f_2 + \dots + y^n f_n \in L_2$$

и

$$\psi(v) = w = z^1 g_1 + z^2 g_2 + \dots + z^p g_p \in L_3,$$

то

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

и

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \dots \\ z^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^p & b_2^p & \dots & b_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Делая подстановку из первого равенства во второе, получаем:

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \dots \\ z^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^p & b_2^p & \dots & b_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

То есть, матрицей композиции отображений $\psi\varphi$ является произведение их матриц

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^p & b_2^p & \dots & b_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

§6. Ранги матриц.

Сохраним обозначения предыдущего параграфа.

Мы убедились, что если $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ строка координат вектора $u \in L_1$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_m$ (то есть,

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^m e_m),$$

то числа $x^1, x^2, \dots, x^m$ являются коэффициентами в представлении вектора $\varphi(u)$ в виде линейной комбинации векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_m)$, базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ пространства L_2 .

При этом столбцы матрицы линейного отображения φ в базисах $e_1, e_2, \dots, e_m$ и $f_1, f_2, \dots, f_n$ суть столбцы координат векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_m)$, в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Таким образом, столбец

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^m \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда является столбцом координат вектора из $\text{Im } \varphi$, когда он принадлежит линейной оболочке столбцов матрицы отображения φ . Значит, *размерность $\text{Im } \varphi$ равна размерности линейной оболочки столбцов матрицы отображения φ* , то есть, рангу r_φ системы столбцов матрицы отображения φ .

Утверждение 6.1. *Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждой из перемножаемых матриц.*

Доказательство. Пусть матрица C есть произведение матриц B и A : $C = BA$. Представим матрицу A как матрицу линейного отображения $\varphi_A : L_1 \rightarrow L_2$. Представим матрицу B как матрицу линейного отображения $\varphi_B : L_2 \rightarrow L_3$.

В соответствии с замечаниями предыдущего параграфа матрица C является матрицей композиции $\varphi_C = \varphi_B \varphi_A : L_1 \rightarrow L_3$ отображений φ_A и φ_B .

Имеем: $\text{Im } \varphi_C \subseteq \text{Im } \varphi_B$, поэтому $\dim \text{Im } \varphi_C \leq \dim \text{Im } \varphi_B$, $r_{\varphi_C} \leq r_{\varphi_B}$.

Линейное отображение не повышает размерностей подпространств (то есть, размерность образа подпространства не превосходит размерности самого подпространства). Поэтому $\dim \text{Im } \varphi_C \leq \dim \text{Im } \varphi_A$, $r_{\varphi_C} \leq r_{\varphi_A}$. Утверждение доказано.

Утверждение 6.2. *Ранг произведения матрицы A на невырожденную матрицу B равен рангу матрицы A .*

Доказательство. Пусть $C = BA$.

I. По утверждению 6.1 ранг матрицы C не превосходит ранга матрицы A .

II. Имеем: $A = B^{-1}C$. По утверждению 6.1 ранг матрицы A не превосходит ранга матрицы C .

Таким образом, ранги матриц A и C совпадают.

Пусть $C = AB$.

III. По утверждению 6.1 ранг матрицы C не превосходит ранга матрицы A .

IV. Имеем: $A = CB^{-1}$. По утверждению 6.1 ранг матрицы A не превосходит ранга матрицы C .

Таким образом, и в этом случае ранги матриц A и C совпадают. Утверждение доказано.