Просьба сообщить о всех замеченных опечатках,
описках, возникших вопросах, замечаниях
и т.д. на адрес vvfil@ mech.math.msu.su

версия 04.04.2020

Глава 1.

Линейные пространства.

§1. Векторное (линейное) пространство.

Пусть K — либо поле действительных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Множество L называется линейным (векторным) пространством над полем K , если в нем определены операции сложения элементов L ($L \times L \rightarrow L$, сумма $u, v \in L$ обозначается $u + v$) и умножения элементов L на числа из K ($K \times L \rightarrow L$, произведение $u \in L$ и $\lambda \in K$ обозначается λu), обладающие следующими свойствами:

1. Существует такой элемент $\vec{0} \in L$, что $u + \vec{0} = u$ для любого вектора u .
2. Для любого вектора $u \in L$ найдется такой вектор v , что $u + v = \vec{0}$.
3. $u + v = v + u$ для любых векторов u и v из L .
4. $(u + v) + w = u + (v + w)$ для любых векторов u, v и w из L .
5. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ для любого вектора $u \in L$ и любых чисел λ и μ из K .
6. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ для любого вектора $u \in L$ и любых чисел λ и μ из K .
7. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ для любых векторов u и v из L и любого числа $\lambda \in K$.
8. $1 \cdot u = u$ для любого вектора u .

Элементы множества L обычно и именно в качестве элементов L как векторного пространства, называются *векторами*. При этом они могут быть одновременно многочленами, или функциями, или классами равных направленных отрезков и т.д.. Операции сложения векторов и умножения вектора на числа обычно называются *линейными операциями*.

В соответствии с рассмотрениями курса аналитической геометрии первого семестра векторное пространство над полем действительных чисел составляют

- 1) векторы, параллельные некоторой прямой,
- 2) векторы, параллельные некоторой плоскости,
- 3) векторы пространства.

Но кроме них векторные пространства встречаются и в других ситуациях.

Например, само множество действительных (комплексных) чисел является векторным пространством над полем действительных (комплексных) чисел.

Например, множество действительных (комплексных) функций с фиксированной областью определения является векторным пространством над полем действительных (комплексных) чисел.

Рассмотрим частный случай последнего примера, множество действительных (комплексных) функций, определенных на начальном отрезке $\{1, 2, \dots, n\}$ множества натуральных чисел. Опишем такую функцию, сопоставив номеру i число x_i . Сведем это задание функции в строку-таблицу $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Складываются такие строки по каждой позиции независимо. То есть, сумма строк $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ есть строка $x+y = \{x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n\}$. Произведение строки $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ на число λ есть строка $\lambda x = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\}$. Соответствующее векторное пространство называется *арифметическим n -мерным пространством* и имеет стандартное обозначение $\mathbb{R}^n$ в действительном и $\mathbb{C}^n$ в комплексном случаях.

Тот же объект мы получим, если числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем записывать в виде столбца:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

При такой форме записи, если

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ то } v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda \in K$ — любое число. Тогда

$$\lambda v_1 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Более общо. Рассмотрим множество действительных (комплексных) функций, определенных на множестве пар $\{(i, j): i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$. Опишем такую функцию, сопоставив паре (i, j) число a_{ij} . Сведем это задание функции в матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сумму матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

определим как матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

на число λ определим как матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы получаем векторное пространство M_{mn} . В контексте введенных линейных операций оно тождественно арифметическому пространству $\mathbb{R}^{mn}$ или $\mathbb{C}^{mn}$, соответственно.

Векторным пространством является пространство P_n многочленов $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ степени не выше n .

§2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.

Лемма 2.1. Пусть $u + v_1 = w$ и $u + v_2 = w$. Тогда $v_1 = v_2$.

Доказательство. В соответствии с 2 существует такой вектор u_1 , что $u + u_1 = \vec{0}$. Прибавляя к правым и к левым частям равенств $u + v_1 = w$ и $u + v_2 = w$ вектор u_1 , получаем

$$\begin{aligned} u + v_1 + u_1 &= w + u_1, & u + v_2 + u_1 &= w + u_1, \\ (u + u_1) + v_1 &= w + u_1, & (u + u_1) + v_2 &= w + u_1, \\ \vec{0} + v_1 &= w + u_1, & \vec{0} + v_2 &= w + u_1, \end{aligned}$$

$$v_1 = w + u_1 = w + u_1 = v_2,$$

что и утверждалось.

Единственное (по лемме 2.1) решение уравнения $u + x = w$ обозначим $w - u$: $x = w - u$.

Так как $0u + 0u = (0 + 0)u = 0u$, то $0 \cdot u = \vec{0}$ для любого вектора $u \in L$.

Обозначение $\vec{0} - u$ сократим до $-u$. Так как $u + (-1)u = (+1 - 1)u = 0u = \vec{0}$, то $(-1)u = \vec{0} - u = -u$.

В соответствии со сказанным символы $u + (-v)$ и $u - v$ обозначают один и тот же элемент пространства L .

Пусть даны векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Выражение $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Линейная комбинация $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$, все коэффициенты которой равны нулю, то есть, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, называется *тривиальной*. Любая другая называется *нетривиальной*. То есть, линейная комбинация $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$, является *нетривиальной* тогда и только тогда, когда по крайней мере один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ отличен от нуля.

Тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору $\vec{0}$. Векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ называются *линейно независимыми*, если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов отлична от $\vec{0}$.

Очевидно, *система, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима*.

Лемма 2.2. *Если один из векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ равен линейной комбинации остальных, то система $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависима.*

Доказательство. Положим для определенности, вектор u_1 равен линейной комбинации векторов $u_2, \dots, u_k$, то есть, существуют такие числа $\lambda_2, \dots, \lambda_k$, что $u_1 = \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$. Тогда $(-1)u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \vec{0}$. Линейная комбинация $(-1)u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \vec{0}$ нетривиальна, так как коэффициент при u_1 отличен от нуля. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть система векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независима, а система векторов $v, u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависима. Тогда вектор v равен линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$.*

Доказательство. Так как система векторов $v, u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависима, то существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_0 v + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$, равная $\vec{0}$.

Если $\lambda_0 = 0$, то в силу нетривиальности этой линейной комбинации один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ отличен от нуля и мы имеем нетривиальную линейную комбинацию $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$, векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$, равную $\vec{0}$, что противоречит первоначальному предположению о линейной независимости векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$ и $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} u_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} u_k$, что и утверждалось.

Следствие. *Пусть система векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависима. Тогда либо $u_1 = \vec{0}$, либо при каком-то $i = 1, 2, \dots, k$ вектор u_i равен*

линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}$.

В самом деле, если $u_1 \neq \vec{0}$, рассмотрим множество A тех индексов j , для которых система векторов $u_1, u_2, \dots, u_j$ линейно зависима. Множество A непусто, так как ему принадлежит индекс k . В силу условия $u_1 \neq \vec{0}$ число 1 не принадлежит A , поэтому наименьший элемент i множества A больше 1. Поэтому система векторов $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}$ непуста и линейно независима, а система векторов $u_1, u_2, \dots, u_i$ линейно зависима. Лемма 2.3 дает требуемое.

Лемма 2.4. Пусть система векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависима. Тогда любая система векторов $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_l$, расширяющая систему, $u_1, u_2, \dots, u_k$ тоже линейно зависима.

Доказательство. В силу линейной зависимости системы $u_1, u_2, \dots, u_k$ найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, из которых по крайней мере одно отлично от нуля, что $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \vec{0}$. Тогда $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_l$ — нетривиальная линейная комбинация, равная $\vec{0}$. Лемма доказана.

Следствие 1. Всякая (непустая) подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Система, состоящая из одного нулевого вектора $\vec{0}$, линейно зависима: $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$, поэтому из леммы 2.4 вытекает

Следствие 2. Система векторов включающая нулевой вектор $\vec{0}$ линейно зависима.

Лемма 2.5. Пусть даны две системы векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ и $v_1, v_2, \dots, v_l$, причем векторы $v_1, v_2, \dots, v_l$ линейно независимы. Пусть каждый из векторов $v_1, v_2, \dots, v_l$ представим в виде линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$. Тогда $l \leq k$.

Доказательство. Допустим, что $l > k$. Зафиксируем представления

$$\begin{cases} v_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \dots + c_{1k}u_k \\ v_2 = c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \dots + c_{2k}u_k \\ \dots \\ v_{k+1} = c_{k+11}u_1 + c_{k+12}u_2 + \dots + c_{k+1k}u_k \end{cases}$$

Последний столбец матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k+11} & c_{k+12} & \dots & c_{k+1k} & 0 \end{pmatrix}$$

состоит из нулей, поэтому

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k+11} & c_{k+12} & \dots & c_{k+1k} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому ее строки линейно зависимы. То есть, составив из ее строк некоторую нетривиальную линейную комбинацию, мы получим нулевую строку. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ — коэффициенты этой нетривиальной линейной комбинации при первой, второй и т. д. $(k+1)$ -ой строках. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k+1} v_{k+1} = \\
 & = \lambda_1 (c_{11} u_1 + c_{12} u_2 + \dots + c_{1k} u_k) + \\
 & + \lambda_2 (c_{21} u_1 + c_{22} u_2 + \dots + c_{2k} u_k) + \\
 & + \dots + \lambda_{k+1} (c_{k+11} u_1 + c_{k+12} u_2 + \dots + c_{k+1k} u_k) = \\
 & = (\lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{21} + \dots + \lambda_{k+1} c_{k+11}) u_1 + \\
 & + (\lambda_1 c_{12} + \lambda_2 c_{22} + \dots + \lambda_{k+1} c_{k+12}) u_2 + \\
 & + \dots + (\lambda_1 c_{1k} + \lambda_2 c_{2k} + \dots + \lambda_{k+1} c_{k+1k}) u_k = \\
 & = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_k = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Это означает, что векторы $v_1, v_2, \dots, v_l$ линейно зависимы, что противоречит первоначальным предположениям. Таким образом, сделанное нами допущение, что $l > k$, привело нас к противоречию и лемма доказана.

§3. Подпространство векторного пространства. Линейная оболочка системы векторов.

Непустое подмножество M векторного пространства L называется *подпространством* пространства L , если

1. Для любых векторов u и v из M их сумма $u + v$ также принадлежит M .
2. Для любого вектора u из M и любого числа $\lambda \in K$ вектор λu принадлежит M .

В этом случае множество M также является векторным пространством над K . То есть, выполнены все условия 1-8 §1. То, что операции сложения и умножения на числа удовлетворяют условиям 2-8 вытекает из того, что векторным пространством является множество L . При этом из условий 1-2 этого параграфа следует, что результаты операций принадлежат M и, следовательно, условия 2-8 выполнены уже для M .

Покажем выполнение условия 1 §1. Множество M непусто. Пусть $u \in M$. Тогда в силу условия 2 этого параграфа и замечаний §2 $\vec{0} = 0 \cdot u \in M$, что и требовалось.

Пусть N — подмножество линейного пространства L . Множество $L(N)$ векторов пространства L , представимых в виде линейных комбинаций элементов N называется *линейной оболочкой* множества N .

Сумма двух линейных комбинаций элементов множества N является линейной комбинацией элементов множества N . Произведение линейной комбинации элементов множества N на число из K является линейной комбинацией элементов множества N . Поэтому *линейная оболочка $L(N)$ множества N является подпространством пространства L .*

§4. Базис векторного пространства. Координаты векторов.

Пусть N — подмножество линейного пространства L . Система N называется базисом линейного пространства L , если

1. Система N линейно независима.
2. Любой вектор из L может быть представлен в виде линейной комбинации элементов множества N .

Во всех наших дальнейших построениях мы будем предполагать, что пространство L обладает (хотя бы одним) **конечным** базисом. В этом случае мы будем говорить, что пространство L *конечномерно*.

Пусть N — конечный базис линейного пространства L , N_1 какая-то линейно независимая система векторов пространства L . По лемме 2.5 *число векторов в N_1 не больше числа векторов в N .*

Как следствие отмеченного получаем: *Если N и N_1 — два базиса конечномерного линейного пространства L , то число векторов в N равно числу векторов в N_1 .*

Это общее число векторов в базисах конечномерного линейного пространства L называется *размерностью* пространства L и обозначается $\dim L$.

Лемма 4.1. *Пусть $u_1, u_2, \dots, u_k$ — базис подпространства L_1 векторного пространства L и вектор $v \in L$ не принадлежит L_1 . Тогда система векторов $v, u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независима.*

Доказательство. Допустим, что система векторов $v, u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно зависима. По лемме 2.3. вектор v представляется в виде линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ и поэтому принадлежит подпространству L_1 , что противоречит первоначальному предположению. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть $L_1 \neq L$ — подпространство векторного пространства L . Тогда размерность L_1 меньше размерности L .*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_k$ — базис подпространства L_1 . Возьмем любой вектор $v \in L \setminus L_1$. По лемме 4.1 система $v, u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независима. По лемме 2.5 число $k + 1$ элементов этой системы не превосходит размерности пространства L , что и дает требуемое. Лемма доказана.

Базисы на прямой, на плоскости, в пространстве рассматривались в курсе аналитической геометрии.

Стандартный базис арифметического $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) состоит из векторов $e_i = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, где на i -том месте стоит единица, а на остальных местах — нули.

Базис в пространстве P_n многочленов $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ степени не выше n составляют одночлены $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ($\varphi_0(x) \equiv 1$).

Пусть N — подмножество линейного пространства L . Множество $N_0 \subseteq N$ назовем *максимальной линейно независимой системой векторов множества N* , если

1. Система N_0 линейно независима.
2. Любой вектор из N может быть представлен в виде линейной комбинации элементов множества N_0 .

В смысле этого определения *базис* — это *максимальная линейно независимая система векторов пространства L* .

Лемма 4.3. *Любую линейно независимую систему векторов множества $N \subseteq L$ можно дополнить до максимальной.*

Доказательство. I. Покажем сначала, что любую не максимальную линейно независимую систему векторов множества N можно пополнить одним вектором с сохранением линейно независимости.

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_k$ — не максимальная линейно независимая система векторов множества N . В силу не максимальности системы $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ существует вектор $v \in N \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ при котором система $v, u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независима.

II. В соответствии с I последовательно пополняем исходную систему векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ векторами $v_1, v_2, \dots$ с сохранением линейно независимости.

По лемме 2.5, не позднее, чем когда число векторов достигнет размерности пространства, очередной шаг станет невозможным. Лемма доказана.

Следствие. *Любую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства L можно дополнить до базиса.*

Лемма 4.4. *Пусть дана линейно независимая система векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$, вектор v представим в виде линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$. Тогда представление вектора v в виде линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ единственно.*

Доказательство. Пусть $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$ и $v = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_k u_k$. Наша цель — доказать, что $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_k = \mu_k$.

Вычитая из равенства $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$ равенство $v = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_k u_k$, получаем: $\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)u_1 + (\lambda_2 - \mu_2)u_2 + \dots + (\lambda_k - \mu_k)u_k$.

Но система векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независима, поэтому коэффициенты в линейной комбинации $(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + (\lambda_2 - \mu_2)u_2 + \dots + (\lambda_k - \mu_k)u_k$ равны нулю: $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \lambda_2 - \mu_2 = 0, \dots, \lambda_k - \mu_k = 0$, что и дает требуемое. Лемма доказана.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — какой-то (то есть, один из возможных) базис n -мерного векторного пространства L . Тогда любой вектор u пространства L может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этого базиса:

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n.$$

В силу леммы 4.4 такое представление единственно. Коэффициенты $x^1, x^2, \dots, x^n$ этой линейной комбинации называются *координатами* вектора u в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Обычно базисные векторы пронумерованы. Соответствующую нумерацию получают и координаты векторов — первая, вторая и т.д..

Когда ясно из текста, о каком базисе идет речь, запись $v = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ означает, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются координатами вектора v в этом базисе.

Иногда координаты вектора выписываются в столбец:

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Координаты суммы векторов

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n.$$

и

$$v = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \dots + y^n e_n$$

равны суммам соответствующих координат слагаемых:

$$u + v = (x^1 + y^1)e_1 + (x^2 + y^2)e_2 + \dots + (x^n + y^n)e_n.$$

Координаты произведения вектора

$$u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$$

на число $\lambda \in K$ равны произведениям соответствующих координат вектора u на число λ :

$$\lambda u = (\lambda x^1)e_1 + (\lambda x^2)e_2 + \dots + (\lambda x^n)e_n.$$

§5. Ранг системы векторов.

Лемма 5.1. Пусть $N_0 \subseteq N$ — подмножества линейного пространства L и каждый вектор из N представим в виде линейной комбинации векторов из N_0 . Тогда линейные оболочки $L(N_0)$ и $L(N)$ множеств N_0 и N совпадают.

Доказательство. I. Включение $L(N_0) \subseteq L(N)$ очевидно вытекает из включения $N_0 \subseteq N$: линейная комбинация векторов из N_0 является одновременно линейной комбинацией векторов из N .

II. Включение $L(N) \subseteq L(N_0)$ также очевидно, ибо при подстановке в линейную комбинацию векторов из N их представлений в виде линейных

комбинаций векторов из N_0 мы получаем линейную комбинацию векторов из N_0 . Лемма доказана.

Лемма 5.2. Пусть N — подмножество линейного пространства L , $N_0 \subseteq N$ — максимальная линейно независимая системой векторов множества N . Тогда число векторов в N_0 равно размерности $\dim L(N)$ линейной оболочки $L(N)$ множества N .

Доказательство. По лемме 5.1 $L(N_0) = L(N)$. Поэтому $\dim L(N_0) = \dim L(N)$.

Но система N_0 линейно независима, поэтому составляет базис в своей линейной оболочке $L(N_0)$ и число элементов в N_0 равно размерности $L(N_0)$, из чего вытекает доказываемое. Лемма доказана.

Следствие. Пусть N — подмножество линейного пространства L . Число элементов во всех максимальных линейно независимых системах векторов множества N одинаково и равно размерности $\dim L(N)$ линейной оболочки $L(N)$ множества N .

Это общее число элементов в максимальных линейно независимых системах векторов множества N называется *рангом множества N* и обозначается $\text{Rang } N$.

Теперь из леммы 5.1 вытекает

Следствие. В обозначениях леммы 5.1 ранги множеств N и N_0 совпадают.

Верно и обратное:

Лемма 5.3. Пусть $N_0 \subseteq N$ — подмножества линейного пространства L и ранги N и N_0 совпадают. Тогда $N \subseteq L(N_0)$, то есть, каждый вектор из N представим в виде линейной комбинации векторов из N_0 .

Доказательство. Зафиксируем максимальную линейно независимую систему $\{u_1, \dots, u_r\}$ векторов из N_0 . Число r ее элементов равно рангу множества N_0 .

Допустим, что найдется элемент v множества N , не представимый в виде линейной комбинации векторов $u_1, \dots, u_r$. Тогда в N есть система линейно независимых векторов $v, u_1, \dots, u_r$ и ранг N оказывается не меньше $r+1$, что противоречит предположению о равенстве рангов N_0 и N . Лемма доказана.

Из следствия леммы 5.1 и леммы 5.3 вытекает

Лемма 5.4. Пусть $N_0 \subseteq N$ — подмножества линейного пространства L . Ранги N и N_0 совпадают тогда и только тогда, когда $N \subseteq L(N_0)$, то есть, когда каждый вектор из N представим в виде линейной комбинации векторов из N_0 .

Применив это утверждение к столбцам матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

и столбцу

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

получаем:

Теорема 5.1 (Кронекера-Капелли). Система

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = b_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда ранги матриц

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & b_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

совпадают.

При определении ранга конечной системы векторов используют “элементарные преобразования”, один из шагов которых состоит в исключении из системы вектора, представимого в виде линейной комбинации остальных. В силу следствия леммы 5.1 при этом ранг системы не меняется.

Другой шаг состоит в замене одного из векторов u исследуемой системы N_0 на его сумму v с линейной комбинацией $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$ других членов системы N_0 . Этот шаг можно разбить на два шага. Первый шаг будет состоять в добавлении вектора $v = u + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$. При этом ранг получающейся системы $N_1 = N_0 \cup \{v\}$ совпадает с рангом N_0 по лемме 5.1. Второй шаг будет состоять в удалении из N_1 вектора $u = v - (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k)$, равного линейной комбинации других векторов системы N_1 . При этом ранг получающейся системы $N_2 = N_1 \setminus \{u\}$ совпадает с рангом N_1 по лемме 5.1 и, следовательно, совпадает с рангом N_0 .

§6. Пересечение и сумма подпространств.

Пусть L_α , $\alpha \in A$ — подпространства линейного пространства L .

Покажем, что их пересечение $\cap\{L_\alpha: \alpha \in A\}$ также является подпространством пространства L :

1. Если $u, v \in \cap\{L_\alpha: \alpha \in A\}$, то $u + v \in L_\alpha$ при любом $\alpha \in A$, поэтому $u + v \in \cap\{L_\alpha: \alpha \in A\}$.

2. Если $u \in \cap\{L_\alpha: \alpha \in A\}$ и $\lambda \in K$, то $\lambda u \in L_\alpha$ при любом $\alpha \in A$, поэтому $\lambda u \in \cap\{L_\alpha: \alpha \in A\}$.

Пересечение подпространств всегда непусто, оно содержит нулевой вектор $\vec{0} \in L$.

Сумма семейства L_α , $\alpha \in A$ подпространств пространства L определяется как линейная оболочка их объединения. Она также является подпространством пространства L (как линейная оболочка).

В частности, сумма двух подпространств L_1 и L_2 определяется как множество $L_1 + L_2 = \{u + v: u \in L_1, v \in L_2\}$.

Сравним размерности подпространств L_1 и L_2 с размерностями их пересечения $L_1 \cap L_2$ и суммы $L_1 + L_2$.

Для этого возьмем сначала любой базис $e_1, e_2, \dots, e_i$ их пересечения $L_1 \cap L_2$.

По лемме 4.3 систему линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_i$ пространства L_1 можно дополнить до базиса в L_1 , добавив векторы $f_1, f_2, \dots, f_j$.

Опять по лемме 4.3 систему линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_i$ пространства L_2 можно дополнить до базиса в L_2 , добавив векторы $g_1, g_2, \dots, g_k$.

Векторы $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j, g_1, g_2, \dots, g_k$ принадлежат линейному пространству $L_1 + L_2$, поэтому любой вектор, представимый в виде их линейной комбинации также принадлежит $L_1 + L_2$.

Покажем, что любой вектор пространства $L_1 + L_2$ представим в виде линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j, g_1, g_2, \dots, g_k$.

В самом деле, если $w \in L_1 + L_2$, то найдутся такие векторы $u \in L_1$ и $v \in L_2$, что $w = u + v$.

Так как $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j$ — базис в L_1 , то вектор u представим в виде их линейной комбинации:

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_i e_i + \lambda'_1 f_1 + \lambda'_2 f_2 + \dots + \lambda'_j f_j.$$

Так как $e_1, e_2, \dots, e_i, g_1, g_2, \dots, g_k$ — базис в L_2 , то вектор v представим в виде их линейной комбинации:

$$v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_i e_i + \mu'_1 g_1 + \mu'_2 g_2 + \dots + \mu'_k g_k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} w = u + v &= (\lambda_1 + \mu_1)e_1 + (\lambda_2 + \mu_2)e_2 + \dots + (\lambda_i + \mu_i)e_i + \\ &+ \lambda'_1 f_1 + \lambda'_2 f_2 + \dots + \lambda'_j f_j + \mu'_1 g_1 + \mu'_2 g_2 + \dots + \mu'_k g_k. \end{aligned}$$

Таким образом, действительно любой вектор пространства $L_1 + L_2$ представим в виде линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j, g_1, g_2, \dots, g_k$.

Покажем теперь, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j, g_1, g_2, \dots, g_k$ линейно независимы.

Рассмотрим любую их линейную комбинацию, равную $\vec{0}$:

$$(6.1) \quad \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_i e_i + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \cdots + \mu_j f_j + \\ + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + \cdots + \nu_k g_k = \vec{0}.$$

Тогда векторы

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_i e_i + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \cdots + \mu_j f_j$$

и

$$v = -\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - \cdots - \nu_k g_k$$

равны. Но являясь линейной комбинацией векторов $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j$, вектор u принадлежит L_1 . Вектор v является линейной комбинацией векторов $g_1, g_2, \dots, g_k$ и поэтому принадлежит L_2 .

Таким образом, вектор $u = v$ принадлежит пересечению $L_1 \cap L_2$ и поэтому представляется в виде линейной комбинации векторов базиса пересечения:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_i e_i.$$

Мы имеем два представления вектора $u = v$ в виде линейной комбинации линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j$:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_i e_i + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \cdots + \mu_j f_j$$

и

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_i e_i + 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \cdots + 0 \cdot f_j.$$

По лемме 4.4 их соответствующие коэффициенты совпадают: $\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \dots, \lambda_i = \alpha_i, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \dots, \mu_j = 0$.

Теперь мы имеем два представления вектора $u = v \in L_1 \cap L_2$ в виде линейной комбинации линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_i, g_1, g_2, \dots, g_k$:

$$v = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_i + (-\nu_1)g_1 + (-\nu_2)g_2 + \cdots + (-\nu_k)g_k$$

и

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_i e_i + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \cdots + \mu_j f_j = \\ = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_i e_i + 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \cdots + 0 \cdot f_j = \\ = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_i e_i + 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + \cdots + 0 \cdot g_k.$$

По лемме 4.4 их соответствующие коэффициенты совпадают: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_i = 0, \nu_1 = 0, \nu_2 = 0, \dots, \nu_k = 0$.

Таким образом, наша линейная комбинация (6.1) оказалась тривиальной. В силу произвольности взятой линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j, g_1, g_2, \dots, g_k$ это означает линейную независимость векторов $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j, g_1, g_2, \dots, g_k$.

Таким образом, $\dim L_1 = i + j$, $\dim L_2 = i + k$, $\dim(L_1 \cap L_2) = i$, $\dim(L_1 + L_2) = i + j + k$,

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 + L_2) \quad (= 2i + j + k)$$

Сумма подпространств L_1 и L_2 пространства L называется *прямой суммой*, если $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$. В этом случае сумму подпространств принято обозначать $L_1 \oplus L_2$. В случае прямой суммы $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$ и только что доказанная формула приобретает вид:

$$\dim(L_1 \oplus L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

Замечание 6.1. Для практического распознавания прямой суммы полезно следующее замечание.

Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_i, f_1, f_2, \dots, f_j$ линейно независимы. Тогда пересечение линейных оболочек $L(e_1, e_2, \dots, e_i)$ и $L(f_1, f_2, \dots, f_j)$ тривиально, то есть, состоит из одного нулевого вектора: $L(e_1, e_2, \dots, e_i) \cap L(f_1, f_2, \dots, f_j) = \{\vec{0}\}$.

Замечание 6.2. Пусть L_1 подпространство линейного пространства L . Тогда существует такое подпространство L_2 пространства L , что $L = L_1 \oplus L_2$.

В самом деле, пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_i$ составляют базис пространства L_1 . Добавляя векторы $f_1, f_2, \dots, f_j$, дополним его до базиса пространства L и положим $L_2 = L(f_1, f_2, \dots, f_j)$. В силу замечания 6.1 мы имеем требуемое.

Пусть опять $L = L_1 \oplus L_2$. Тогда каждый вектор u пространства L однозначно представляется в виде суммы $u = v + w$, где $v \in L_1, w \in L_2$.

Вектор v называется *проекцией* вектора u на подпространство L_1 , параллельно подпространству L_2 . Обозначим ее $\pi(u)$: $v = \pi(u)$.

Если $u_1 = v_1 + w_1$ — аналогичное представление для вектора u_1 , то $u + u_1 = (v + v_1) + (w + w_1)$ и $(v + v_1) \in L_1, (w + w_1) \in L_2$. Поэтому $\pi(u + u_1) = v + v_1 = \pi(u) + \pi(u_1)$. Аналогично, для $\lambda \in K$ имеем: $\lambda u = \lambda v + \lambda w$ и $\lambda v \in L_1, \lambda w \in L_2$. Поэтому $\pi(\lambda u) = \lambda v = \lambda \pi(u)$. Таким образом, проекция π является линейным отображением.

Положение подпространств L_1 и L_2 в этих рассмотренных симметрично, поэтому вектор w (из представления $u = v + w$) является проекцией вектора u на подпространство L_2 параллельно подпространству L_1 .

Переходя от двух подпространств к их любому количеству сумму $\oplus\{L_\alpha: \alpha \in A\}$ семейства $L_\alpha, \alpha \in A$, подпространств пространства L называем *прямой*, если при любом $\alpha_0 \in A$ имеем: $L_{\alpha_0} \cap (L(\{L_\alpha: \alpha \in A, \alpha \neq \alpha_0\})) = \{\vec{0}\}$.

При этом, очевидно, если сумма семейства L_α , $\alpha \in A$ подпространств пространства L является прямой и $B \subseteq A$, то сумма семейства L_α , $\alpha \in B$ является прямой.

Прямая сумма конечного семейства $L_1, L_2, \dots, L_k$ обозначается $L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$.

§7. Переход к новой системе координат. Параметрические уравнения подпространства.

Пусть в пространстве L зафиксирован базис $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Пусть в подпространстве $L_1 \subseteq L$ зафиксирован свой базис

$$f_1 = c_1^1 e_1 + c_1^2 e_2 + \dots + c_1^n e_n,$$

$$f_2 = c_2^1 e_1 + c_2^2 e_2 + \dots + c_2^n e_n,$$

...

$$f_k = c_k^1 e_1 + c_k^2 e_2 + \dots + c_k^n e_n.$$

Вектор u подпространства L_1 представим в виде линейной комбинации

$$(1) \quad u = y^1 f_1 + y^2 f_2 + \dots + y^k f_k.$$

Будучи вектором пространства L вектор u представим в виде линейной комбинации

$$(2) \quad u = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n.$$

Подставляя в (1) вместо $f_1, f_2, \dots, f_k$ их разложения по $e_1, e_2, \dots, e_n$, получаем:

$$\begin{aligned} u &= y^1 (c_1^1 e_1 + c_1^2 e_2 + \dots + c_1^n e_n) + \\ &+ y^2 (c_2^1 e_1 + c_2^2 e_2 + \dots + c_2^n e_n) + \dots + \\ &+ y^k (c_k^1 e_1 + c_k^2 e_2 + \dots + c_k^n e_n) = \\ &= (c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \dots + c_k^1 y^k) e_1 + \\ &+ (c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 + \dots + c_k^2 y^k) e_2 + \dots + \\ &+ (c_1^n y^1 + c_2^n y^2 + \dots + c_k^n y^k) e_n. \end{aligned}$$

Сравнивая это с (2), в силу единственности разложения вектора по базису получаем

$$\begin{cases} x^1 = c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \dots + c_k^1 y^k \\ x^2 = c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 + \dots + c_k^2 y^k \\ \dots \\ x^n = c_1^n y^1 + c_2^n y^2 + \dots + c_k^n y^k \end{cases}$$

— параметрические уравнения подпространства L_1 .

При $k = n$ векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$ составляют базис пространства L и мы как бы имеем “параметрические уравнения” самого пространства L . На самом деле в этом случае мы получаем формулы преобразования координат векторов при переходе от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$:

$$\begin{cases} x^1 = c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \dots + c_n^1 y^n \\ x^2 = c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 + \dots + c_n^2 y^n \\ \dots \\ x^n = c_1^n y^1 + c_2^n y^2 + \dots + c_n^n y^n. \end{cases}$$

§8. Ориентация.

Пусть в пространстве L зафиксированы базис A_1 : $e_1, e_2, \dots, e_n$, базис A_2 : $f_1, f_2, \dots, f_n$ и базис A_3 : $g_1, g_2, \dots, g_n$.

В соответствии с заключительным замечанием предыдущего параграфа координаты точек в этих базисах связаны системами

$$\begin{cases} x^1 = c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 + \dots + c_n^1 y^n \\ x^2 = c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 + \dots + c_n^2 y^n \\ \dots \\ x^n = c_1^n y^1 + c_2^n y^2 + \dots + c_n^n y^n \end{cases}$$

при переходе от базиса A_1 к базису A_2 и

$$\begin{cases} y^1 = d_1^1 z^1 + d_2^1 z^2 + \dots + d_n^1 z^n \\ y^2 = d_1^2 z^1 + d_2^2 z^2 + \dots + d_n^2 z^n \\ \dots \\ y^n = d_1^n z^1 + d_2^n z^2 + \dots + d_n^n z^n \end{cases}$$

при переходе от базиса A_2 к базису A_3 . В матричной форме они могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}$$

при переходе от базиса A_1 к базису A_2 и

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & \dots & d_n^1 \\ d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1^n & d_2^n & \dots & d_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \dots \\ z^n \end{pmatrix}$$

при переходе от базиса A_2 к базису A_3 или в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}$$

при переходе от базиса A_1 к базису A_2 и

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \dots \\ z^n \end{pmatrix},$$

где

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & \dots & d_n^1 \\ d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1^n & d_2^n & \dots & d_n^n \end{pmatrix}$$

при переходе от базиса A_2 к базису A_3 . Делая подстановку, получаем:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = CD \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \dots \\ z^n \end{pmatrix}.$$

Матрицы связаны с базисами однозначным образом. Поэтому матрица CD является матрицей преобразования координат при переходе от базиса A_1 к базису A_3 .

Два базиса A_1 и A_3 называются *одинаково ориентированными*, если определитель соответствующей матрицы преобразования координат положителен.

Отношение одинаковой ориентированности двух базисов является отношением эквивалентности, то есть,

- 1) любой базис одинаково ориентирован с собой, ибо в этом случае матрица преобразования координат является единичной матрицей E и ее определитель равен 1,
- 2) если базис A_2 одинаково ориентирован с базисом A_1 , то базис A_1 одинаково ориентирован с базисом A_2 , ибо если C — матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_2 , D — матрица преобразования координат при переходе от A_2 к A_1 , то CD

— матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_1 и поэтому $CD = E$, $\det C \det D = \det E = 1$ — отсюда следует совпадение знаков $\det C$ и $\det D$,

3) если базис A_2 одинаково ориентирован с базисом A_1 и базис A_3 одинаково ориентирован с базисом A_2 , то базис A_3 одинаково ориентирован с базисом A_1 , ибо если C — матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_2 , D — матрица преобразования координат при переходе от A_2 к A_3 , то CD — матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_3 и $\det CD = \det C \det D > 0$.

Поэтому все базисы разбиваются на классы эквивалентности. Два базиса попадают в один класс тогда и только тогда, когда они одинаково ориентированы.

Интересно также свойство

3') если базис A_2 не ориентирован одинаково с базисом A_1 и базис A_3 не ориентирован одинаково с базисом A_2 , то базис A_3 ориентирован одинаково с базисом A_1 , ибо если C — матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_2 , D — матрица преобразования координат при переходе от A_2 к A_3 , то $\det C < 0$, $\det D < 0$, $\det CD = \det C \det D > 0$.

Поэтому классов одинаково ориентированных базисов только два. *Выбор ориентации* состоит в присваивании одному из них названия класса *положительно ориентированных базисов*. Тогда другой класс получает название класса *отрицательно ориентированных базисов*. Или, если названия не фиксируются, то просто говорят, что базисы из разных классов *ориентированы противоположно*.