версия 23.03.2019

Просьба сообщить о всех замеченных опечатках, описках, возникших вопросах, замечаниях и т.д. на адрес vvfil@mech.math.msu.su

Глава 12.

Кососимметрические тензоры и внешнее произведение.

§1. Кососимметрические тензоры и альтернирование. Поливекторы и внешние формы.

Мы будем рассматривать однородные тензорные произведения

$$T_0^r = L \otimes L \otimes \cdots \otimes L,$$

либо

$$T_r^0 = L^* \otimes L^* \otimes \cdots \otimes L^*.$$

Как мы помним числа r и 0 называются *валентностями* элементов этих произведений. Так как второе значение 0 фиксировано, то мы позволим себе про него забыть и называть *валентностью* или *порядком* элементов этих пространств число r .

В обоих случаях мы можем переставлять сомножители в соответствующих простых тензорах, не выходя за пределы рассматриваемого тензорного произведения. То есть, мы можем определить действие перестановки σ числового множества $\{1, 2, \dots, r\}$ на простой тензор

$$u = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r,$$

положив

$$\varphi_\sigma(u) = u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(r)}.$$

Продолжив по линейности действие φ_σ на формальные суммы простых тензоров, замечаем, что равные формальные суммы простых тензоров переходят в равные формальные суммы. Тем самым нами определен гомоморфизм $\varphi_\sigma : T \rightarrow T$, где $T = T_0^r$ или, соответственно, $T = T_r^0$.

Тензор $u \in T$ называется *симметрическим*, если $\varphi_\sigma(u) = u$, для любой перестановки σ .

Тензор $u \in T$ называется *кососимметрическим*, если $\varphi_\sigma(u) = (-1)^\sigma u$, для любой перестановки σ .

Примером кососимметрического тензора является тензор $u_1 \otimes u_2 - u_2 \otimes u_1$.

Альтернативой тензора $t \in T$ назовем тензор

$$\text{Alt}(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} (-1)^\sigma \varphi_\sigma(t),$$

где суммирование идет по всем перестановкам σ числового множества $\{1, 2, \dots, r\}$. Будучи линейной комбинацией гомоморфизмов, заданное этой формулой *альтернирование* $\text{Alt} : T \rightarrow T$ является гомоморфизмом. Поэтому образ G этого гомоморфизма является подпространством пространства T .

Если тензор t является кососимметрическим, то для любой перестановки σ

$$(-1)^\sigma \varphi_\sigma(t) = (-1)^\sigma \cdot (-1)^\sigma t = t.$$

Так как число перестановок равно $r!$, то для кососимметрического тензора t

$$\text{Alt}(t) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} (-1)^\sigma \varphi_\sigma(t) = t.$$

С другой стороны, если $u = \text{Alt}(t)$, то для любой перестановки δ

$$(1.1) \quad \varphi_\delta(u) = \varphi_\delta(\text{Alt}(t)) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} (-1)^\sigma \varphi_\delta(\varphi_\sigma(t)) =$$

$$= (-1)^\delta \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} (-1)^{\delta \cdot \sigma} \varphi_{\delta}(\varphi_{\sigma}(t)) = (-1)^\delta \text{Alt}(t) = (-1)^\delta u.$$

Таким образом, пространство G состоит из кососимметрических тензоров и при альтернировании каждый его элемент переходит в себя.

Кососимметрические тензоры пространства

$$T_0^r = L \otimes L \otimes \cdots \otimes L$$

называются *поливекторами*. Кососимметрические тензоры пространства

$$T_r^0 = L^* \otimes L^* \otimes \cdots \otimes L^*$$

называются *внешними формами*.

С точки зрения тензорной структуры разницы между ними нет и поэтому любой факт, формулируемый на языке тензорной структуры и верный для одного из этих пространств, верен и для другого: он верен просто для соответствующего пространства тензоров.

§2. Тензоры кососимметрических полилинейных функций (внешние формы).

Как мы помним, тензорное произведение

$$T_r^0 = L^* \otimes L^* \otimes \cdots \otimes L^*$$

дает описание пространства полилинейных функций от r аргументов

$$L \times L \times \cdots \times L \rightarrow K.$$

Не будем в обозначениях различать тензор и соответствующую ему полилинейную функцию.

Пусть σ — перестановка числового множества $\{1, 2, \dots, r\}$,

$$u = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r \in T_r^0,$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_r) \in L \times L \times \dots \times L.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(u)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(r)}) &= \\ &= u_{\sigma(1)}(v_{\sigma(1)}) \cdot u_{\sigma(2)}(v_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot u_{\sigma(r)}(v_{\sigma(r)}) = \\ &= u_1(v_1) \cdot u_2(v_2) \cdot \dots \cdot u_r(v_r) = u(v_1, v_2, \dots, v_r). \end{aligned}$$

Перепишем полученное равенство в другой форме, обозначив $v_i = w_{\sigma(i)}$ и через δ перестановку, обратную к перестановке σ :

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(u)(v_1, v_2, \dots, v_r) &= \varphi_\sigma(u)(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, \dots, w_{\sigma(r)}) = \\ &= u(w_1, w_2, \dots, w_r) = u(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)}, \dots, v_{\delta(r)}). \end{aligned}$$

По линейности эта формула распространяется на произвольный тензор $t \in T_r^0$:

$$\varphi_\sigma(t)(v_1, v_2, \dots, v_r) = t(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)}, \dots, v_{\delta(r)}).$$

Тензор $t \in T_r^0$ кососимметричен в смысле определения предыдущего параграфа тогда и только тогда, когда $\varphi_\sigma(t) = (-1)^\sigma t$ для любой перестановки σ множества $\{1, 2, \dots, r\}$. В силу тождественности линейных структур T_r^0 и пространства полилинейных функций это имеет место тогда и только тогда, когда полилинейные функции $\varphi_\sigma(t)$ и $(-1)^\sigma t$ совпадают. В силу сказанного выше

$$\varphi_\sigma(t)(v_1, v_2, \dots, v_r) = t(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)}, \dots, v_{\delta(r)}),$$

поэтому

$$(-1)^\sigma t(v_1, v_2, \dots, v_r) = t(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)}, \dots, v_{\delta(r)}),$$

а так как $(-1)^\sigma = (-1)^\delta$, то

$$t(v_{\delta(1)}, v_{\delta(2)}, \dots, v_{\delta(r)}) = (-1)^\delta t(v_1, v_2, \dots, v_r),$$

что означает косую симметрию t как полилинейной функции.

Как мы помним, кососимметрические тензоры из пространства

$$T_r^0 = L^* \otimes L^* \otimes \cdots \otimes L^*$$

называются внешними формами. Таким образом, полилинейная функция кососимметрична тогда и только тогда, когда ее тензор является внешней формой.

Примером полилинейной кососимметрической функции является функция $\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r)$. Посчитаем ее значения на наборе аргументов $(v_1, v_2, \dots, v_r) \in L \times L \times \cdots \times L$:

$$\begin{aligned} & \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r)(v_1, v_2, \dots, v_r) = \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a(u_{\sigma(1)}, v_1) a(u_{\sigma(2)}, v_2) \cdots a(u_{\sigma(r)}, v_r) = \\ &= \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} a(u_1, v_1) & a(u_1, v_2) & \cdots & a(u_1, v_r) \\ a(u_2, v_1) & a(u_2, v_2) & \cdots & a(u_2, v_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a(u_r, v_1) & a(u_r, v_2) & \cdots & a(u_r, v_r) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где $a(u, v)$ обозначает свертку пространств L и L^* .

Лемма 2.1. *Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_r$ линейно зависимы, то $\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r) = 0$.*

Доказательство сводится к ссылке на следствие леммы 8.3.2.

Лемма 2.2. *Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_r$ линейно независимы, то $\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r) \neq 0$.*

Доказательство в силу изоморфности соответствующих структур достаточно провести в предположении, что $u_1, u_2, \dots, u_r \in L^*$, и убедиться, что полилинейная функция, представляемая тензором $\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r)$, не равна нулю.

Так как векторы $u_1, u_2, \dots, u_r$ линейно независимы, то мы можем дополнить их до базиса $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n$ пространства L^* . Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ — взаимный базис пространства L .

Тогда

$$\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r)(v_1, v_2, \dots, v_r) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} a(u_1, v_1) & a(u_1, v_2) & \dots & a(u_1, v_r) \\ a(u_2, v_1) & a(u_2, v_2) & \dots & a(u_2, v_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(u_r, v_1) & a(u_r, v_2) & \dots & a(u_r, v_r) \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{r!} \neq 0,
\end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ — базис пространства L^* . Так как тензорные произведения $u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r}$ составляют базис пространства

$$T_r^0 = L^* \otimes L^* \otimes \dots \otimes L^*,$$

а Alt есть гомоморфизм, то линейная оболочка образов $\text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r})$ тензоров $u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r}$ совпадает с пространством G .

Если в тензоре $u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r}$ один из сомножителей повторяется, то тензор $\text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r})$ равен нулю. Про такие тензоры забудем.

Если тензор $u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r}$ получается из тензора $u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes \dots \otimes u_{j_r}$ перестановкой σ сомножителей, то тензор $\text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r})$ получается из тензора $\text{Alt}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes \dots \otimes u_{j_r})$ умножением на $(-1)^\sigma$.

Поэтому линейная оболочка не изменится, если мы ограничимся рассмотрением тензоров $\text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r})$, удовлетворяющих дополнительному условию $i_1 < i_2 < \dots < i_r$.

Лемма 2.3. *В указанных обозначениях тензоры $\text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r})$, $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, составляют базис пространства G .*

Доказательство. Нам остается проверить, что тензоры $\text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r})$, $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, линейно независимы.

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\sum \left\{ a_{i_1 i_2, \dots, i_r} \text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r}) : i_1 < i_2 < \dots < i_r \right\}$$

таких тензоров.

Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ — взаимный базис пространства L .

Посчитаем значение соответствующей полилинейной функции на наборе аргументов $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r} \in L, j_1 < j_2 < \dots < j_r$:

$$\sum \left\{ a_{i_1 i_2, \dots, i_r} \text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r})(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}) : i_1 < i_2 < \dots < i_r \right\}.$$

Если наборы индексов $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ различны, то в определителе, используемом для подсчета $\text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r})(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r})$ одна из строк является нулевой и соответствующее слагаемое в рассматриваемой сумме также является нулевым. Таким образом

$$\begin{aligned} \sum \left\{ a_{i_1 i_2, \dots, i_r} \text{Alt}(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_r})(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}) : i_1 < i_2 < \dots < i_r \right\} = \\ a_{i_1 i_2, \dots, i_r} \text{Alt}(u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes \dots \otimes u_{j_r})(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}) = \\ = \frac{a_{j_1 j_2, \dots, j_r}}{r!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{a_{j_1 j_2, \dots, j_r}}{r!}. \end{aligned}$$

Если тензор

$$\sum \left\{ a_{i_1 i_2, \dots, i_r} \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_r) : i_1 < i_2 < \dots < i_r \right\}$$

нулевой, то нулевой является соответствующая полилинейная функция и поэтому $a_{j_1 j_2, \dots, j_r} = 0$. Ввиду произвольности набора $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ сказанное означает, что линейная комбинация

$$\sum \left\{ a_{i_1 i_2, \dots, i_r} \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_r) : i_1 < i_2 < \dots < i_r \right\}$$

является тривиальной. То есть, только тривиальная линейная комбинация указанных тензоров равна нулю. Поэтому система

тензоров $\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r)$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, является линейно независимой, что и требовалось. Лемма доказана.

$$\begin{aligned} & \S 3. \text{Alt}((u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p) \otimes \text{Alt}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q) \otimes \\ & \quad \otimes (w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r)) = \\ = & \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r). \end{aligned}$$

Левую часть равенства, фигурирующего в названии параграфа, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & \text{Alt} \left(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes \left(\frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)} \right) \otimes \right. \\ & \quad \left. \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r \right) = \\ = & \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \text{Alt} (u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)} \otimes \\ & \quad \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r). \end{aligned}$$

В силу формулы (1.1)

$$\begin{aligned} & (-1)^{\sigma} \text{Alt} (u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)} \otimes \\ & \quad \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r) = \\ = & \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r), \end{aligned}$$

поэтому в сумме

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \text{Alt} (u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)} \otimes \\ & \quad \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r). \end{aligned}$$

$q!$ раз повторяется слагаемое

$$= \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \text{Alt} (u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)} \otimes \\
& \quad \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r) = \\
& = q! \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r) \\
& \text{и} \\
& \text{Alt} \left(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes \left(\frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)} \right) \otimes \right. \\
& \quad \left. \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r \right) = \\
& = \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_r).
\end{aligned}$$

Мы доказали формулу, вынесенную в название параграфа.

$$\S 4. \text{Alt}(\text{Alt}(t_1) \otimes \text{Alt}(t_2)) = \text{Alt}(t_1 \otimes t_2).$$

Отметим частные случаи формулы §3:

$$\begin{aligned}
(4.1) \quad & \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q) = \\
& \text{Alt}(\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p) \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q).
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
(4.2) \quad & \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q) = \\
& \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes \text{Alt}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q))
\end{aligned}$$

Пусть t_1 произвольный (то есть, не обязательно простой) тензор. Он представляется в виде суммы простых: $t_1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$, где $y_1, y_2, \dots, y_k$ — простые тензоры.

По формуле (4.2) с учетом линейности альтернирования Alt и тензорного произведения имеем:

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad & \text{Alt}(t_1 \otimes (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q)) = \\
& = \text{Alt}(y_1 \otimes (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q)) + \\
& + \text{Alt}(y_2 \otimes (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q)) + \cdots + \text{Alt}(y_k \otimes (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q)) = \\
& = \text{Alt}(y_1 \otimes \text{Alt}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q)) + \\
& + \text{Alt}(y_2 \otimes \text{Alt}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q)) + \\
& + \text{Alt}(y_k \otimes \text{Alt}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q)) = \\
& = \text{Alt}((y_1 + y_2 + \cdots + y_k) \otimes \text{Alt}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q)). \\
& = \text{Alt}(t_1 \otimes \text{Alt}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q)).
\end{aligned}$$

Пусть теперь t_1 и t_2 произвольные (то есть, не обязательно простые) тензоры и t_2 представляется в виде суммы простых: $t_2 = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$, где $y_1, y_2, \dots, y_k$ — простые тензоры. Тогда с учетом (4.3) и линейности альтернирования Alt и тензорного произведения как и в предыдущем случае имеем:

$$\begin{aligned}
(4.4) \quad & \text{Alt}(t_1 \otimes t_2) = \text{Alt}(t_1 \otimes (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)) = \\
& = \text{Alt}(t_1 \otimes y_1) + \text{Alt}(t_1 \otimes y_2) + \cdots + \text{Alt}(t_1 \otimes y_k) = \\
& = \text{Alt}(t_1 \otimes \text{Alt}(y_1)) + \text{Alt}(t_1 \otimes \text{Alt}(y_2)) + \cdots + \text{Alt}(t_1 \otimes \text{Alt}(y_k)) = \\
& = \text{Alt}(t_1 \otimes \text{Alt}(y_1 + y_2 + \cdots + y_k)) = \\
& = \text{Alt}(t_1 \otimes \text{Alt}(t_2)).
\end{aligned}$$

Положим: $t_1 = \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p)$. Тогда в силу (4.1) и (4.4) имеем:

$$\begin{aligned}
\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes t_2) & = \text{Alt}(\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p) \otimes t_2) = \\
& = \text{Alt}(t_1 \otimes t_2)
\end{aligned}$$

и по (4.4)

$$\begin{aligned} \text{Alt}(t_1 \otimes t_2) &= \text{Alt}(t_1 \otimes \text{Alt}(t_2)) = \\ &= \text{Alt}(\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p) \otimes \text{Alt}(t_2)), \end{aligned}$$

то есть,

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes t_2) &= \\ &= \text{Alt}(\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_p) \otimes \text{Alt}(t_2)). \end{aligned}$$

Возвращаясь теперь к предположению, что t_1 — произвольный (то есть, не обязательно простой) тензор, представляем его в виде суммы простых: $t_1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$, где $y_1, y_2, \dots, y_k$ — простые тензоры. Тогда с учетом (4.5) и линейности альтернирования Alt и тензорного произведения как и в предыдущих случаях имеем:

$$\begin{aligned} \text{Alt}(t_1 \otimes t_2) &= \text{Alt}((y_1 + y_2 + \cdots + y_k) \otimes t_2) = \\ &= \text{Alt}(y_1 \otimes t_2) + \text{Alt}(y_2 \otimes t_2) + \cdots + \text{Alt}(y_k \otimes t_2) = \\ &= \text{Alt}(\text{Alt}(y_1) \otimes \text{Alt}(t_2)) + \text{Alt}(\text{Alt}(y_2) \otimes \text{Alt}(t_2)) + \cdots + \text{Alt}(\text{Alt}(y_k) \otimes \text{Alt}(t_2)) = \\ &= \text{Alt}(\text{Alt}(y_1 + y_2 + \cdots + y_k) \otimes \text{Alt}(t_2)) = \text{Alt}(\text{Alt}(t_1) \otimes \text{Alt}(t_2)). \end{aligned}$$

Вынесенная в заголовок параграфа формула доказана.

§5. Внешнее произведение тензоров.

Пусть $u_1 \in T_0^{i_1}, u_2 \in T_0^{i_2}, \dots, u_k \in T_0^{i_k}$, либо $u_1 \in T_{i_1}^0, u_2 \in T_{i_2}^0, \dots, u_k \in T_{i_k}^0$.

Внешним произведением тензоров $u_1, u_2, \dots, u_k$ назовем тензор

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k = \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_k)!}{i_1! i_2! \cdots i_k!} \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_k).$$

Пусть в дополнение к введенным обозначениям $v_1 \in T_0^{j_1}, v_2 \in T_0^{j_2}, \dots, v_l \in T_0^{j_l}$, либо, соответственно, $v_1 \in T_{j_1}^0, v_2 \in T_{j_2}^0, \dots, v_l \in T_{j_l}^0$. Тогда

$$(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k) \wedge (v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_l) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(i_1 + i_2 + \dots + j_1 + j_2 + \dots + j_l)!}{(i_1 + i_2 + \dots + i_k)!(j_1 + j_2 + \dots + j_l)!} \cdot \\
&\cdot \text{Alt} \left((u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k) \otimes (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_l) \right) = \\
&= \frac{(i_1 + i_2 + \dots + j_1 + j_2 + \dots + j_l)!}{(i_1 + i_2 + \dots + i_k)!(j_1 + j_2 + \dots + j_l)!} \cdot \\
&\cdot \text{Alt} \left(\frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_k)!}{i_1!i_2! \dots i_k!} \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k) \cdot \right. \\
&\left. \cdot \frac{(j_1 + j_2 + \dots + j_l)!}{j_1!j_2! \dots j_l!} \text{Alt}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_l) \right) = \\
&= \frac{(i_1 + i_2 + \dots + j_1 + j_2 + \dots + j_l)!}{(i_1 + i_2 + \dots + i_k)!(j_1 + j_2 + \dots + j_l)!} \cdot \\
&\cdot \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_k)!}{i_1!i_2! \dots i_k!} \frac{(j_1 + j_2 + \dots + j_l)!}{j_1!j_2! \dots j_l!} \cdot \\
&\cdot \text{Alt} \left(\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k) \cdot \text{Alt}(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_l) \right) = \\
&= \frac{(i_1 + i_2 + \dots + j_1 + j_2 + \dots + j_l)!}{i_1!i_2! \dots i_k!j_1!j_2! \dots j_l!} \cdot \\
&\cdot \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_l) = \\
&= u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_l.
\end{aligned}$$

Если $i_1 = i_2 = \dots = i_k = 1$, то есть, если $u_1, u_2, \dots, u_k$ принадлежат все L или L^* , то

$$\begin{aligned}
u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k &= k! \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k) = \\
&= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k)}.
\end{aligned}$$

Тензоры вида $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k$ называются *простыми поливекторами*, если $u_1, u_2, \dots, u_k \in L$ и *простыми внешними формами*, если $u_1, u_2, \dots, u_k \in L^*$.

§6. Свойства внешних произведений кососимметрических тензоров.

Начнем с того, что *тензор $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k$ порядка k равен нулю тогда и только тогда, когда $u_1, u_2, \dots, u_k$, линейно зависимы.* Это сразу следует из определения внешнего произведения и лемм 2.1 и 2.2.

Отсюда следует, что *если k больше размерности пространства L , то тензор $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k$ равен нулю.*

Использованные в определении внешнего произведения операции тензорного произведения и альтернирования линейны, поэтому, являясь их композицией, *внешнее произведение линейно по каждому сомножителю.*

Внешнее произведение косокоммутативно в том смысле, что если t_1 — тензор порядка k_1 , t_2 — тензор порядка k_2 , то

$$t_1 \wedge t_2 = (-1)^{k_1 k_2} t_2 \wedge t_1.$$

В случае простых тензоров $t_1 = u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_{k_1}$ и $t_2 = u_{k_1+1} \otimes u_{k_1+2} \otimes \dots \otimes u_{k_1+k_2}$ доказываемое вытекает из формулы

$$\varphi_\delta(\text{Alt}(t)) = (-1)^\delta \text{Alt}(t)$$

для любой перестановки δ :

$$\begin{aligned} & (u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_{k_1}) \wedge (u_{k_1+1} \otimes u_{k_1+2} \otimes \dots \otimes u_{k_1+k_2}) = \\ &= \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! k_2!} \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_{k_1} \otimes u_{k_1+1} \otimes u_{k_1+2} \otimes \dots \otimes u_{k_1+k_2}) = \\ &= (-1)^{k_1 k_2} \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! k_2!} \text{Alt}(u_{k_1+1} \otimes u_{k_1+2} \otimes \dots \otimes u_{k_1+k_2} \otimes u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_{k_1}) = \\ &= (u_{k_1+1} \otimes u_{k_1+2} \otimes \dots \otimes u_{k_1+k_2}) \wedge (u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_{k_1}), \end{aligned}$$

так как для того, чтобы упорядоченный набор $u_1, u_2, \dots, u_{k_1}, u_{k_1+1}, u_{k_1+2}, \dots, u_{k_1+k_2}$ перевести в упорядоченный набор $u_{k_1+1}, u_{k_1+2}, \dots, u_{k_1+k_2}, u_1, u_2, \dots, u_{k_1}$ надо именно $k_1 k_2$ раз переставить соседние элементы.

Для случая произвольных тензоров t_1 и t_2 требуемое равенство вытекает из только что доказанного и линейности внешнего произведения.

Рассмотрим сначала случай, когда тензор t_2 есть простой поливектор или простая внешняя форма. Пусть $t_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_k$, где $u_1, u_2, \dots, u_k$ — простые. По только что доказанной формуле с учетом линейности внешнего произведения имеем:

$$\begin{aligned} t_1 \wedge t_2 &= (u_1 + u_2 + \dots + u_k) \wedge t_2 = u_1 \wedge t_2 + u_2 \wedge t_2 + \dots + u_k \wedge t_2 = \\ &= (-1)^{k_1 k_2} t_2 \wedge u_1 + (-1)^{k_1 k_2} t_2 \wedge u_2 + \dots + (-1)^{k_1 k_2} t_2 \wedge u_k = \\ &= (-1)^{k_1 k_2} t_2 \wedge (u_1 + u_2 + \dots + u_k) = (-1)^{k_1 k_2} t_2 \wedge t_1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Теперь перейдем к общему случаю, когда $t_2 = u_1 + u_2 + \dots + u_k$, где $u_1, u_2, \dots, u_k$ — простые. По только что доказанной формуле с учетом линейности внешнего произведения имеем:

$$\begin{aligned} t_1 \wedge t_2 &= t_1 \wedge (u_1 + u_2 + \dots + u_k) = \\ &= t_1 \wedge u_1 + t_1 \wedge u_2 + \dots + t_1 \wedge u_k = (-1)^{k_1 k_2} u_1 \wedge t_1 + (-1)^{k_1 k_2} u_2 \wedge t_1 + \dots + (-1)^{k_1 k_2} u_k \wedge t_1 = \\ &= (-1)^{k_1 k_2} (u_1 + u_2 + \dots + u_k) \wedge t_1 = (-1)^{k_1 k_2} t_2 \wedge t_1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Из только что доказанной формулы вытекает, что *если порядок поливектора или внешней формы t нечетен, то $t \wedge t = 0$.*

В случае четного порядка последнее равенство может не иметь места: *если u_1, u_2, u_3, u_4 , линейно независимы, то*

$$\begin{aligned} &(u_1 \wedge u_2 + u_3 \wedge u_4) \wedge (u_1 \wedge u_2 + u_3 \wedge u_4) = \\ &= u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_3 \wedge u_4 \wedge u_1 \wedge u_2 + u_3 \wedge u_4 \wedge u_3 \wedge u_4 = \\ &= 0 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_3 \wedge u_4 \wedge u_1 \wedge u_2 + 0 = \\ &= u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 + u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 = 2u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 \neq 0 \end{aligned}$$

Ассоциативность внешнего произведения была проверена в предыдущем параграфе:

$$(t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge t_k) \wedge (t_{k+1} \wedge t_{k+2} \wedge \dots \wedge t_l) =$$

$$= t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots \wedge t_k \wedge t_{k+1} \wedge t_{k+2} \wedge \cdots \wedge t_l.$$

§7. Базисы. Свертка внешних форм и поливекторов.

Для кососимметрической функции t

$$t(u_{\delta(1)}, u_{\delta(2)}, \dots, u_{\delta(r)}) = (-1)^\delta t(v_1, v_2, \dots, v_r),$$

поэтому

$$\begin{aligned} & t(\text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r)) = \\ & = t\left(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma} (-1)^\sigma (u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(r)})\right) = \\ & = t(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r). \end{aligned}$$

Так как все операции здесь линейны, то равенство верно не только для простого, но и для любого тензора $w \in T_0^r$:

$$t(\text{Alt}(w)) = t(w).$$

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис пространства L , $e^1, e^2, \dots, e^n$ — взаимный базис пространства L^* .

Из определения внешнего произведения и леммы 2.3 вытекает, что произведения $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, составляют базис пространства поливекторов, а произведения $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, составляют базис пространства внешних форм порядка k .

Свертка пространств T_0^r и T_r^0 уже была определена в §11.3. Пространство поливекторов порядка r лежит в T_0^r , пространство внешних форм порядка r лежит в T_r^0 . Поэтому свертка a пары T_0^r, T_r^0 определяет билинейную функцию, связывающую внешние формы и поливекторы.

В соответствии с замечаниями §11.3 свертка пространств T_0^r и T_r^0 определяется для простых тензоров по формуле

$$a(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r, v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_r) = a(u_1, v_1) \cdot a(u_2, v_2) \cdot \dots \cdot a(u_r, v_r),$$

где $u_1, u_2, \dots, u_r \in L$, $v_1, v_2, \dots, v_r \in L^*$, $a(u, v)$ — свертка пары L и L^* .

Но эта же формула определяет и значение полилинейной функции, соответствующей тензору $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_r$ на наборе аргументов $u_1, u_2, \dots, u_r \in L$.

Поэтому в соответствии с определением внешнего произведения и соответствующей формулой §2 значение полилинейной функции, соответствующей тензору $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r$ на наборе аргументов $u_1, u_2, \dots, u_r$ определяется по формуле

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r(u_1, u_2, \dots, u_r) = \begin{vmatrix} a(u_1, v_1) & a(u_1, v_2) & \dots & a(u_1, v_r) \\ a(u_2, v_1) & a(u_2, v_2) & \dots & a(u_2, v_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(u_r, v_1) & a(u_r, v_2) & \dots & a(u_r, v_r) \end{vmatrix}.$$

В силу замечания первого абзаца параграфа

$$\begin{aligned} & a(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r, u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_r) = \\ & = a(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r, \text{Alt}(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_r)) = \\ & = \begin{vmatrix} a(u_1, v_1) & a(u_1, v_2) & \dots & a(u_1, v_r) \\ a(u_2, v_1) & a(u_2, v_2) & \dots & a(u_2, v_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(u_r, v_1) & a(u_r, v_2) & \dots & a(u_r, v_r) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Соответственно, для элементов указанных выше базисов $a(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = 1$, если $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_k = j_k$, и $a(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = 0$, если наборы $i_1 < i_2 < \dots < i_k, j_1 < j_2 < \dots < j_k$ различны.

Это означает, что указанная билинейная функция a является сверткой поливекторов и внешних форм, а базисы — взаимными.