Лекция 1.

Алгебра множеств. Отображения множеств. Декартово произведение семейства множеств. Отношение эквивалентности. Упорядочение, линейное упорядочение, вполне упорядочение. Аксиома выбора. Лемма Куратовского–Цорна. Теорема Цермело. Мощность множества. Равномощность множеств. Теорема Кантора–Бернштейна.

Предполагаются известными понятие множества, основных операций над множествами (объединение, пересечение, дополнение) и их свойств, отображений множеств. Эти понятия излагаются в курсах высшей алгебры и математического анализа в первом семестре.

§ 1. Предварительные сведения, обозначения.

Множества обозначаются: $A, B, \dots$ (прописными буквами);
элементы множеств обозначаются: $a, b, \dots$ (малыми буквами);
элемент a множества A обозначается: $a \in A$;
подмножество B множества A обозначается: $B \subset A$;
задание подмножества B множества A условием $\varphi(X)$:

$$B = \{x \in A : \varphi(X)\}$$

(или $B = \{x : \varphi(X)\}$, если ясно о каком множестве A идет речь);
пустое множество обозначается: $\emptyset$ (договоренность: пустое множество не содержит элементов);
множества, элементами которых являются множества, называются *семействами множеств* и обозначаются: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ (каллиграфическими буквами).

Пересечение множеств A и B: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$;
множества A и B *дизъюнктны*, если $A \cap B = \emptyset$;
объединение множеств A и B: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$;
пересечение непустого семейства множеств $\mathcal{A}$:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{ для всех } A \in \mathcal{A}\};$$

объединение непустого семейства множеств $\mathcal{A}$:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{ для некоторого } A \in \mathcal{A}\}.$$

Законы дистрибутивности:

$$B \cap \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (B \cap A);$$

$$B \cup \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (B \cup A).$$

Разность множеств A и B: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Законы де Моргана:
$$B \setminus \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (B \setminus A);$$
$$B \setminus \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (B \setminus A).$$

§ 2. Отображения множеств.

Упорядоченная пара (x, y) есть множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, если $x \neq y$, и множество $\{x\}$, если $x = y$. *Декартово произведение* множеств X и Y:
$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

Всякое подмножество произведения $X \times Y$ есть некоторое *отношение*. Отношение $f \subset X \times Y$ называется *отображением множества X в множество Y*, если

1) для любого $x \in X$ существует $(x, y) \in f$, и

2) из $(x, y) \in f$ и $(x, y') \in f$ следует, что $y = y'$.

Обозначение $f : X \to Y$.

Для $x \in X$ единственное $y \in Y$, для которого $(x, y) \in f$ называется *значением f в точке x* и обозначается $f(x)$. *Образ $f(A)$ множества $A \subset X$* при отображении f есть множество
$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ для некоторого } x \in A\}.$$
Прообраз $f^{-1}(B)$ множества $B \subset Y$ при отображении f есть множество
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Для отображения $f : X \to Y$ и подмножества $M \subset X$ отображение f, рассматриваемое только на M, называется *сужением* (*ограничением*) отображения f на M и обозначается $f|_M$. Получаем отображение $f|_M : M \to Y$, где $(f|_M)(x) = f(x)$.

Для отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ равенство $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in X$ определяет *композицию отображений f и g*: $(g \circ f) : X \to Z$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$
$$\text{из } f(x_1) = f(x_2) \text{ следует, что } x_1 = x_2.$$
Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным* или *отображением “на”*, если $f(X) = Y$. Отображение $f : X \to Y$, являющееся одновременно инъективным и сюръективным, называется *биективным* или *взаимно однозначным*.

Отображение $f : X \to Y$ называется *обратимым*, если существует такое отображение $g : Y \to X$, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, где id_X (соответственно id_Y) — тождественное отображение множества X (соответственно Y) на себя. Отображение g называется *обратным* к f, однозначно определяется отображением f, и обозначается f^{-1}.

Для семейства множеств $\mathcal{A}$ сюръективное отображение f множества J на $\mathcal{A}$ называется *индексирующим отображением.* Семейство $\mathcal{A}$ с индексирующим отображением $f : J \to \mathcal{A}$ называется *индексированным семейством* множеств. Обозначение: $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in J\}$. Любое семейство множеств $\mathcal{A}$ с тождественным индексирующим отображением $\mathrm{id} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является индексированным семейством $\mathcal{A} = \{A_A : A \in \mathcal{A}\}$. Объединение и пересечение индексированных семейств обозначаются:

$$\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha, \ \bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha$$

соответственно.

Если $J = \{1, \dots, k\}$ или $J = \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — натуральные числа), то объединения и пересечения индексированных семейств обозначаются:

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i, \ \bigcap_{i=1}^{k} A_i, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

§ 3. Декартово произведение семейства множеств.

3.1. Определение. Пусть дано некоторое семейство множеств $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$. Обозначим через $\prod\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$ *декартово произведение* этих множеств, т.е. множество всех таких отображений $x : J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$, что $x(\alpha) \in A_\alpha$ для любого $\alpha \in J$.

Для конечного $J = \{1, \dots, k\}$ произведение семейства множеств $A_1, \dots A_k$ обозначается через $A_1 \times \dots \times A_k$, для $J = \mathbb{N}$ через $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Если $S \subset J$, то определено естественное проектирование (проекция)

$$pr_S : \prod_{\alpha\in J} A_\alpha \to \prod_{\alpha\in S} A_\alpha,$$

ставящее в соответствие точке x произведения (отображению $x : J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$), ее ограничение $x|_S$ на множество S. Если S состоит из одного индекса α, то pr_S будем обозначать через pr_α.

Точку $x(\alpha) \in A_\alpha$ будем называть *α-координатой* точки $x \in \prod\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$ и, как правило, будем обозначать x_α, сама точка x будет обозначаться (x_α). В частности, элемент x произведения $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ будет обозначаться (x_i).

3.2. Пример. Пусть $2 = \{0, 1\}$, $\{A_i = 2 : i \in \mathbb{N}\}$. Тогда $2^{\mathbb{N}} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ есть множество всех последовательностей из 0 и 1 (отображений натуральных чисел в множество из двух элементов). $2^{\mathbb{N}}$ также называется *счетной степенью двоеточия.*

Семейство всех подмножеств множества A обозначается 2^A. Обоснование обозначения следующее. Для любого элемента $B \in 2^A$ рассмотрим отображение $f_B : A \to 2 = \{0, 1\}$ (*характеристическую функцию подмножества* B),

$$f_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin B, \\ 1, & \text{если} \quad x \in B. \end{cases}$$

Элементы 2^A находятся во взаимно однозначном соответствии с характеристическими функциями, которые, в свою очередь, являются элементами произведения 2^A (произведение A экземпляров 2).

§ 4. Отношение эквивалентности.

Отношение $\mathcal{R}$ на множестве X, т.е. подмножество произведения $X \times X$, называется *отношением эквивалентности*, если $\mathcal{R}$ удовлетворяет следующим свойствам ($x \sim y$ обозначает, что $(x, y) \in \mathcal{R}$):

1) $x \sim x$ для любого $x \in X$ (*рефлексивность*),

2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (*симметричность*),

3) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (*транзитивность*).

Всякое отношение эквивалентности $\mathcal{R}$ на множестве X определяет разбиение X на попарно непересекающиеся множества (*классы эквивалентности* отношения $\mathcal{R}$): x, y в одном классе эквивалентности в том и только том случае, если $x \sim y$. Класс эквивалентности элемента $x \in X$ обозначается через $[x]$. Множество всех классов эквивалентности отношения $\mathcal{R}$ обозначается через $X/\mathcal{R}$ и называется *фактормножеством* множества X относительно $\mathcal{R}$.

Обратно, всякое разбиение множества X на непересекающиеся множества, определяет на нем единственное отношение эквивалентности, классы эквивалентности которого совпадают с исходным разбиением.

4.1. Пример. Пусть $f : X \to Y$ сюръективное отображение. Определено отношение эквивалентности $\mathcal{R}$ на X: $x \sim y$ в том и только том случае, если $f(x) = f(y)$. Классами эквивалентности отношения являются прообразы точек при отображении f. Определена естественная биекция $X/\mathcal{R}$ на Y.

Частными случаями данной конструкции являются: отображение проектирования плоскости $\mathbb{R}^2$ на ось Ox (классы эквивалентности — прямые параллельные оси Oy); отображение плоскости $\mathbb{R}^2$ на неотрицательные вещественные числа $\mathbb{R}_+$, $(x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$ (точке плоскости ставится в соответствие ее расстояние до начала координат) (классы эквивалентности — окружности с центром в начале координат O и точка O).

4.2. Предложение. *Пусть $\mathcal{R}$ — отношение эквивалентности на X и $Y \subset X$. Тогда ограничение $\mathcal{R}|_Y$ отношения $\mathcal{R}$ на Y есть отношение эквивалентности.* □

§ 5. Упорядочение, линейное упорядочение, вполне упорядочение.

Пусть $\leq$ — отношение на множестве X. Говорят, что $\leq$ *упорядочивает* X или что $\leq$ является *упорядочением* (*порядком*) на X, если отношение $\leq$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ (*транзитивность*),

2) $x \leq x$ для всякого $x \in X$ (*рефлексивность*),

3) Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ (*антисимметричность*).

Множество X вместе с порядком $\leq$ на нем называется *упорядоченным множеством.* Обозначение $(X, \leq)$. Два элемента x и y упорядоченного множества X называются *несравнимыми*, если никакое из неравенств $x \leq y$ и $y \leq x$ не выполняется.

5.1. Примеры. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим следующее отношение $\leq$:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \iff x_1 \leq y_1 \quad \text{и} \quad x_2 \leq y_2. \tag{5.1}$$

Легко видеть, что $\leq$ есть порядок на $\mathbb{R}^2$. Для точки (x, y) множество точек $\{(a, b) : x \leq a,\ y \leq b\}$ есть квадрант ограниченный лучами, параллельными осям координат, и вершиной в (x, y) (множество точек $\{(a, b) : a \leq x,\ b \leq y\}$ есть квадрант ограниченный лучами, параллельными осям координат и имеющими противоположное направление, и вершиной в (x, y)). Точки лежащие в дополнение до этих двух квадрантов несравнимы с (x, y).

Упорядочение на $\mathbb{N}$: $a \leq b \iff a|b$ (a делит b).

Говорят, что подмножество Y упорядоченного множества X имеет *верхнюю грань* в X, если существует элемент $x \in X$, для которого $y \leq x$ для всех $y \in Y$.

Элемент x упорядоченного множества X называется *максимальным*, если для любого другого элемента $y \in X$ либо $y \leq x$, либо y несравним с x. Элемент $x \in X$ называется *наибольшим*, если $y \leq x$ для всех $y \in X$.

Аналогично определяются: *нижняя грань* подмножества, *минимальный* элемент и *наименьший* элемент упорядоченного множества.

Упорядоченное множество $(X, \leq)$ называется *линейно упорядоченным*, если оно не содержит несравнимых элементов, т.е. для $x,\ y \in X$ всегда $x \leq y$ или $y \leq x$. Если X линейно упорядочено отношением $\leq$, то, полагая для любых $x, y \in X$

$$x < y \text{ в том и только том случае, когда } x \leq y \text{ и } x \neq y$$

получаем отношение линейного порядка $<$. Оно удовлетворяет следующим свойствам:

1) Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$ (*транзитивность*),

2) Если $x < y$, то отношение $y < x$ не имеет места (*антирефлексивность*),

3) Если $x \neq y$, то либо $y < x$, либо $x < y$ (*сравнимость*).

5.2. Пример. На плоскости $\mathbb{R}^2$ отношение

$$(x_1, x_2) < (y_1, y_2) \iff x_1 < y_1, \text{ или } x_1 = y_1 \text{ и } x_2 < y_2$$

является линейным порядком.

5.3. Предложение. *Пусть $(X, \leq)$ — упорядоченное множество и $Y \subset X$. Тогда отношение $\leq|_Y$ есть отношение порядка на Y. Если $\leq$ есть линейный порядок на X, то $\leq|_Y$ является линейным порядком на Y.* $\square$

Пусть $(X, <)$ и $(Y, <)$ — линейно упорядоченные множества. *Лексикографическим порядком* на произведении $X \times Y$ называется линейный порядок:

$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$.

Пример 5.2 — лексикографический порядок на произведении прямых с естественным порядком.

5.4. Пример. Рассмотрим множество

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq -x_1\} \subset \mathbb{R}^2$$

с порядком, являющимся ограничением на X порядка на плоскости (5.1). Подмножество $Y = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ является множеством всех максимальных элементов упорядоченного множества X, и ни один из элементов Y не является наибольшим в X.

Линейный порядок $<$ на множестве X называется *вполне упорядочением*, а множество X вместе с порядком $<$ называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое подмножество множества X имеет наименьший элемент.

5.5. Пример. $\mathbb{N}$ (с естественным порядком) — вполне упорядоченное множество.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ (с естественными порядками) — не вполне упорядоченные множества.

Подмножество вполне упорядоченного множества — вполне упорядоченное множество.

Лексикографический порядок на произведении вполне упорядоченных множеств A и B — вполне упорядочение. Действительно, пусть $X \subset A \times B$, $pr : A \times B \to A$ — проекция. Обозначим через a_0 наименьший элемент множества $pr(X) \subset A$. Тогда множество $\{b : (a_0, b) \in X\} \subset B$ имеет наименьший элемент b_0. Элемент (a_0, b_0) будет наименьшим элементом множества X.

5.6. Пример. Существует вполне упорядоченное множество T с максимальным элементом ω_1 такое, что интервал $S_{\omega_1} = \{x \in T : x < \omega_1\}$ несчетен, а интервал $S_y = \{x \in T : x < y\}$, $y < \omega_1$, счетен.

Возьмем несчетное вполне упорядоченное множество A (с наименьшим элементом a) и рассмотрим лексиграфически упорядоченное произведение $\{0, 1\} \times A$ (с порядком $0 < 1$ на двоеточии $\{0, 1\}$). Интервал $S_{(1,a)}$ несчетен. Пусть c — наименьший элемент $\{0, 1\} \times A$, для которого интервал S_c несчетен. Он существует, так как множество $\{0, 1\} \times A$ с лексиграфическим порядком вполне упорядочено. Тогда подмножество $S_c \cup \{c\}$ является искомым.

Множество $T(\omega_1) = T \setminus \{\omega_1\}$ называется множеством *счетных трансфинитов.*

5.7. Лемма. *Пусть A и B — вполне упорядоченные множества, и не существует сюръективного отображения A на B. Тогда существует единственное отображение $h : A \to B$, удовлетворяющее равенству*

$$h(x) = \inf(B \setminus h(S_x)), \text{ где } S_x = \{a \in A : a < x\}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Покажем, что отображение h, удовлетворяющее условию (5.2), и его ограничения h_x на сечения S_x, $x \in A$, единственны.

Предположим, что также существует отображение $f : A \to B$, удовлетворяющее условию (5.2), и пусть $a = \inf\{x \in A : f(x) \neq h(x)\}$. Тогда $f|_{S_a} = h|_{S_a}$, и по условию (5.2) $f(a) = h(a)$. Полученное противоречие завершает доказательство единственности. Доказательство единственности для ограничений h_x отображения h аналогично.

Построение отображения h, следуя следующим принципам.

(A) Если отображение h, удовлетворяющее условию (5.2), определено на S_x, то так как не существует сюръекции A на B, множество $B \setminus h(S_x) \neq \emptyset$ и определено отображение h на $S_x \cup \{x\}$, удовлетворяющее условию (5.2).

(B) Пусть $K \subset A$. Если отображение h определено на всех S_x, $x \in K$, то в силу единственности его ограничений h_x на S_x, $x \in K$, определено отображение $h : \bigcup\{S_x : x \in K\} \to B$, где $h(t) = h_x(t)$, для произвольного $x \in K$, $t \in S_x$.

Пусть a_0 — наименьший элемент A. Тогда $S_{a_0} = \emptyset$ и h определено на $\emptyset$.

Пусть $a \in A$ и h_x определено на S_x, $x < a$. Покажем, что определено h_a на S_a. Если $a' = \sup\{x : x < a\} < a$, то тогда определено $h_{a'}$, и по свойству (A) определено $h_a : S_a = S_{a'} \cup \{a'\} \to B$. Если $\sup\{x : x < a\} = a$, то тогда h_a определено по свойству (B).

Для любого $a \in A$ построено отображение h_a. Если существует $\sup\{x : x \in A\}$, то отображение $h : A \to B$ определено по свойству (A). Иначе, оно определяется по свойству (B). $\square$

§ 6. Аксиома выбора. Лемма Куратовского–Цорна. Теорема Цермело.

Аксиома выбора. *Для каждого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ непустых множеств существует такое отображение $f : J \to \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$, что $f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого $\alpha \in J$.*

Лемма Куратовского–Цорна. *Пусть $(X, \leq)$ — упорядоченное множество. Предположим, что каждое линейно упорядоченное подмножество $Y \subset X$ имеет верхнюю грань в X. Тогда X имеет максимальный элемент.*

Теорема Цермело. *На каждом множестве X существует отношение $<$, которое вполне упорядочивает X.*

Лемма Куратовского–Цорна и Теорема Цермело эквивалентны аксиоме выбора.

§ 7. Мощность множества. Равномощность множеств. Теорема Кантора–Бернштейна.

Мощность множества — это в некотором смысле “количество” его элементов. Для конечного множества с понятием количества его элементов не возникает никаких вопросов. С бесконечными множествами ситуация сложнее.

Множества A и B называются *эквивалентными* или *равномощными* (обозначение: $A \sim B$), если существует биективное отображение $f : A \to B$. Если A и B равномощны, то говорят, что они имеют одинаковую мощность.
Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.
Множество называется *несчетным*, если оно не конечно и не равномощно $\mathbb{N}$.

$|A|$ — обозначение мощности множества A. $|A| \leq |B|$, если существует инъективное отображение множества A в B.

7.1. Теорема. *Множества A и 2^A не равномощны.*

Доказательство. Покажем, что не существует сюръективного отображения A на 2^A. Пусть $g : A \to 2^A$ — произвольное отображение. Для любого $a \in A$ множество $g(a)$ является подмножеством A либо содержащим a, либо его не содержащим. Положим

$B = \{a \in A : a \in A \backslash g(a)\}$ (множество элементов A образы которых себя не содержат).

Покажем, что $B \notin g(A)$. Предположим, что $B = g(a_0)$. Тогда по определению множества B, если
$a_0 \in B$, то $a_0 \in A \setminus B$,
если же $a_0 \in A \setminus B$, то $a_0 \in B$.
Множества B и $A \setminus B$ дизъюнктны. Тем самым не существует $a_0 \in A$ такого, что $B = g(a_0)$. $\square$

7.2. Следствие. *Множество $2^{\mathbb{N}}$ несчетно.* $\square$

7.3. Предложение. *Множество $2^{\mathbb{N}}$ равномощно множеству точек отрезка $I = [0, 1]$.*

Доказательство. Двоичная запись
$t = 0, i_1 i_2 \dots i_k \dots$
произвольного числа $t \in I = [0, 1]$ дает нам отображение $f : 2^{\mathbb{N}} \to I$. Оно является сюръективным, но не взаимно однозначным. Числам вида

$$n/2^k, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < n < 2^k, \tag{7.1}$$

соответствуют в точности две записи: у одной, начиная с некоторого номера, все цифры равны 0, а у другой — все единицы. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество двоично-рациональных чисел на отрезке I, т.е. множество чисел вида (7.1). На множестве $f^{-1}(I \setminus \mathcal{D})$ отображение f инъективно. Но множества $\mathcal{D}$ и $f^{-1}(\mathcal{D})$ счетны. Значит, существует биекция $g : f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathcal{D}$. Тогда отображение $h : 2^{\mathbb{N}} \to I$, определяемое следующим образом:

$$h|_{f^{-1}(\mathcal{D})} = g, \quad h|_{f^{-1}(I \setminus \mathcal{D})} = f|_{f^{-1}(I \setminus \mathcal{D})},$$

является биекцией. $\square$

Мощностью *континуума* называется мощность отрезка $I = [0, 1]$.

7.4. Теорема (Кантора–Бернштейна) *Если $A \sim B' \subset B$ и $B \sim A' \subset A$, то $A \sim B$.*

Доказательство. Пусть $f : A \to B'$, $B' \subset B$, $g : B \to A'$, $A' \subset A$, — биекции. Положим

$$C_0 = A \setminus A', \ D_{n+1} = f(C_n), \ C_{n+1} = g(D_{n+1}) = gf(C_n), \ n \in \omega = \{0\} \cup \mathbb{N},$$

$$C = \bigcup_{n \in \omega} C_n, \ D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Легко видеть, что

$$f(C) = D, \ g(D) = C \setminus C_0.$$

Тогда отображение

$$h : A \to B, \text{ где } h|_C = f, \ h|_{A \setminus C} = g^{-1}$$

является искомой биекцией. □

7.5. Теорема. *Для любых множеств A и B или существует инъекция A в B, или существует инъекция B в A.*

Доказательство. Если существует сюръекция f множества A на B, то, выбирая по элементу в прообразах $f^{-1}(b)$, $b \in B$, получаем инъктивное отображение множества B в A (каждому элементу B ставим в соответствие элемент его прообраза). Иначе, применяем теорему Цермело и Лемму 5.7, в которой строится требуемая инъекция. □

7.6. Следствие. *Для любых множеств A и B или $|A| \le |B|$, или $|B| \le |A|$.*

Лекция 2.

Топологические пространства. База топологии. Предбаза топологии. Метрические пространства. Нормированные пространства. Топология метрического пространства. Топология линейного порядка.

§ 8. Топологические пространства.

8.1. Определение. Пара $(X, \mathcal{T})$, где $\mathcal{T} \subset 2^X$, называется *топологическим пространством*, если $\mathcal{T}$ удовлетворяет следующим условиям:
(1) $\varnothing,\ X \in \mathcal{T}$;
(2) $U_1,\ U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$;
(3) объединение $\bigcup_{U \in \mathcal{T}_0} U$ произвольного семейства $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

Говорят, что $\mathcal{T}$ — это *топология на множестве* X. Обычно топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ обозначается через X, если ясно, что рассматривается множество с топологией. Элементы множества X называются *точками* пространства X.

Элементы топологии $\mathcal{T}$ называются *открытыми множествами* пространства X, а дополнения к ним — *замкнутыми* множествами.

Из свойств (1), (2) и (3) вытекают свойства:
(1') $\varnothing$ и X — замкнутые множества пространства X;
(2') объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
(3') пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

Семейство всех топологий на множестве X упорядочено отношением включения:

$$\mathcal{T}_1 \le \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2,$$

т.е. всякое множество U, открытое в топологии $\mathcal{T}_1$, открыто и в топологии $\mathcal{T}_2$.

При этом говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ *слабее* топологии $\mathcal{T}_2$, а топология $\mathcal{T}_2$ *сильнее* топологии $\mathcal{T}_1$. Из Определения 8.1 вытекает, что пара $\{\varnothing, X\}$ содержится в любой топологии $\mathcal{T}$ на X. Ясно также, что эта пара является топологией на X, следовательно, $\{\varnothing, X\}$ — *наименьшая* или *слабейшая* на X топология. Она называется *антидискретной.*

Семейство 2^X всех подмножеств множества X также является топологией на X. Из Определения 8.1 вытекает, что это — *наибольшая* или *сильнейшая* топология на X. Она называется *дискретной.* В дискретном пространстве всякое множество одновременно открыто и замкнуто.

8.2. Примеры.

1) Простейшими примерами топологических пространств являются $X = \varnothing$ и множество X, состоящее из одной точки a. Единственной топологией на этих множествах являются пары $(\varnothing, X)$.

2) Сложнее дело обстоит с множеством X, состоящим из двух различных точек a и b. На этом множестве имеются четыре различные топологии.
$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\}$ — *слипшееся двоеточие*;
$\mathcal{T}_2 = \big\{\varnothing, \{a\}, X\big\}$ — *связное двоеточие*;
$\mathcal{T}_3 = \big\{\varnothing, \{b\}, X\big\}$ — *связное двоеточие*;
$\mathcal{T}_4 = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\big\}$ — *дискретное двоеточие.*

3) Более сложную ситуацию мы получаем в случае множества X, состоящего из n различных точек. Из Определения 8.1 вытекает, что число различных топологий на этом множестве не превосходит 2^{2^n}.

4) На множестве X рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ всех его конечных подмножеств и само множество X. Это семейство замкнуто относительно конечных объединений и любых пересечений. Значит семейство $\mathcal{F}$ задает топологию через определение замкнутых подмножеств X. Она называется *топологией конечных дополнений*. Топология конечных дополнений на прямой $\mathbb{R}$ называется *топологией Зариского*.

5) Пусть $\mathcal{T}$ — топология на X и $Y \subset X$. Тогда, как легко видеть (используя закон дистрибутивности в доказательстве выполнения условия (3) Определения 8.1), семейство

$$\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

является топологией на множестве Y. Пространство $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ называется *подпространством* пространства $(X, \mathcal{T})$. Обычно говорят: "Y есть подпространство пространства X", $\mathcal{T}|_Y$ — *топология, индуцированная топологией $\mathcal{T}$ в Y*.

8.3. Определение. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств пространства X называется открытой *базой* X, если всякое открытое множество пространства X является объединением некоторых элементов из $\mathcal{B}$.

8.4. Предложение. *Пусть $\mathcal{B}$ — семейство подмножеств множества X, удовлетворяющее условиям:*

(1) *всякая точка $x \in X$ принадлежит некоторому элементу $U \in \mathcal{B}$;*

(2) *если $x \in U_1 \cap U_2$ и $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, то существует такой элемент $U_3 \in \mathcal{B}$, что $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$.*

Тогда $\mathcal{B}$ является базой некоторой (однозначно определенной) топологии на множестве X.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{T} = \Big\{ \bigcup_{O \in \mathcal{B}_0} O : \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B} \Big\} \tag{8.1}$$

и покажем, что $\mathcal{T}$ является топологией на X. Пустое множество принадлежит $\mathcal{T}$, поскольку $\varnothing = \bigcup \mathcal{B}_0$ для $\mathcal{B}_0 = \varnothing \subset \mathcal{B}$. Далее, $X \in \mathcal{T}$ согласно условию (1) Предложения 8.4. Условие (3) Определения 8.1 выполнено автоматически. Теперь покажем, что пересечение двух элементов U_1 и U_2 из $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

Пусть $U_1 = \bigcup_{V \in \mathcal{B}_1} V$, $U_2 = \bigcup_{V' \in \mathcal{B}_2} V'$. Тогда

$U_1 \cap U_2 = \big(\bigcup_{V \in \mathcal{B}_1} V\big) \cap \big(\bigcup_{V' \in \mathcal{B}_2} V'\big) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}_1} \bigcup_{V' \in \mathcal{B}_2} V \cap V'$.

Но каждое множество вида $V \cap V'$ согласно условию (2) Предложения 8.4 является объединением множеств $W \in \mathcal{B}$. Таким образом, и пересечение $U_1 \cap U_2$ является объединением множеств $W \in \mathcal{B}$. Следовательно, $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию (2) Определения 8.1.

Наконец, если семейство $\mathcal{B}$ является базой некоторой топологии, то эта топология определена однозначно. Но мы сейчас доказали, что семейство $\mathcal{T}$ из (8.1) является топологией с базой $\mathcal{B}$. $\square$

8.5. Определение. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств пространства X называется его открытой *предбазой*, если множество всевозможных конечных пересечений $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ элементов $U_i \in \mathcal{B}$ является базой пространства X.

8.6. Определение. Семейство v подмножеств множества X называется *покрытием* множества X, если $X = \bigcup_{V \in v} V$.

8.7. Предложение. *Пусть X — множество и v — произвольное его покрытие. Тогда v является предбазой некоторой однозначно определенной топологии на множестве X.*

Доказательство сводится к тому, что семейство $\mathcal{B}$ всевозможных конечных пересечений элементов из v удовлетворяет условиям Предложения 8.4.

8.8. Примеры топологий на $\mathbb{R}$.

1) $\mathcal{T}_1$ — топология на $\mathbb{R}$, базой которой являются интервалы (a, b), $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (*стандартная топология*).

2) $\mathcal{T}_2$ — топология Зариского (замкнутыми множествами $\mathbb{R}$ являются конечные множества и $\mathbb{R}$).

3) $\mathcal{T}_3$ — топология на $\mathbb{R}$, базой которой являются полуинтервалы $[a, b)$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (прямая с этой топологией называется *прямой Зоргенфрея*).

4) $\mathcal{T}_4$ — топология на $\mathbb{R}$, базой которой являются лучи $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $a \in \mathbb{R}$.

5) Пусть $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. $\mathcal{T}_5$ — топология на $\mathbb{R}$, базой которой являются множества (a, b), $(a, b) \setminus K$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

§ 9. Метрические пространства.

9.1. Определение. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), где X — множество, а ρ — *метрика* на X, т.е. такая функция

$\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$,

что выполнены следующие условия:

(1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (аксиома *тождества*);

(2) $\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома *симметрии*);

(3) $\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома *треугольника*).

Часто для краткости метрическое пространство (X, ρ) обозначается одной буквой X. Элементы метрического пространства называются *точками.* Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

9.2. Примеры метрических пространств.

1. Простейшими примерами являются пустое множество и множество X, состоящее из одной точки. На каждом из этих множеств существует единственная метрика.

2. *Евклидовы пространства* E^n, $n = 1, 2, 3$, (прямая, плоскость, пространство). В этих пространствах a priori определено расстояние между точками x и y — это длина отрезка, соединяющего точки x и y.

После введения прямоугольных координат пространства E^n, $n > 3$, превращаются в *арифметические n-мерные пространства* $\mathbb{R}^n$, в которых расстояние между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ вычисляется по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \tag{9.1}$$

вытекающей из теоремы Пифагора.

3. Всякое множество X превращается в метрическое пространство, если положить $\rho(x,y)=1$ для любых различных точек $x,y\in X$.

4. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и $Y\subset X$. Определим на Y метрику $\rho|_Y$ как ограничение метрики ρ на Y, т.е.

$\big(\rho|_Y\big)(x,y)=\rho(x,y)\quad$ для любых $\quad x,y\in Y.$

Ясно, что так определенная функция расстояния $\rho|_Y$ удовлетворяет аксиомам метрики. Формально надо писать не "$\rho|_Y$", а "$\rho|_{Y\times Y}$", но для удобства используем более короткое обозначение.

Пара $(Y,\rho|_Y)$ называется *подпространством* метрического пространства (X,ρ). Подпространства дают нам большой запас метрических пространств: множество $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ рациональных чисел, отрезок $[0,1]\subset\mathbb{R}$, интервал $(0,1)\subset\mathbb{R}$, квадрат на плоскости и т.д.

Следующие примеры метрических пространств связаны с понятием *нормированного пространства*, известным из курса "Линейная алгебра и геометрия". Напомним определение в простейшем случае.

9.3. Определение. Пусть V — вещественное линейное пространство. *Нормой* в пространстве V называется отображение

$||\cdot||:V\to\mathbb{R}_+,$

ставящее в соответствие вектору $\mathbf{x}\in V$ неотрицательное число $||\mathbf{x}||$ и удовлетворяющее аксиомам

(1) если $||\mathbf{x}||=0,\quad$ то $\quad\mathbf{x}=\mathbf{0}$;

(2) $||\alpha\mathbf{x}||=|\alpha|\cdot||\mathbf{x}||\quad$ для всякого $\quad\alpha\in\mathbb{R}$ и $\forall x\in V$;

(3) $\forall x,y\in V\quad ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||\le||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||\quad$ (аксиома треугольника).

Из (2) вытекает, что $||\mathbf{0}||=0$.

Линейное пространство V с заданной на нем нормой $||\cdot||$ называется *нормированным (линейным) пространством.*

9.4. Примеры нормированных пространств.

1. Простейшим примером является *нульмерное пространство* $V=\{\mathbf{0}\}$, на котором существует единственная норма.

2. Естественная норма на $\mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$||\mathbf{x}||=|\mathbf{x}|.$

3. Одним из обобщений предыдущего примера является следующая норма на арифметическом n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются последовательности $(x_1,\dots,x_n)$ вещественных чисел:

$$||(x_1,\dots,x_n)||=\max\big\{|x_1|,\dots,|x_n|\big\}. \tag{9.2}$$

Аксиомы нормы проверяются покоординатно с использованием свойств модуля (вещественного) числа.

4. Определим еще одну норму на $\mathbb{R}^n$. Для $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ положим

$$||\mathbf{x}||=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \tag{9.3}$$

В курсе Линейной алгебры и геометрии доказано, что функция из (9.3) удовлетворяет всем аксиомам нормы.

5. Норма из примера 3 обобщается до нормы на пространстве $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ непрерывных вещественных функций на отрезке $[0,1]\subset\mathbb{R}$:

$||f|| = \sup\big\{|f(t)| : t\in[0,1]\big\}$.

По теореме Вейерштрасса норма корректно определена. Проверим аксиому треугольника. Пусть $f=g+h$. Тогда для всякого $t\in[0,1]$ имеем $|f(t)|\le|g(t)|+|h(t)|$. Отсюда вытекает, что

$|f(t)| \le \sup\big\{|g(t')| : t'\in[0,1]\big\} + \sup\big\{|g(t')| : t'\in[0,1]\big\}$,

откуда и получаем неравенство $||f||\le||g||+||h||$.

9.5. Предложение. *Пусть $(V,||\cdot||)$ — нормированное пространство. Для $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ положим*

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||. \tag{9.4}$$

Тогда ρ является метрикой на множестве V.

Доказательство. Ясно, что достаточно проверить аксиому треугольника 9.1 (3). Имеем

$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) = (9.4) = ||\mathbf{x}-\mathbf{z}|| = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{z}|| \le (9.3(3)) \le ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}-\mathbf{z}|| = \rho(\mathbf{x},\mathbf{y})+\rho(\mathbf{y},\mathbf{z})$. $\square$

Таким образом, Предложение 9.5 дает нам новые примеры метрических пространств: пространства $\mathbb{R}^n$ с двумя различными метриками (нормы из (9.2) и (9.3) различны при $n\ge 2$ и, следовательно, приводят к различным метрикам).

§ 10. Топология метрического пространства.

Определение 10.1. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $x\in X$ и $\varepsilon>0$. Множество

$O_\varepsilon(x) = \big\{x'\in X : \rho(x,x')<\varepsilon\big\}$

называется *ε-окрестностью* точки x (или *открытым ε-шаром* с центром в точке x) в метрическом пространстве X.

10.2. Предложение. *Множество всех ε-окрестностей $O_\varepsilon(x)$, $\varepsilon>0$, точек x метрического пространства (X,ρ) образует базу некоторой топологии на X.*

Доказательство. Достаточно показать, что множество

$\mathcal{B} = \big\{O_\varepsilon(x) : \varepsilon>0, x\in X\big\}$

удовлетворяет условиям Предложения 8.4. Условие (1) Предложения 8.4 выполнено очевидным образом. Пусть теперь

$$x\in O_{\varepsilon_1}(x_1)\cap O_{\varepsilon_2}(x_2).$$

Тогда

$$r_i = \rho(x,x_i) < \varepsilon_i, \quad i=1,2. \tag{10.1}$$

Положим

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1-r_1, \quad \varepsilon_2-r_2\}.$$

Условие (10.1) влечет, что $\varepsilon>0$, а из аксиомы треугольника получаем

$O_\varepsilon(x)\subset O_{\varepsilon_1}(x_1)\cap O_{\varepsilon_2}(x_2)$.

Таким образом, условие (2) Предложения 8.4 также выполнено. $\square$

Топологию из Предложения 10.2 будем обозначать через $\mathcal{T}_\rho$ и будем называть топологией, *порожденной метрикой ρ*, или *метрической топологией*.

Предложение 10.2 можно перефразировать следующим образом.

10.3. Предложение. *Множество U открыто в метрической топологии $\mathcal{T}_\rho$, если для всякой точки $x \in U$ найдется открытый ε-шар $O_\varepsilon(x)$ с центром в x, содержащийся в U.* $\square$

10.4. Примеры. Если мы наделяем пространство $\mathbb{R}^n$ метрикой ρ, определяемой формулой (9.1), то базу топологии $\mathcal{T}_\rho$ образуют:

1) интервалы $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ длины 2ε с центрами в точках x прямой $\mathbb{R}$;

2) круги (без граничных окружностей) радиуса ε с центрами в точках x плоскости $\mathbb{R}^2$;

3) шары (без граничных сфер) радиуса ε с центрами в точках x пространства $\mathbb{R}^3$.

10.5. Предложение. *Если (X, ρ) — метрическое пространство и $Y \subset X$, то топологии $\mathcal{T}_\rho|_Y$ и $\mathcal{T}_{\rho|_Y}$ на Y совпадают.*

Доказательство сводится к несложной проверке того, что для всякой точки $y \in Y$ множество $O_\varepsilon(y) \cap Y$ совпадает с ε-окрестностью точки y в метрике $\rho|_Y$. $\square$

Метрические пространства дают нам большой запас топологических пространств, но не всякая топология порождается метрикой.

10.6. Пример. Топологии $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$ из Примера 8.2 (2) не являются метрическими топологиями.

§ 11. Топология линейного порядка.

11.1. Определение. Пусть $(X, <)$ — линейно упорядоченное множество. Семейство множеств $\mathcal{T}$:

1) $(a, b) = \{t \in X : a < t < b\}$, $a < b$, $a, b \in X$ (*открытые интервалы*),

2) $[a_0, b) = \{t \in X : a_0 \leq t < b\}$, где a_0 — наименьший элемент X, $a_0 < b$, $b \in X$ (*полуинтервалы*),

3) $(a, b_0] = \{t \in X : a < t \leq b_0\}$, где b_0 — наибольший элемент X, $a < b_0$, $a \in X$ (*полуинтервалы*)

образуют базу *порядковой топологии* на X.

Если в X отсутствует наименьший (наибольший) элемент, то в определении порядковой топологии отсутствуют полуинтервалы 2) (полуинтервалы 3)).

Топологию из Предложения 11.1 будем называть топологией, *порожденной линейным порядком*, или *топологией линейного порядка*.

11.2. Пример. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с лексикографическим порядком открытыми интервалами являются:

1) вертикальные интервалы $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$, если $x_1 = y_1$ и $x_2 < y_2$,

2) объединение вертикального луча $((x_1, x_2), (x_1, +\infty))$, вертикальных прямых $x = a$, $x_1 < a < y_1$ и вертикального луча $((y_1, -\infty), (y_1, y_2))$, если $x_1 < y_1$.

11.3. Предложение. *Пусть $(X, <)$ — линейно упорядоченное множество и $Y \subset X$. Если $\mathcal{T}$ — порядковая топология на $(X, <)$, $\mathcal{T}'$ порядковая топология на $(Y, <|_Y)$, то $\mathcal{T}'$ не обязана совпадать с $\mathcal{T}_Y$.*

Доказательство сводится к построению примера. $X = \mathbb{R}$, $Y = (0, 1) \cup \{2\}$. Тогда $\{2\}$ — открытое подмножество $(Y, \mathcal{T}_Y)$, а окрестности точки $\{2\}$ в пространстве $(Y, \mathcal{T}')$ имеют вид $(a, 1) \cup \{2\}$, где $0 < a < 1$. $\square$

Лекция 3.

Замыкание, внутренность и граница подмножества. Окрестность подмножества. Точка прикосновения. Предельная, внутренняя и граничная точки. Непрерывные отображения топологических пространств.

§ 12. Замыкание, внутренность и граница подмножества.

12.1. Определение. Пусть X — пространство и $M \subset X$. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M

$\bigcap\{F : F \text{ замкнуто в } X \text{ и } M \subset F\}$,

замкнутое согласно 8.1 (3'), называется *замыканием* множества M в X и обозначается через $\mathrm{Cl}_X(M)$ или $\mathrm{Cl}(M)$.

Отметим, что $\mathrm{Cl}(M)$ — наименьшее замкнутое подмножество пространства X, содержащее M.

Объединение всех открытых множеств, содержащихся в M

$\bigcup\{U : U \text{ открыто в } X \text{ и } U \subset M\}$,

открытое согласно 8.1.(3), называется *внутренностью* множества M в X и обозначается через $\mathrm{Int}_X(M)$ или $\mathrm{Int}(M)$.

Отметим, что $\mathrm{Int}(M)$ — наибольшее открытое подмножество пространства X, содержащееся в M.

$$\mathrm{Int}(M) \subset M \subset \mathrm{Cl}(M).$$

Подмножество M открыто (замкнуто) в X в том и только том случае, если $\mathrm{Int}(M) = M$ $(\mathrm{Cl}(M) = M)$.

12.2. Предложение. *Пусть X — пространство и $M \subset X$. Тогда* $\mathrm{Cl}(M) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus M)$.

Доказательство использует законы де Моргана.

$$\mathrm{Cl}(M) = \bigcap\{F : F \text{ замкнуто в } X \text{ и } M \subset F\} = \bigcap\{X \setminus U : U \text{ открыто в } X \text{ и } U \subset X \setminus M\} =$$

$$= X \setminus \bigcup\{U : U \text{ открыто в } X \text{ и } U \subset X \setminus M\} = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus M). \ \square$$

12.3. Определение. Пусть X — пространство и $M \subset X$. Множество $\mathrm{Cl}(M) \setminus \mathrm{Int}(M)$ называется *границей множества* M. Обозначение $\mathrm{Bd}(M)$.

12.4. Окрестности. Произвольное открытое множество, содержащее множество $M \subset X$, называется *окрестностью* множества M в пространстве X.

Окрестности множества M обычно обозначаются символом OM (Ox — окрестность точки x). Пересечение конечного числа окрестностей множества M является его окрестностью.

Если точка $x \in X$ имеет окрестность, состоящую из одной точки, то x называется *изолированной* точкой пространства X. Пространство X дискретно тогда и только тогда, когда все его точки изолированы.

12.5. Определение. Точка $x \in M$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset X$, если существует окрестность $Ox \subset M$.

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset X$, если $Ox \cap M \neq \varnothing$ для всякой окрестности Ox точки x.

Точка $x \in X$ называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если ее любая окрестность Ox содержит точку M, отличную от x.

Точка $x \in X$ называется *граничной точкой* множества M, если она — его точка прикосновения, но не внутренняя точка.

12.6. Предложение. *Множество всех внутренних точек (точек прикосновения, граничных точек) множества $M \subset X$ совпадает с* $\mathrm{Int}(M)$ *(*$\mathrm{Cl}(M)$, $\mathrm{Bd}(M)$ *соответственно).*

Доказательство приведем только первого утверждения. Из Определения 12.1 вытекает, что всякая внутренняя точка множества M принадлежит $\mathrm{Int}(M)$. Наоборот, если $x \in \mathrm{Int}(M)$, то $Ox = \mathrm{Int}(M) \subset M$. $\square$

§ 13. Непрерывные отображения топологических пространств.

13.1. Определение. Отображение $f : X \to Y$ пространства X в пространство Y называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности Oy точки $y = f(x)$ найдется такая окрестность Ox, что $f(Ox) \subset Oy$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

13.2. Предложение. *Для отображения $f : X \to Y$ следующие условия равносильны*:

1) f *непрерывно*;
2) *прообраз* $f^{-1}(U)$ *всякого открытого в* Y *множества* U *открыт в* X;
3) *прообраз* $f^{-1}(F)$ *всякого замкнутого в* Y *множества* F *замкнут в* X;
4) $f\big(\mathrm{Cl}(Z)\big) \subset \mathrm{Cl}\big(f(Z)\big)$ *для всякого множества* $Z \subset X$.

Доказательство. Проверим последовательность импликаций: 1) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 4). Возьмем $x \in \mathrm{Cl}(Z)$. Надо показать, что $f(x) \in \mathrm{Cl}\big(f(Z)\big)$, т.е. что $f(x)$ является точкой прикосновения множества $f(Z)$. В силу непрерывности f, для произвольной окрестности $Of(x)$ существует такая окрестность Ox, что $f(Ox) \subset Of(x)$. Поскольку $x \in \mathrm{Cl}(Z)$, имеем $Ox \cap Z \neq \varnothing$. Возьмем точку $z \in Ox \cap Z$. Тогда $f(z) \in f(Ox \cap Z) \subset f(Ox) \cap f(Z) \subset Of(x) \cap f(Z)$. Следовательно, $Of(x) \cap f(Z) \neq \varnothing$, т.е. $f(x) \in \mathrm{Cl}\big(f(Z)\big)$.

4) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что существует замкнутое множество $F \subset Y$, прообраз $f^{-1}(F)$ которого не замкнут в X. Существует точка

$$x \in \mathrm{Cl}\big(f^{-1}(F)\big) \setminus f^{-1}(F). \tag{13.1}$$

Из 4) вытекает, что $f(x) \in \mathrm{Cl}\big(f\big(f^{-1}(F)\big)\big) \subset \mathrm{Cl}(F) = F$. С другой стороны, $f(x) \notin F$ согласно (13.1). Получили противоречие.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) вытекает из равенства $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$. Наконец, 2) $\Rightarrow$ 1). Берем точку $x \in X$ и окрестность $Of(x)$. Множество $f^{-1}\big(Of(x)\big)$ открыто согласно 2). Поскольку $x \in f^{-1}\big(Of(x)\big)$, множество $f^{-1}\big(Of(x)\big)$ и является окрестностью Ox, для которой $f(Ox) = f\big(f^{-1}\big(Of(x)\big)\big) \subset Of(x)$. $\square$

Следующее утверждение дополняет Предложение 13.2.

13.3. Предложение. *Для непрерывности отображения $f : X \to Y$ достаточно, чтобы были открыты прообразы $f^{-1}(U)$ элементов U некоторой предбазы $\mathcal{B}$ пространства Y.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, а $Of(x)$ — произвольная окрестность. Существуют такие элементы $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}$, что $f(x) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \subset Of(x)$. Множества $f^{-1}(U_i)$ открыты по условию. Полагая $Ox = \bigcap\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i)$, имеем $f(Ox) \subset Of(x)$. $\square$

13.4. Правила построения непрерывных отображений. Пусть X, Y, Z — топологические пространства.

1. *Постоянное отображение* $f = \mathrm{const}_{y_0} : X \to Y$, переводящее все пространство X в точку $y_0 \in Y$ непрерывно. Прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества $U \subset Y$ либо пуст, либо равен X.

2. Пусть M — подмножество пространства $(X, \mathcal{T})$. Обозначим через $i_M : M \to X$ *отображение вложения*, т.е. отображение, ставящее в соответствие точке $x \in M$ ее саму. Отображение вложения $i_M : M \to X$ подпространства $(M, \mathcal{T}|_M)$ в $(X, \mathcal{T})$ непрерывно.

3. *Теорема о сложной функции.* Композиция $g \circ f : X \to Z$ непрерывных отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ непрерывна.

4. Ограничение $f|_M$ непрерывного отображения $f : X \to Y$ на подпространство $M \subset X$ непрерывно.

Утверждение вытекает из пунктов 2 и 3, и равенства $f|_M = f \circ i_M$.

5. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно, если X представимо в виде объединения открытых множеств $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha$ таких, что $f|_{O_\alpha}$ непрерывно для любого $\alpha \in \mathcal{A}$.

Очевидна непрерывность отображения в каждой точке пространства X.

6. Пусть пространство X является объединением конечного числа своих замкнутых подмножеств F_i, $i = 1, \ldots, k$, и пусть $f : X \to Y$ — такое отображение, что $f|_{F_i}$ непрерывно для каждого i. Тогда отображение f непрерывно.

Возьмем произвольное замкнутое множество $\Phi \subset Y$. Тогда

$$f^{-1}(\Phi) = \bigcup_{i=1}^{k} \big(f|_{F_i}\big)^{-1}(\Phi).$$

В самом деле, включение $\supset$ очевидно. Пусть теперь $x \in f^{-1}(\Phi)$. Тогда x принадлежит некоторому F_i и, значит, $x \in \big(f|_{F_i}\big)^{-1}(\Phi)$. Из условия 3) Предложения 13.2 и непрерывности отображений $f|_{F_i}$ вытекает замкнутость множеств $\big(f|_{F_i}\big)^{-1}(\Phi)$. Поэтому замкнуто и $f^{-1}(\Phi)$. Значит, f непрерывно согласно Предложению 13.2.

7. Произвольному топологическому пространству X можно сопоставить его дискретный дубликат X_d, т.е. пространство на том же множестве X, наделенное дискретной топологией (см. п. 8.1). Тогда тождественное отображение $\mathrm{id} : X_d \to X$ непрерывно.

Топология пространства X_d порождается метрикой Примера 9.2.3 ($x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) = 1$). Тем самым любое пространство является непрерывным образом метрического пространства.

8. Пусть $\mathcal{T}_1 \geq \mathcal{T}_2$ — топологиии на X. Тогда отображение $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ непрерывно.

13.5. Непрерывные отображения метрических пространств. Пусть (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$ *по Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$f\big(O_\delta(x_0)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(x_0)\big). \tag{13.1}$$

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

Из определения метрической топологии следует, что любое непрерывное отображение метрических пространств (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) является непрерывным отображением топлогических пространств $(X, \mathcal{T}_{\rho_1})$ и $(Y, \mathcal{T}_{\rho_2})$.

Для любой точки y метрического пространства (X, ρ) отображение $\rho_y : X \to \mathbb{R}$, $\rho_y(x) = \rho(y, x)$ (расстояние до фиксированной точки) непрерывно. Действительно, если $x' \in O_\epsilon(x)$, то используя неравенства треугольника $\rho(y, x') \leq \rho(y, x) + \rho(x, x')$ и $\rho(y, x) \leq \rho(y, x') + \rho(x, x')$, имеем $|\rho_y(x) - \rho_y(x')| = |\rho(y, x') - \rho(y, x)| \leq \rho(x, x') < \epsilon$.

13.6. Определение. Пусть X — метрическое пространство и $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность точек $x_n \in X$. Говорят, что последовательность ξ *сходится* к точке $x \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$x_n \in O_\varepsilon(x) \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0.$$

13.7. Определение непрерывности по Гейне. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для всякой последовательности $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$, сходящейся к точке x_0, последовательность $f(\xi) = \big(f(x_n) : n \in \mathbb{N}\big)$ сходится к точке $f(x_0)$.

13.8. Теорема. *Определения непрерывности отображения* $f : X \to Y$ *в точке* $x_0 \in X$ *по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Пусть f непрерывно в точке x_0 по Коши и пусть $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность, сходящаяся к точке x_0. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое $\delta > 0$, что выполнено условие Определения 14.1. Поскольку ξ сходится к x_0, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$x_n \in O_\delta(x_0) \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0.$$

Но тогда

$$f(x_n) \in f\big(O_\delta(x_0)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0.$$

Следовательно, $f(\xi)$ сходится к $f(x_0)$.

Наоборот, пусть f непрерывно в точке x_0 по Гейне. Возьмем $\delta_n = 1/n$. Если f не является непрерывным в точке x_0 по Коши, то для некоторого $\varepsilon > 0$ и для каждого n существует такая точка $x_n \in O_{\delta_n}(x_0)$, что $f(x_n) \notin O_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$. Тогда последовательность $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к x_0, но последовательность $f(\xi) = \big(f(x_n) : n \in \mathbb{N}\big)$ не сходится к $f(x_0)$, поскольку $f(\xi) \cap O_\varepsilon\big(f(x_0)\big) = \varnothing$. Получили противоречие. $\square$

Лекция 4.

Гомеоморфизм. Слабая (инициальная) топология относительно семейства отображений.

§ 14. Гомеоморфизм.

14.1. Определение. Пусть $f : X \to Y$ — взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y. Пусть, кроме того, непрерывны отображение f и обратное к нему отображение f^{-1}. Тогда f называется *гомеоморфизмом,* а пространства X и Y — *гомеоморфными.*

14.2. Примеры.

1. Все отрезки числовой прямой гомеоморфны отрезку $[0,1]$.

2. Все интервалы числовой прямой гомеоморфны интервалу $(0,1)$.

3. *Открытым диском* в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ радиуса r_0 называется множество

$$D^n_{\mathbf{x}_0, r_0} = \Big\{\mathbf{x} = \big(x_1, \dots, x_n\big) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \big(x_i - x_i^0\big)^2 < r_0^2\Big\}.$$

Открытый диск с центром в начале координат и радиуса 1 будем обозначать через D^n.

Доказать, что все открытые диски в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны диску D^n.

4. *Диск D^n гомеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D^n$ положим

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \operatorname{tg}\big(\frac{\pi}{2}\|\mathbf{x}\|\big) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, & \text{если } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, & \text{если } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

где $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^2}$. Ясно, что $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ — биекция.

Обратное отображение $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to D^n$ задается следующим образом:

$$f^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\big(\|\mathbf{x}\|\big) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, & \text{если } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, & \text{если } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases} \qquad \square$$

Непрерывность отображений f и f^{-1} доказывается с помощью следующего утверждения, которое надо применить к функциям $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$ и $\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\left(t\right)}{t}$, естественно доопределенными в точке 0:

Утверждение. *Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, задаваемое формулой*

$$f(\mathbf{x}) = g\big(||\mathbf{x}||\big) \cdot \mathbf{x},$$

непрерывно.

Доказательство. Метрика на $\mathbb{R}^n$ порождена нормой $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^2}$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D^n$.

Норма $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||$ — непрерывное отображение. Значит и композиция отображений $|| \cdot ||$ и g — непрерывна.

Проверим непрерывность отображения f в точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Пусть $M > 0$ и окрестность $O_{\delta'}(\mathbf{x_0})$ такие, что $g(||\mathbf{x}||) < M$ для любой точки $\mathbf{x} \in O_{\delta'}(\mathbf{x_0})$.

Для $\epsilon > 0$ выберем $O_{\delta''}(\mathbf{x_0})$ так, что $|g(||\mathbf{x}||) - g(||\mathbf{x_0}||)| < \frac{\epsilon}{2||\mathbf{x_0}||}$ для $\mathbf{x} \in O_{\delta''}(\mathbf{x_0})$. Положим, $\delta = \min\{\delta', \frac{\epsilon}{2M}, \delta''\}$. Тогда для $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x_0})$ имеем

$$||f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x_0})|| = ||g\big(||\mathbf{x}||\big)\cdot\mathbf{x}-g\big(||\mathbf{x_0}||\big)\cdot\mathbf{x_0}|| \leq ||g\big(||\mathbf{x}||\big)\cdot\mathbf{x}-g\big(||\mathbf{x}||\big)\cdot\mathbf{x_0}||+||g\big(||\mathbf{x}||\big)\cdot\mathbf{x_0}-g\big(||\mathbf{x_0}||\big)\cdot\mathbf{x_0}|| =$$

$$= |g\big(||\mathbf{x}||\big)| \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|| + |g\big(||\mathbf{x}||\big) - g\big(||\mathbf{x_0}||\big)| \cdot ||\mathbf{x_0}|| < M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2||\mathbf{x_0}||} \cdot ||\mathbf{x_0}|| < \epsilon.$$

Непрерывность отображения f в точке $\mathbf{x}_0$ установлена.

Непрерывность отображения f в точке $\mathbf{0}$ проверить самостоятельно. □

5. Пусть S^{n-1} — сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1 с центром в начале координат, т.е.
$S^{n-1} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\big\}$.

Множество $E_{n-1} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} : x_n = 0\big\}$ назовем *экватором* сферы S^{n-1}. Экватор разбивает сферу S^{n-1} на две полусферы S_+^{n-1} и S_-^{n-1}:
$S_+^{n-1} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} : x_n > 0\big\}$;
$S_-^{n-1} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} : x_n < 0\big\}$.
Эти полусферы гомеоморфны.

6. Диск D^{n-1} гомеоморфен полусфере S_+^{n-1}. Гомеоморфизм $h : D^{n-1} \to S_+^{n-1}$ определяется равенством
$h\big(x_1, \ldots, x_{n-1}\big) = \Big(x_1 \ldots, x_{n-1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}\Big)$.
Обратное отображение h^{-1} задается равенством
$h^{-1}\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\big) = \big(x_1, \ldots, x_{n-1}\big)$.

§ 15. Слабая (инициальная) топология относительно семейства отображений.

15.1. Определение. Пусть $f_\alpha : X \to Y_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, — семейство отображений множества X в пространства Y_α. Тогда семейство

$$\big\{f_\alpha^{-1}(U) : U \text{ открыто в } Y_\alpha,\ \text{для некоторого } \alpha \in \mathcal{A}\big\}$$

является покрытием множества X и согласно Предложению 9.7 — предбазой некоторой топологии $\mathcal{T}$ на X. Относительно этой топологии все отображения f_α непрерывны в силу Предложения 14.3. При этом, $\mathcal{T}$ — наименьшая (слабейшая) топология на X, обладающая этим свойством. Назовем $\mathcal{T}$ *слабой* или *инициальной топологией относительно семейства отображений* $\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Легко видеть, что в определении достаточно ограничиться открытыми множествами $U \subset Y_\alpha$ из некоторой базы пространства Y_α.

15.2. Примеры.

1. Пусть M — подмножество пространства $(X, \mathcal{T})$, $i_M : M \to X$ отображение вложения. Тогда слабая топология на M относительно вложения i_M совпадает с топологией $\mathcal{T}|_M$, индуцированной топологией $\mathcal{T}$ в M (топологией подпространства).

2. Пусть $\mathcal{T}_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, — семейство топологий на множестве X, $\mathrm{id}_\alpha : X \to X_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, — семейство тождественных отображений множества X в пространства X_α. Тогда на X определена *точная верхняя грань семейства топологий* $\mathcal{A}$ как слабая топология относительно семейства отображений $\{\mathrm{id}_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

15.3. Предложение. Пусть $f_\alpha : X \to Y_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, — семейство отображений пространства $(X, \mathcal{T})$ в пространства Y_α. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{T}$ — слабая топология на X относительно семейства отображений $f_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$,

2) для любого пространства Z его отображение $f : Z \to X$ непрерывно в том и только том случае, если отображения $f_\alpha \circ f : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывны.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Необходимость в условии 2) следует из непрерывности отображений $f_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, и их композиции с f. Достаточность. Пусть множество O открыто в X. Тогда O по Определению 16.1 является конечным пересечением множеств $f_{\alpha_i}^{-1}(O_{\alpha_i})$, $i = 1, \ldots, k$. Так как

$$f^{-1}O = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}^{-1}(O_{\alpha_i})) = \bigcap_{i=1}^{k} f^{-1}(f_{\alpha_i}^{-1}(O_{\alpha_i})) = \bigcap_{i=1}^{k}(f_\alpha \circ f)^{-1}(O_{\alpha_i}),$$

то $f^{-1}O$ открыто.

2) $\Longrightarrow$ 1). Так как тождественное отображение id пространства $(X, \mathcal{T})$ в $(X, \mathcal{T})$ — гомеоморфизм, то по условию 2) композиции $f_\alpha \circ \mathrm{id}$ непрерывны, $\alpha \in \mathcal{A}$. Значит и отображения f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывны, так как для любого открытого подножества $O_\alpha \subset Y_\alpha$ имеем

$$f_\alpha^{-1}(O_\alpha) = \mathrm{id}((f_\alpha \circ \mathrm{id})^{-1}(O_\alpha)),$$

и множество $(f_\alpha \circ \mathrm{id})^{-1}(O_\alpha)$ открыто в X, $\alpha \in \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{T}'$ — слабая топология на X относительно семейства отображений $f_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ композиция $f_\alpha \circ \mathrm{id} : X \to Y_\alpha$ тождественного отображения $(X, \mathcal{T}')$ в $(X, \mathcal{T})$ и $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ непрерывна ($\mathcal{T}'$ — слабая топология на X относительно семейства отображений $f_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, а на множестве X отображения f_α и $f_\alpha \circ \mathrm{id}$ совпадают). По условию 2) тождественное отображение $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ непрерывно, т.е. любое множество, открытое в $(X, \mathcal{T})$, открыто в $(X, \mathcal{T}')$. Значит $\mathcal{T}' \geq \mathcal{T}$. Но на пространстве $(X, \mathcal{T})$ отображения $f_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, непрерывны. Тем самым, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, ведь $\mathcal{T}'$ — наименьшая среди топологий на X, в которой отображения f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывны. $\square$

Лекция 5.

Тихоновская топология произведения. Произведения отображений. Финальная топология относительно семейства отображений. Сумма пространств и суммы отображений.

§ 16. Тихоновская топология произведения.

16.1. Определение. Пусть сомножители X_α произведения $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ являются топологическими пространствами. Тогда на множестве X можно рассмотреть слабую топологию, относительно семейства проекций $pr_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Эта топология называется *тихоновской* топологией произведения. Множество X с этой топологией называется *топологическим*, или *тихоновским*, или просто произведением пространств X_α.

Согласно Определению 15.1 предбазу пространства X образуют всевозможные множества вида $pr_\alpha^{-1}(U)$, где U берется из некоторой базы пространства X_α, а базу, следовательно, — всевозможные их конечные пересечения
$pr_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap pr_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})$.

16.2. Примеры.

1. Плоскость $\mathbb{R}^2$ гомеоморфна произведению $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ числовых прямых.

2. Рассмотрим в пространстве E^3 прямоугольную систему координат $Oxyz$ и определим *тор* T^2 как поверхность вращения окружности

$$\begin{cases} (x-2)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

вокруг оси Oz.

Задача. Тор T^2 гомеоморфен произведению $S^1 \times S^1$ окружностей.

Из Предложения 15.3 следует.

16.3. Следствие. *Пусть X — произведение пространств $X_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$. Отображение $f : Z \to X$ непрерывно в том и только том случае, если все композиции $pr_\alpha \circ f : Z \to X_\alpha$ непрерывны.*

16.4. Предложение. *Произведение подпространств $Y_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, совпадает с подпространством $\bigcap\big\{pr_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\big\}$ произведения $X = \prod\big\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\big\}$.*

Доказательство. Имеем
$Y = \prod\big\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\big\} = \{x \in X : x(\alpha) \in Y_\alpha\} = \bigcap\big\{pr_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\big\} \subset \prod\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.
Пусть $q_\alpha = pr_\alpha|_Y : Y \to Y_\alpha$. Предбазу топологии пространства $\bigcap\big\{pr_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\big\}$ образуют множества $Y \cap pr_\alpha^{-1}(U)$, где U открыто в X_α. Но $Y \cap pr_\alpha^{-1}(U) = q_\alpha^{-1}(U \cap Y_\alpha)$, а множества $q_\alpha^{-1}(U \cap Y_\alpha)$ образуют предбазу топологии $\prod\big\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\big\}$.
$\square$

16.5. Определение (произведения отображений). Пусть $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, — отображения. Тогда отображение $f : \prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$, определяемое равенствами $f(x)(\alpha) = f_\alpha\big(x(\alpha)\big), \alpha \in \mathcal{A}$, называется *произведением отображений* f_α и обозначается через $\prod\big\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\big\}$.

Если множество индексов конечно: $A = \{1, \ldots, k\}$, то произведение отображений обозначается через $f_1 \times \ldots \times f_k$.

16.6. Предложение. *Произведение f непрерывных отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, непрерывно.*

Доказательство. Обозначим через q_α проекцию произведения $Y = \prod\{Y_{\alpha'} : \alpha' \in \mathcal{A}\}$ на сомножитель Y_α. Из Определения 16.5 вытекает равенство

$$q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ pr_\alpha. \tag{16.1}$$

Отображение $f_\alpha \circ pr_\alpha$ непрерывно как композиция непрерывных отображений. Тогда непрерывность отображения f вытекает из (16.1) и Предложения 15.3. □

16.7. Определение (диагонального произведения отображений). Пусть $f_\alpha : X \to Y_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, — отображения. Тогда отображение $f : X \to \prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, определяемое равенствами $f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$, называется *диагональным произведением отображений* f_α и обозначается через $\Delta\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

В случае конечного множества индексов пишем $f = f_1\Delta \ldots \Delta f_k$.

16.8. Предложение. *Диагональное произведение f непрерывных отображений непрерывно.*

Доказательство. Как и в случае произведения отображений, применяем Предложение 15.3, поскольку $q_\alpha \circ f = f_\alpha$. □

§ 17. Финальная топология относительно семейства отображений.

17.1. Определение. Пусть $f_\alpha : X_\alpha \to Y,\ \alpha \in \mathcal{A}$, — семейство отображений пространств X_α в множество Y. Тогда легко проверить, что семейство

$$\left\{U : f_\alpha^{-1}(U) \text{ открыто в } X_\alpha, \text{ для любого } \alpha \in \mathcal{A}\right\}$$

является топологией $\mathcal{T}$ на Y. Относительно этой топологии все отображения f_α непрерывны. При этом, $\mathcal{T}$ — наибольшая (сильнейшая) топология на Y, обладающая этим свойством. Назовем $\mathcal{T}$ *финальной топологией относительно семейства* $\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

17.2. Пример.

Пусть $\mathcal{T}_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, — семейство топологий на множестве X, $\mathrm{id}_\alpha : X_\alpha \to X,\ \alpha \in \mathcal{A}$, — семейство тождественных отображений пространств X_α на множество X. Тогда на X определена *точная нижняя грань семейства топологий* $\mathcal{A}$ как финальная топология относительно семейства $\{\mathrm{id}_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

17.3. Предложение. Пусть $f_\alpha : X_\alpha \to Y,\ \alpha \in \mathcal{A}$, — семейство отображений пространств X_α в пространство $(X, \mathcal{T})$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{T}$ — финальная топология на Y относительно семейства отображений $f_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$,

2) для любого пространства Z отображение $f : Y \to Z$ непрерывно в том и только том случае, если отображения $f \circ f_\alpha : X_\alpha \to Z$, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывны.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Необходимость в условии 2) следует из непрерывности отображений $f_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}$, и их композиции с f. Достаточность. Пусть множество O открыто в Z. Тогда множество

$$(f \circ f_\alpha)^{-1}O = f_\alpha^{-1}(f^{-1}(O))$$

открыто в X_α для любого $\alpha \in \mathcal{A}$. По Определению 17.1 множество $f^{-1}(O)$ открыто в Y. Тем самым отображение f непрерывно.

2) $\Longrightarrow$ 1). Так как тождественное отображение id пространства $(Y, \mathcal{T})$ в $(Y, \mathcal{T})$ — гомеоморфизм, то по условию 2) композиции $\mathrm{id} \circ f_\alpha$ непрерывны, $\alpha \in \mathcal{A}$. Значит и отображения f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывны так как для любого открытого подножества $O \subset Y$ имеем

$$f_\alpha^{-1}(O) = (\mathrm{id} \circ f_\alpha)^{-1}(\mathrm{id}(O)),$$

и множество $(\mathrm{id} \circ f_\alpha)^{-1}(\mathrm{id}(O))$ открыты в X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{T}'$ — финальная топология на Y относительно семейства отображений f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ композиция $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ и тождественного отображения $(Y, \mathcal{T})$ в $(Y, \mathcal{T}')$ непрерывна ($\mathcal{T}'$ — финальная топология на Y относительно семейства отображений f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, а на X_α отображения f_α и $\mathrm{id} \circ f_\alpha$ в множество Y совпадают). По условию 2) тождественное отображение непрерывно, т.е. любое множество, открытое в $(Y, \mathcal{T}')$, открыто в $(Y, \mathcal{T})$. Значит $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}'$. Но отображения f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, в пространство $(Y, \mathcal{T})$ непрерывны. Тем самым, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, ведь $\mathcal{T}'$ — наибольшая среди топологий на Y, в которой отображения f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывны. $\square$

§ 18. Сумма пространств и суммы отображений.

18.1. Определение. Пусть X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, — дизъюнктное семейство топологических пространств. Рассмотрим множество $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ и семейство вложений $i_\alpha : X_\alpha \to X$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Множество X с финальной топологией относительно семейства вложений i_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ называется *суммой пространств* $X_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$, и обозначается через $\bigoplus\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ или через $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k$, если $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ конечно.

Множество $O \subset \oplus\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ открыто тогда и только тогда, когда $O \cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$. Множество $F \subset \oplus\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $F \cap X_\alpha$ замкнуто в X_α для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$. Все множества X_α открыто-замкнуты в $\oplus\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

18.2. Прямая сумма отображений. Пусть даны суммы $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ и $Y = \oplus\{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ топологических пространств X_α и Y_α и отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$. Тогда существует единственное отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее соотношениям

$$f \circ i_{X_\alpha} = i_{Y_\alpha} \circ f_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

где $i_{X_\alpha} : X_\alpha \to X$, $i_{Y_\alpha} : Y_\alpha \to Y$ — отображения вложения. Отображение f называется *прямой суммой* отображений f_α и обозначается через $\oplus\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

18.3. Предложение. *Прямая сумма f отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывна тогда и только тогда, когда всякое отображение f_α непрерывно.*

Доказательство. Достаточность следует из непрерывности композиций $i_{Y_\alpha} \circ f_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, и Предложения 17.3. Необходимость. Так как $f \circ i_{X_\alpha}$ непрерывно, то композиция $i_{Y_\alpha} \circ f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывна. Если O_α открыто в Y_α, то $i_{Y_\alpha}(O_\alpha)$ открыто в Y и $i_{X_\alpha}^{-1}(f^{-1}(i_{Y_\alpha}(O_\alpha))) = f_\alpha^{-1}(i_{Y_\alpha}^{-1}(i_{Y_\alpha}(O_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(O_\alpha)$ открыто в X_α. Тем самым, отображения f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывны. $\square$

18.4. Сумма отображений. Для семейства пространств X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, и семейства отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $\alpha \in \mathcal{A}$, в пространство Y существует единственное отображение $f : \oplus\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \to Y$, удовлетворяющее соотношениям

$$f \circ i_{X_\alpha} = f_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}. \tag{18.1}$$

Отображение f называется *суммой отображений* f_α и обозначается через $\sum\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

18.5. Предложение. *Сумма f отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывна тогда и только тогда, когда всякое отображение f_α непрерывно.*

Доказательство. Если отображение f непрерывно, то согласно (18.1) каждое отображение f_α непрерывно как композиция непрерывных отображений i_{X_α} и f. Достаточность следует из Предложения 17.3. $\square$

Лекция 6.

Факторпространство. Факторное отображение. Канторово совершенное множество. Кривая Пеано.

§ 19. Факторпространства и факторные отображения.

19.1. Определение. Пусть $f : X \to Y$ — отображение пространства X на множество Y. Финальная топология относительно отображения f

$\mathcal{T} = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \quad \text{открыто в } X\}$

называется *факторной топологией* (или *фактортопологией*), пространство $(Y, \mathcal{T})$ — *факторпространством* пространства X, а f — *факторным отображением.* Очевидно, что фактортопология является сильнейшей среди всех топологий на X, для которых отображение $f : X \to Y$ непрерывно.

19.2. Примеры. Факторные отображения естественно возникают при разбиениях пространства X на непересекающиеся множества.

1) Возьмем разбиения $\mathcal{R}$ числовой прямой $\mathbb{R}$ на два множества $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ иррациональных и рациональных чисел соответственно. Тогда фактормножество $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ состоит из двух точек a и b. Что касается фактортопологии, это топология “слипшегося двоеточия”, т.е. слабейшая топология $\{\varnothing,\ \mathbb{R}/\mathcal{R}\}$ на фактормножестве.

2) Разобьем квадрат $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ с вершинами $(0,0), (0,1), (1,0)$ и $(1,1)$ на вертикальные отрезки. Получающееся факторпространство гомеоморфно отрезку $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

3) *Вещественное проективное пространство* $\mathbb{R}P^n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, — факторпространство сферы S^n по ее разбиению на пары диаметрально противоположных точек $((x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (-x_1, \ldots, -x_{n+1}))$.

19.3. Стягивание пространств.

Факторизация пространства X по разбиению на множество $A \subset X$ и одноточечные множества дополнения $X \setminus A$ называется *стягиванием* множества A в точку. Обозначение факторпространства X/A.

19.4. Примеры.

1) Разбиение $\mathcal{R}$ отрезка $[0,1]$ на одноточечные множества интервала $(0,1)$ и двухточечного множества $\{0,1\}$ (стягивание концов отрезка в точку). Тогда факторпространство $[0,1]/\{0,1\}$ гомеоморфно окружности S^1.

2) Разбиение $\mathcal{R}$ замкнутого круга

$B^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

состоит из одноточечных множеств диска $D^2 \subset B^2$ и граничной окружности $S^1 = B^2 \setminus D^2$ (стягивание окружности в точку). Тогда факторпространство B^2/S^1 гомеоморфно сфере S^2.

19.5. Склеивание пространств. Пусть X, Y — топологические пространства, A — подмножество пространства X, $f : A \to Y$ — непрерывное отображение. Возьмем сумму $X \oplus Y$ и рассмотрим ее разбиение $\mathcal{R}$ на одноточечные множества $i_X(X \setminus A)$ и $i_Y(Y \setminus f(A))$, и множества $i_Y(x) \cup i_X(f^{-1}(x))$, $x \in f(A)$. Факторпространство $X \oplus Y/\mathcal{R}$ обозначается через $X \cup_f Y$, а описанная процедура его построения называется *приклеиванием X к Y посредством* отображения f.

19.6. Пример.

Букетом пространств X и Y с отмеченными точками $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ является приклеивание X к Y посредством отображения $f : \{x_0\} \to \{y_0\}$. Обозначение: $X \vee Y$.

§ 20. Канторово совершенное множество. Кривая Пеано.

Канторово совершенное множество имеет большое принципиальное значение и многочисленные применения.

Возьмем отрезок $I = [0, 1]$ числовой прямой и назовем его отрезком нулевого ранга. На нем возьмем два отрезка $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ и $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$ и назовем их отрезками первого ранга. Интервал $J = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ назовем интервалом первого ранга. С каждым из отрезков I_0 и I_1 поступим так же, как и с отрезком I, а именно на I_0 и I_1 возьмем по два отрезка второго ранга, т.е.

$I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $\quad I_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$,

$I_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $\quad I_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$.

Между ними лежат интервалы второго ранга

$J_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $\quad J_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$.

Продолжаем это построение. Пусть построены 2^n отрезков n-го ранга $I_{i_1 \ldots i_n}$ (каждый из индексов принимает значения 0 или 1). Каждый из отрезков $I_{i_1 \ldots i_n}$ разделим на три равные по длине части: два крайних отрезка $I_{i_1 \ldots i_n 0}$ и $I_{i_1 \ldots i_n 1}$ (первая и третья трети отрезка $I_{i_1 \ldots i_n}$) и лежащий между ними интервал $J_{i_1 \ldots i_n}$.

Объединение всех отрезков n-го ранга обозначим через C_n. Это — подмножество отрезка I, дополнение к которому состоит из всех интервалов ранга $\leq n$. Поэтому пересечение

$C = \bigcap\{C_n : n = 1, 2 \ldots\}$

имеет своим дополнением (в отрезке I) объединение всех интервалов $J_{i_1 \ldots i_n}$ всевозможных рангов. Различные интервалы этого семейства попарно не пересекаются. Отсюда, в частности, следует, что концы всех интервалов $J_{i_1 \ldots i_n}$ принадлежат множеству C. Кроме того, C содержит точки 0 и 1. Множество C и называется *канторовым совершенным множеством* или *канторовым дисконтинуумом.*

Топологические свойства канторова множества C (как подпространства прямой), связанные со словами "совершенное" и "дисконтинуум", будут обсуждаться после ознакомления с элементами топологии. Сейчас докажем, что множество C имеет мощность континуума.

20.1. Предложение. *Канторово множество C имеет мощность континуума.*

Доказательство. Различные отрезки n-го ранга не пересекаются. Поэтому каждая точка $x \in C$ принадлежит единственному отрезку $I_{i_1 \ldots i_n}$ n-го ранга. Следовательно, каждой точке $x \in C$ однозначно соответствует последовательность отрезков

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots,$$

значит, и последовательность индексов

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots. \tag{20.1}$$

Таким образом, сопоставляя каждой точке $x \in C$ последовательность (20.1), получаем отображение g, которое, как только что показано, инъективно, а по лемме о последовательности вложенных стягивающих отрезков сюръективно, т.е. является отображением "на". Следовательно f есть биекция. Предложение 7.3 Лекции 1 завершает доказательство. $\square$

20.2. Предложение. *Канторово множество C гомеоморфно тихоновскому произведению $2^{\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Покажем, что отображение g канторова множества в произведение $2^{\mathbb{N}}$ с тихоновской топологией (определенное в Предложении 20.1) непрерывно. Для любого $n \in \mathbb{N}$ композиция g и проекции pr_n на n сомножитель является отображением C в дискретное двоеточие $\{0, 1\}$. Прообраз нуля — пересечение C с объединением отрезков n-ранга в индексации $i_1, i_2, \ldots, i_n$ которых $i_n = 0$, прообраз единицы — пересечение C с объединением отрезков n-ранга в индексации $i_1, i_2, \ldots, i_n$ которых $i_n = 1$. Оба множества открыто-замнуты в C. Значит $\mathrm{pr}_n \circ g$ — непрерывно. Для доказательства непрерывности g остается применить Следствие 16.3.

Канторово множество C компактно (по критерию компактности в $\mathbb{R}^n$) и непрерывная биекция компакта — гомеоморфизм (об этом речь будет позже). $\square$

В Предложении 7.3 определено сюръективное отображение $f : 2^{\mathbb{N}} \to I = [0, 1]$. Точке произведения (i_n) ставится в соответствие точка $t \in I$, с двоичной записью $t = 0, i_1 i_2 \ldots i_k \ldots$.

20.3. Предложение. $f : 2^{\mathbb{N}} \to I = [0, 1]$ *— непрерывное отображение.*

Доказательство. Для точки $(i_k) \in 2^{\mathbb{N}}$ и окрестности $O = (t - \frac{1}{2^n}, t + \frac{1}{2^n})$ ее образа t, множество $U = \bigcap\{\mathrm{pr}_k^{-1} i_k : k = 1, \ldots, n+1\}$ является открытой окрестностью (i_k) в $2^{\mathbb{N}}$, и $f(U) \subset O$. Отсюда следует непрерывность f в произвольной точке $(i_k) \in 2^{\mathbb{N}}$, а значит и на $2^{\mathbb{N}}$. $\square$

20.4. Теорема (Кривая Пеано). *Существует непрерывное отображение отрезка на квадрат.*

Доказательство. Так как $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно $2^{\mathbb{N}}$, то по Предложениям 20.2 и 20.3 отображение $(f \circ g) \times (f \circ g)$ является сюръекцией канторова множества C на квадрат I^2. Обозначим ее F.

Рассматривая канторово множество C как подмножество отрезка I, а квадрат как подмножество $\mathbb{R}^2$, продолжим отображение F на отрезок. Отображение F определено на концах $x < y$ интервала J и интервалов $J_{i_1 \ldots i_k}$. Для $t \in J_{i_1 \ldots i_k}$ (или J) положим $\tilde{F}(t) = \frac{t-x}{y-x} F(x) + \frac{y-t}{y-x} F(y)$. Очевидна непрерывность ограничения $\tilde{F}$ на отрезки, являющиеся замыканием интервала J и интервалов $J_{i_1 \ldots i_k}$. Значит, $\tilde{F}$ непрерывно в точках дополнения до C.

Пусть $x \in C$. Для ε-окрестности $O_\varepsilon(\tilde{F}(x))$ ее образа, которая является выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^2$, существует отрезок $I_{i_1 \ldots i_k}$ такой, что $F(C \cap I_{i_1 \ldots i_k}) \subset O_\varepsilon(\tilde{F}(x))$ (так как F — непрерывное отображение). Тогда образы всех интервалов $J_{i_1 \ldots i_k \ldots i_m}$, содержащихся в $I_{i_1 \ldots i_k}$, при отображении $\tilde{F}$ содержатся в $O_\varepsilon(\tilde{F}(x))$ (образ каждого интервала — интервал с концами в точках, принадлежащих $O_\varepsilon(\tilde{F}(x))$. Если x не является концом отрезка $I_{i_1 \ldots i_k}$, то его внутренность является окрестностью точки t, образ которой принадлежит $O_\varepsilon(\tilde{F}(x))$, и непрерывность $\tilde{F}$ в этой точке доказана.

Пусть x — конец отрезка $I_{i_1 \ldots i_k}$. Тогда она является концом отрезка I', являющегося замыканием интервала, смежного к отрезку $I_{i_1 \ldots i_k}$. Так как $\tilde{F}$ непрерывно на I', то существует окрестность x в I' (в частности, полуинтервал $[x, t)$ или $(t, x]$), образ которого при отображении $\tilde{F}$ содержится в $O_\varepsilon(\tilde{F}(x))$. Тем самым внутренность множества $[x, t) \cup I_{i_1 \dots i_k}$ или $(t, x] \cup I_{i_1 \dots i_k}$ является окрестностью точки x и ее образ принадлежит $O_\varepsilon(\tilde{F}(x))$. Непрерывность отображения $\tilde{F}$ в данной точке также доказана. $\square$

Лекция 7.

Аксиомы счетности. Сепарабельность. Аксиомы отделимости.

§ 21. Аксиомы счетности. Сепарабельность.

21.1. Определение. Топологическое пространство X называется *метризуемым*, если на X существует такая метрика ρ, что метрическая топология $\mathcal{T}_\rho$ совпадает с топологией пространства X.

21.2. Определение. Пространство X удовлетворяет *первой аксиоме счетности в точке* x, если существует счетное семейство $\mathcal{B}$ окрестностей точки X такое, что в любой окрестности точки x содержится по крайней мере одна окрестность из $\mathcal{B}$.

Пространство X удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если X удовлетворяет первой аксиоме счетности во всех точках $x \in X$.

Метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности. Прямая Зоргенфрея удовлетворяет первой аксиоме счетности. Прямая в топологии Зариского не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

21.3. Определение. Если пространство имеет счетную базу, то говорят, что оно удовлетворяет *второй аксиоме счетности.*

Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счетности.

Прямая со стандартной топологией удовлетворяет второй аксиоме счетности. Несчетное дискретное пространство не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

21.4. Теорема. *Подпространство пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, удовлетворяет первой аксиоме счетности. Счетное произведение пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Подпространство пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, удовлетворяет второй аксиоме счетности. Счетное произведение пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Доказательство. Докажем второе утверждение.

Пусть $\mathcal{B}$ — счетная база X, $Y \subset X$. Легко видеть, что семейство $\{X \cap U : U \in \mathcal{B}\}$ — база Y.

Тихоновская топология произведения инициальна относительно проекций, и ее предбазу образуют прообразы элементов из баз сомножителей относительно проектирований. Так как сомножителей счетное число, то в предбазе счетное число элементов, и порождаемая ею база счетна. $\square$

21.5. Определение. Подмножество Z топологического пространства X называется *всюду плотным* в X, если $\mathrm{Cl}(Z) = X$.

Пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное подмножество.

Если X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно сепарабельно (всюду плотным будет подмножество точек, взятых по одной из каждого элемента счетной базы).

21.6. Теорема. *Счетное произведение сепарабельных пространств сепарабельно.*

Доказательство. Пусть D_n — счетное плотное подмножество пространств X_n, $d_n \in D_n$ — фиксированная точка, $n \in \mathbb{N}$. Положим, $A_n = D_1 \times \dots \times D_n \times \{d_{n+1}\} \times \dots$, $n \in \mathbb{N}$. Легко проверяется, что семейство $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ является счетным и всюду плотно в произведении. $\square$

21.7. Теорема. *Метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности в том и только том случае, если оно сепарабельно.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть ρ — метрика на X, порождающая его топологию, S — счетное всюду плотное подмножество X. Покажем, что базу топологии X образует семейство открытых шаров

$$\mathcal{B} = \{O_q(s),\ s \in S,\ q \in \mathbb{Q}\}.$$

Семейство $\mathcal{B}$ — подсемейство базы топологии. Пусть O — открытое подмножество X. Для завершения доказательства достаточно показать, что для любой точки $x \in O$ существует $U \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in U \subset O$.

Существует $q \in \mathbb{Q}$ такое, что $O_q(x) \subset O$. Возьмем $s \in S \cap O_{\frac{q}{2}}(x)$ и шар $O_{\frac{q}{2}}(s)$. Тогда $x \in O_{\frac{q}{2}}(s) \subset O_q(x)$. $\square$

§ 22. Аксиомы отделимости.

22.1. Топологическое пространство X является T_0-*пространством* или удовлетворяет *аксиоме отделимости Колмогорова*, если для любых двух различных точек x и y пространства X по крайней мере одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.

Множество из более чем двух точек с антидискретной топологией (например "слипшееся двоеточие" (Пример 8.2.2 Лекции 2)) является примером пространства, не удовлетворяющего аксиоме T_0.

22.2. Пространство X называется T_1-*пространством*, если для любых различных точек x и y пространства X существуют окрестность Ox, не содержащая точки y, и окрестность Oy, не содержащая точки x.

"Связное двоеточие", т.е. пространство $X = \{a, b\}$, в котором открыты множества $\varnothing$, $\{a\}$, X (Пример 8.2.2 Лекции 2), есть T_0-пространство, не являющееся T_1-пространством.

Пространство X есть T_1-пространство тогда и только тогда, когда все одноточечные подмножества X замкнуты. Среди топологий на множестве X, в которых X является T_1-пространством, существует наименьшая. Это топология конечных дополнений (Пример 8.2.4 Лекции 2).

22.3. Пространство X называется *хаусдорфовым* или T_2-*пространством*, если для всякой пары различных точек из X существуют непересекающиеся их окрестности.

Бесконечное множество, снабженное топологией конечных дополнений (Пример 8.2.4 Лекции 2), является нехаусдорфовым T_1-пространством.

22.4. Предложение. *Пусть $f_i : X \to Y$, $i = 1, 2$, — непрерывные отображения пространства X в хаусдорфово пространство Y. Предположим, что $f_1 \big| Z = f_2 \big| Z$ для некоторого всюду плотного в X множества Z. Тогда $f_1 = f_2$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой точки $x \in X$ точки $f_1(x)$ и $f_2(x)$ различны. Поскольку пространство Y хаусдорфово, существуют непересекающиеся окрестности $Of_i(x),\ i = 1,2$. Из непрерывности f_i вытекает существование таких окрестностей $O_i x,\ i = 1,2$, что $f_i\big(O_i x\big) \subset Of_i(x)$.

Положим $Ox = O_1 x \cap O_2 x$. Поскольку Z всюду плотно в X, существует точка $z \in Z \cap Ox$. Тогда $f_1(z) = f_2(z) \in Of_1(x) \cap Of_2(x)$. Но это противоречит тому, что множества $Of_1(x)$ и $Of_2(x)$ не пересекаются. □

Аксиомы T_0, T_1, T_2 идут в порядке усиления и дают все более узкие, как показывают приведенные примеры, классы пространств.

22.5. Пространство X называется *T_3-пространством*, если для всякой точки $x \in X$ и всякого не содержащего ее замкнутого множества F существуют непересекающиеся окрестности Ox и OF.

Аксиома T_3 не влечет даже T_0. Это показывает пример множества из более чем двух точек с антидискретной топологией.

22.6. Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_3, называется *регулярным*.

Всякое регулярное пространство X хаусдорфово. В самом деле, пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Для одной из точек, допустим, для x, существует окрестность Ox, не содержащая y. Взяв непересекающиеся окрестности точки x и замкнутого множества $X \setminus Ox$, мы заключим x и y в непересекающиеся окрестности.

Примером хаусдорфова нерегулярного пространства является числовая прямая, базу топологии которой образуют всевозможные множества вида U и $U \setminus K$, где U — интервал числовой прямой, $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ (Пример 8.8.5 Лекции 2). Доказать, что множество K замкнуто в этом пространстве и не отделимо от нуля непересекающимися окрестностями.

22.7. Предложение. *Всякое подпространство регулярного пространства (соответственно T_0-, T_1-, T_2-пространства) регулярно (соответственно T_0-, T_1-, T_2-пространство).*

22.8. Предложение. *Произведение T_i-пространств, $i = 0,1,2,3$, есть T_i-пространство. В частности, произведение регулярных пространств регулярно.*

Доказательство. Проверим последнее утверждение. Регулярные пространства — это пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам T_0 и T_3. Пусть $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и сомножители X_α регулярны. Возьмем различные точки $x, y \in X$. Существует такое α, что $pr_\alpha(x) \neq pr_\alpha(y)$. Поскольку $X_\alpha \in T_0$, одна из точек $pr_\alpha(x)$ и $pr_\alpha(y)$ имеет окрестность, не содержащую другую точку. Предположим, что открытое множество $V \subset X_\alpha$ содержит $pr_\alpha(x)$ и не содержит $pr_\alpha(y)$. Тогда $x \in pr_\alpha^{-1}(V)$ и $y \notin pr_\alpha^{-1}(V)$. Таким образом, X является T_0-пространством.

Чтобы проверить аксиому T_3, надо для произвольной окрестности Ox точки $x \in X$ найти такую окрестность Ux, что $\mathrm{Cl}(Ux) \subset Ox$. По определению топологии произведения существуют такой конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и такие открытые множества $V_i \subset X_\alpha$, что

$$x = (x_\alpha) \in \bigcap \{pr_{\alpha_i}^{-1}(V_i) : i = 1, \ldots, k\} \subset Ox. \tag{22.1}$$

Поскольку X_{α_i} удовлетворяет аксиоме T_3, существует такая окрестность Ox_{α_i}, что

$\mathrm{Cl}(Ox_{\alpha_i}) \subset V_i$. Положим

$$Ux = \bigcap\{pr_{\alpha_i}^{-1}(Ox_{\alpha_i}) : i = 1, \ldots, k\}.$$

Тогда $\mathrm{Cl}(Ux) \subset \bigcap\{pr_{\alpha_i}^{-1}(\mathrm{Cl}(Ox_{\alpha_i})) : i = 1, \ldots, k\} \subset \bigcap\{pr_{\alpha_i}^{-1}(V_i) : i = 1, \ldots, k\} \subset$ (22.1) $\subset Ox$. $\square$

22.9. Пространство X называется T_4-*пространством*, если любую дизъюнктную пару замкнутых в X множеств можно заключить в непересекающиеся окрестности.

Легко проверить, что это условие эквивалентно следующему: для всякого замкнутого множества F и всякой его окрестности OF существует такая окрестность O_1F, что $\mathrm{Cl}(O_1F) \subset OF$.

Другое равносильное условие: любую дизъюнктную пару замкнутых множеств можно заключить в окрестности с непересекающимися замыканиями.

Пример множества из более чем двух точек с антидискретной топологией показывает, что T_4 не влечет T_0. Числовая прямая $\mathbb{R}$, на которой открыты $\emptyset$, $\mathbb{R}$ и бесконечные интервалы вида (a, ∞) (Пример 8.8.4 Лекции 2), показывает, что аксиома T_4 не влечет и T_3.

22.10. Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4, называется *нормальным.*

Всякое нормальное пространство регулярно, поскольку из T_1 и T_4 вытекает T_3. В то же время, как показывает "связное двоеточие", из T_0 плюс T_4 не вытекает T_3.

22.11. Теорема. *Любое метризуемое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть ρ метрика на пространстве X, порождающая его топологию, F, T — дизъюнктные замкнутые подмножества X.

Рассмотрим неотрицательную функцию $\rho_F : X \to \mathbb{R}$, $\rho_F(x) = \inf\{\rho(x,t) : t \in F\}$. Докажем, что она непрерывна и $X \setminus F = \rho_F^{-1}(0, +\infty)$.

Непрерывность ρ_F в точке x. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим открытый ε-шар $O_\varepsilon(x)$. Для любой точки $y \in O_\varepsilon(x)$ и $t \in F$ из неравенства треугольника имеем

$$\rho(y,t) \leq \rho(x,t) + \rho(x,y).$$

Значит и

$$\inf\{\rho(y,t) : t \in F\} \leq \inf\{\rho(x,t) : t \in F\} + \rho(x,y) < \inf\{\rho(x,t) : t \in F\} + \varepsilon,$$

т.е.

$$\rho_F(y) - \rho_F(x) < \epsilon.$$

Аналогично доказывается, что

$$\rho_F(x) - \rho_F(y) < \epsilon,$$

и

$$|\rho_F(y) - \rho_F(x)| < \epsilon$$

для любой точки $y \in O_\varepsilon(x)$.

Покажем, что $X \setminus F = \rho_F^{-1}(0, +\infty)$. Если $x \in F$, то $\rho_F(x) = 0$, если $x \in X \setminus F$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(x) \subset X \setminus F$, и, значит, $\rho_F(x) \geq \varepsilon > 0$.

Аналогично, непрерывна неотрицательная функция $\rho_T : X \to \mathbb{R}$, $\rho_T(x) = \inf\{\rho(x,t) : t \in T\}$ и $X \setminus T = \rho_T^{-1}(0,+\infty)$.

Функция $h(x) = \frac{\rho_F(x)}{\rho_F(x)+\rho_T(x)}$ корректно определена, непрерывна и $F = h^{-1}(0)$, $T = h^{-1}(1)$. Тогда множества $h^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$ и $h^{-1}(\frac{1}{2}, +\infty)$ являются дизъюнкными окрестностями F и T соответственно.

Выполнение аксиомы T_1 очевидно. $\square$

Лекция 8.

Лемма Урысона. Теорема Брауэра–Титце–Урысона о продолжении функций.

§ 23. Лемма Урысона. Теорема Брауэра–Титце–Урысона о продолжении функций.

23.1. Лемма Урысона. *Для любых непересекающихся замкнутых подмножеств F_0 и F_1 нормального пространства X существует такая непрерывная функция $f : X \to [0,1]$, что*

$f(x) = 0 \quad$ *для* $\quad x \in F_0 \quad$ *и* $\quad f(x) = 1 \quad$ *для* $\quad x \in F_1$.

Доказательство. Выполнение леммы в случае $F_0 = \emptyset$ или $F_1 = \emptyset$ очевидно.

Для каждого двоично-рационального числа $r \in [0,1]$ мы определим открытое множество Γ_r так, что

$$r < r' \Longrightarrow \mathrm{Cl}(\Gamma_r) \subset \Gamma_{r'}, \tag{23.1}$$

$$F_0 \subset \Gamma_0, \quad F_1 \subset X \setminus \Gamma_1. \tag{23.2}$$

Существует такая окрестность OF_0, что $\mathrm{Cl}(OF_0) \cap F_1 = \varnothing$. Полагаем $\Gamma_0 = OF_0$ и $\Gamma_1 = X \setminus F_1$. Далее, существует такая окрестность $O\mathrm{Cl}(\Gamma_0)$, что $\mathrm{Cl}(O\mathrm{Cl}(\Gamma_0)) \subset \Gamma_1$. Полагаем $\Gamma_{\frac{1}{2}} = O\mathrm{Cl}(\Gamma_0)$. Аналогичным образом строим множества $\Gamma_{\frac{1}{4}}$ и $\Gamma_{\frac{3}{4}}$ так, что

$\mathrm{Cl}\big(\Gamma_0\big) \subset \Gamma_{\frac{1}{4}} \subset \mathrm{Cl}\left(\Gamma_{\frac{1}{4}}\right) \subset \Gamma_{\frac{1}{2}};$

$\mathrm{Cl}\left(\Gamma_{\frac{1}{2}}\right) \subset \Gamma_{\frac{3}{4}} \subset \mathrm{Cl}\left(\Gamma_{\frac{3}{4}}\right) \subset \Gamma_1.$

Продолжая этот процесс, мы строим искомое семейство множеств Γ_r. Определим функцию $f : X \to I$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in \Gamma_r\} & \text{для} \quad x \in \Gamma_1, \\ 1 & \text{для} \quad x \in X \setminus \Gamma_1. \end{cases}$$

Возьмем числа a, b из интервала $(0,1)$. Покажем, что

$$f^{-1}\big([0,a)\big) = \bigcup \big\{\Gamma_r : r < a\big\}; \tag{23.3}$$

$$f^{-1}\big((b,1]\big) = \bigcup \big\{X \setminus \mathrm{Cl}(\Gamma_r) : r > b\big\}. \tag{23.4}$$

Равенство (23.3) вытекает из следующего свойства:

$f(x) < a \Longleftrightarrow \quad$ существует такое $\quad r < a, \quad$ что $\quad x \in \Gamma_r$.

Далее,

$$f(x) > b \Longleftrightarrow \quad \text{существует такое} \quad r' > b, \quad \text{что} \quad x \notin \Gamma_{r'}. \tag{23.5}$$

Условия (23.1) и (23.5) влекут, что

$f(x) > b \Longleftrightarrow \quad$ существует такое $\quad r > b, \quad$ что $\quad x \notin \mathrm{Cl}(\Gamma_r)$.

Таким образом, равенство (23.4) также проверено. Из (23.3) и (23.4) с применением Предложения 13.3 Лекции 3 вытекает непрерывность функции f. $\square$

23.2. Теорема Брауэра–Титце–Урысона. *Пусть F — замкнутое подмножество нормального пространства X и $\varphi : F \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция. Тогда существует такая непрерывная функция $\psi : X \to \mathbb{R}$, что*

$\psi|_F = \varphi \quad$ и $\quad ||\psi|| = \sup\big\{|\psi(x)| : x \in X\big\} = ||\varphi|| = \sup\big\{|\varphi(x)| : x \in F\big\}.$

Доказательство. Положим $\varphi_0 = \varphi$ и $\mu_0 = ||\varphi_0||$.

Считаем, что $\mu_0 > 0$. В противном случае полагаем $\psi \equiv 0$. Пусть

$$P_0 = \{x \in F : \varphi_0(x) \le -\mu_0/3\}, \quad Q_0 = \{x \in F : \varphi_0(x) \ge \mu_0/3\}.$$

Множества P_0 и Q_0 замкнуты в X и не пересекаются. По Лемме Урысона, заменяя отезок $[0,1]$ на $[-\mu_0/3,\ \mu_0/3]$, существует такая непрерывная функция $\psi_0 : X \to [-\mu_0/3,\ \mu_0/3]$, что

$$\psi_0(P_0) = -\mu_0/3, \quad \psi_0(Q_0) = \mu_0/3.$$

Положим $\varphi_1 = \varphi_0 - \psi_0 : F \to \mathbb{R}$. Функция φ_1 непрерывна и $||\varphi_1|| \equiv \mu_1 \le 2\mu_0/3$.

Теперь полагаем

$$P_1 = \{x \in F : \varphi_1(x) \le -\mu_1/3\}, \quad Q_1 = \{x \in F : \varphi_1(x) \ge \mu_1/3\}.$$

Строим непрерывную функцию $\psi_1 : X \to [-\mu_1/3,\ \mu_1/3]$ так, что

$$\psi_1(P_1) = -\mu_1/3, \quad \psi_1(Q_1) = \mu_1/3.$$

Полагаем $\varphi_2 = \varphi_1 - \psi_1$ и т.д.

Получаем последовательность $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ непрерывных функций на F и последовательность $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ непрерывных функций на X таких, что $\varphi_{n+1} = \varphi_n - \psi_n$, $||\psi_n|| \le \mu_n/3$, $||\varphi_{n+1}|| \equiv \mu_{n+1} \le 2\mu_n/3$. Следовательно,

$$||\varphi_n|| \le (2/3)^n \mu_0, \quad ||\psi_n|| \le (2/3)^n \mu_0/3.$$

Положим $s_n = \psi_0 + \ldots + \psi_n$. Последовательность непрерывных на X функций s_n является фундаментальной последовательностью в $C^*(X)$ с равномерной метрикой. В самом деле, при $m > n$ имеем

$$||s_m - s_n|| = ||\psi_{n+1} + \ldots + \psi_m|| \le ||\psi_{n+1}|| + \ldots + ||\psi_m|| \le \sum_{k=n+1}^{n} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \tfrac{\mu_0}{3} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k \tfrac{\mu_0}{3} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} \tfrac{\mu_0}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} \mu_0.$$

Согласно Теореме из добавления последовательность s_n сходится к непрерывной функции $\psi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n$. Имеем $||\psi|| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3} = \mu_0$. Далее,

$\varphi - s_n = \varphi_0 - \psi_0 - \psi_1 - \ldots - \psi_n = \varphi_1 - \psi_1 - \ldots - \psi_n = \varphi_n - \psi_n = \varphi_{n+1}$. Значит, $||\varphi - s_n|| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \mu_0$. Поэтому $\psi|_F = \varphi$. $\square$

23.3. Следствие. *Утверждение* Теоремы 23.2 *имеет место и для неограниченных функций.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\varphi : F \to \mathbb{R}$ — неограниченная функция. Рассмотрим функцию $\varphi_0 : F \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, определяемую следующим образом:

$$\varphi_0(x) = \operatorname{arctg}\bigl(\varphi(x)\bigr).$$

Согласно Теореме 23.2 функция φ_0 продолжается до непрерывной функции $\psi_0 : X \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Положим $F_0 = \psi_0^{-1}\left(\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}\right)$. По Лемме Урысона существует такая функция $\psi_1 : X \to [0,1]$, что $\psi_1(F_0) = 0$ и $\psi_1(F) = 1$. Определим функцию $\psi : X \to \mathbb{R}$, полагая

$$\psi(x) = \operatorname{tg}\bigl(\psi_1(x) \cdot \psi_0(x)\bigr).$$

Это и будет искомым продолжением функции φ. $\square$

Добавление. Сходимость в пространстве $C^*(X)$.

Нормированное пространство $C^*(X)$ — линейное пространство непрерывных ограниченных функций на X с нормой $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ (см. Пример 9.4.5 Лекции 2).

Последовательность функций $f_n \in C^*(X)$, $n \in \mathbb{N}$, *равномерно сходится к функции* $f \in C^*(X)$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\bigl|f(x) - f_n(x)\bigr| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \ge n_0 \quad \text{и} \quad x \in X.$$

Последовательность функций $f_n \in C^*(X)$, $n \in \mathbb{N}$, называется *фундаментальной*, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad m, n \geq n_0, \quad x \in X.$$

Теорема. Фундаментальная последовательность функций $f_n \in C^*(X)$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится к функции $f \in C^*(X)$.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $f_n \in C^*(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Для любого $x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m|| = \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in X\}.$$

Значит для любого $x \in X$ последовательность $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, является фундаментальной в $\mathbb{R}$, и сходится к пределу, который обозначим $f(x)$. Покажем, что последовательность f_n, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится к f и $f \in C^*(X)$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

для любых $n, m \geq k$, и любого $x \in X$. Зафиксировав n и x, и устремляя m к бесконечности получаем

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это неравенство выполнено для любых $x \in X$ и $n \geq k$. Поэтому

$$||f_n - f|| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для любого $n \geq k$.

Докажем непрерывность f в точке x_0.

Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{для всех} \quad n \geq k \quad \text{и} \quad x \in X. \tag{23.6}$$

Поскольку отображение f_k непрерывно, существует такая окрестность $O_\delta(x_0)$, что

$$x \in O_\delta(x_0) \Rightarrow |f_k(x_0) - f_k(x)| < \varepsilon/3. \tag{23.7}$$

Тогда для $x \in O_\delta(x_0)$ имеем

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| <$$

$$\text{(согласно (23.6) и (23.7))} \;\; < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, f непрерывно в точке x_0.

Ограниченность f. Существует такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$|f(x) - f_k(x)| < 1 \text{ для всех } \; x \in X.$$

Тогда, если $|f_k(x)| \leq M$ для любых $x \in X$, то

$$|f(x)| \leq |f_k(x)| + 1. \;\square$$

Лекция 9.

Пример регулярного не нормального пространства. Тихоновские пространства. Метризуемые пространства. Теорема Урысона.

23.5. Пример (регулярного не нормального пространства).

Прямая Зоргенфрея X (Пример 8.8.3 Лекции 2) является примером нормального пространства X, квадрат которого не нормален.

1. Пространство X нормально. Легко видеть, что X — T_1-пространство (например, потому, что всякий интервал $[a,b)$ одновременно открыт и замкнут в X). Пусть F, T — дизъюнктные замкнутые подмножества X. Для любой точки $x \in F$ ($y \in T$) возьмем произвольную ее открыто-замкнутую окрестность вида $[x, a_x)$ ($[y, b_y)$), не пересекающуюся с T (с F). Положим

$$OF = \bigcup\{[x, a_x) : x \in F\},\ OT = \bigcup\{[y, b_y) : y \in T\}.$$

Легко видеть, что $OF \cap OT = \emptyset$.

2. Квадрат $X \times X$ не нормален. В самом деле, рассмотрим побочную диагональ, т.е. множество Y всех точек вида $(a, -a)$, $a \in \mathbb{R}$. Поскольку множества $[a,b) \times [-a, c)$ являются окрестностями точки $(a, -a)$ в $X \times X$, всякая точка $y \in Y$ изолирована в Y, т.е. Y — дискретное подпространство произведения $X \times X$. В то же время, Y замкнуто в $X \times X$. Поэтому всякое множество $Z \subset Y$ замкнуто в $X \times X$.

Множество Y имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$. Для каждого множества $Z \in 2^Y$ рассмотрим непрерывную функцию $\varphi_Z : Y \to [0,1]$, равную 0 на Z и 1 на $Y \setminus Z$. Количество таких функций равномощно множеству $2^Y = 2^{2^{\mathbb{N}}}$, т.е. имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$. Если бы пространство $X \times X$ было нормально, то всякую функцию φ_Z можно было бы продолжить до непрерывной функции $f_Z : X \times X \to [0,1]$ по теореме Брауэра–Титце–Урысона. Но пространство $X \times X$ имеет счетное плотное множество D точек вида (x_1, x_2), где $x_i \in \mathbb{Q}$ — рациональные числа. Согласно Предложению 22.4 Лекции 7 всякое непрерывное отображение $f : X \times X \to [0,1]$ однозначно определяется своими значениями на счетном плотном множестве D. Но множество $[0,1]^D$ всех (не только непрерывных) отображений $g : D \to [0,1]$ имеет мощность $|(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Это противоречие (§ 7 и Теорема 7.1 Лекции 1) показывает, что квадрат X не нормален.

§ 24. Тихоновские пространства.

24.1. Определение. T_1 -пространство называется *вполне регулярным* или *тихоновским*, если для всякой точки $x \in X$ и всякого не содержащего ее замкнутого множества F существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 1$, $f(F) = 0$.

По Лемме Урысона 23.1 нормальное пространство является тихоновским, которое, в свою очередь, является регулярным.

24.2. Предложение. *Всякое подпространство тихоновского пространства является тихоновским пространством.*

Произведение тихоновских пространств есть тихоновское пространство.

Доказательство. Докажем второе утверждение. Пусть $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Для произвольной окрестности Ox точки $x \in X$ найдем функцию $f : X \to [0,1]$ такую, что $f(x) = 1$, $f(X \setminus Ox) = 0$. По определению топологии произведения существуют такой конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и такие открытые множества

$V_i \subset X_\alpha$, что

$$x = (x_\alpha) \in \bigcap\{pr_{\alpha_i}^{-1}(V_i) : i = 1, \ldots, k\} \subset Ox.$$

Положим $g_i : X_{\alpha_i} \to [0,1]$ так, что $g_i(x_{\alpha_i}) = 1$, $g_i(X \setminus V_i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.

$$f_i = g_i \circ pr_{\alpha_i} : X \to [0,1],\ i = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$f = f_1 \cdot\ \ldots\ \cdot f_k : X \to [0,1]$$

является искомой функцией. □

24.3. Лемма. *Пусть семейство отображений $f_\alpha : X \to I = [0,1]$, $\alpha \in \mathcal{A}$, тихоновского пространства X удовлетворяет условию (разделяет точки и замкнутые множества):*
для любого $x \in X$ и любого замкнутого множества T, $x \notin T$, существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $f_{\alpha_0}(x) = 1$, $f_{\alpha_0}(T) = 0$.

Тогда $F = \Delta_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha : X \to I^{\mathcal{A}}$ — вложение X в тихоновский куб $I^{\mathcal{A}}$ (т.е. гомеоморфизм X на $F(X)$).

Доказательство. Очевидно, что отображение F инъективно и непрерывно. Для доказательства непрерывности обратного отображения $F^{-1} : F(X) \to X$ проверим его непрерывность в произвольной точке $y \in F(X)$. Пусть $F(x) = y$ (т.е. $F^{-1}(y) = x$), и Ox — окрестность точки x. По условию на семейство f_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, для $x \in X$ и замкнутого множества $T = X \setminus Ox$ существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $f_{\alpha_0}(x) = 1$, $f_{\alpha_0}(T) = 0$. Тогда $W = \mathrm{pr}_{\alpha_0}^{-1}((0,1]) \cap F(X)$ — окрестность точки x в $F(X)$, и $F^{-1}(W) \subset Ox$ (так как $F(X) = (\mathrm{pr}_{\alpha_0}^{-1}((0,1]) \cap F(X)) \bigcup (\mathrm{pr}_{\alpha_0}^{-1}(0) \cap F(X))$, $f_{\alpha_0}(T) = 0$ и $F^{-1}(\mathrm{pr}_{\alpha_0}^{-1}(0) \cap F(X)) \supset T$). □

Из Предложения 24.2 (достаточность) и Леммы 24.3 (необходимость) имеем.

24.4. Теорема. *Пространство X является тихоновским в том и только том случае, если оно вложимо в тихоновский куб $I^{\mathcal{A}}$ (для некоторого $\mathcal{A}$).*

§ 25. Метризуемые пространства. Теорема Урысона.

25.1. Определение. Топологическое пространство X называется *метризуемым*, если на X существует такая метрика ρ, что метрическая топология $\mathcal{T}_\rho$ совпадает с топологией пространства X.

25.2. Пример метризуемого пространства. Дискретное пространство X метризуемо. Его топология порождается метрикой ρ такой, что $\rho(x,y) = 1$ для любых различных точек $x, y \in X$.

25.3. Определение. Пусть даны две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X. Они называются *топологически эквивалентными*, если $\mathcal{T}_{\rho_1} = \mathcal{T}_{\rho_2}$.

25.4. Предложение. *Всякая метрика ρ_1 на множестве X топологически эквивалентна метрике ρ_2, диаметр X в которой ≤ 1 (*$\mathrm{diam}\ X = \sup\{\rho_2(x,y) : x, y \in X\} \leq 1$*).*

Доказательство. Можно положить, например, $\rho_2(x,y) = \min\{\rho_1(x,y), 1\}$, и заметить, что топологии, порожденные этими метриками, совпадают, так как базы топологий составляют открытые ϵ-шары, где $\epsilon < 1$. □

25.5. Предложение. *Сумма $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ метризуемых пространств X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, метризуема.*

Доказательство. Пусть ρ_α — метрика на X_α, порождающая топологию пространства X_α. Согласно Предложению 25.4 можно считать, что $\mathrm{diam}\,(X_\alpha, \rho_\alpha) \leq 1$. Определим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ следующим образом:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_\alpha(x, y), & \text{если} \quad x, y \in X_\alpha; \\ 1, & \text{если} \quad x \text{ и } y \text{ лежат в разных слагаемых.} \end{cases}$$

Легко проверить,что ρ — это метрика на X (здесь важно, что $\mathrm{diam}\, X_\alpha \leq 1$). Открытые ε-шары $O_\varepsilon(x)$ образуют базу метрической топологии на X. Прообраз любого ε-шара $O_\varepsilon(x)$ при отображении вложения $\mathrm{id}_\alpha : X_\alpha \to X$ открыт в X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ (если $\varepsilon \leq 1$ и $x \in X_{\alpha'}$, то $\mathrm{id}_\alpha^{-1}(O_\varepsilon(x)) = \varnothing$, при $\alpha \neq \alpha'$ и $\mathrm{id}_{\alpha'}^{-1}(O_\varepsilon(x)) = O_\varepsilon(x)$, где последнее множество является открытым ε-шаром точки x в метрическом пространстве $(X_{\alpha'}, \rho_{\alpha'})$; если $\varepsilon > 1$, то $O_\varepsilon(x) = X$ и $\mathrm{id}_\alpha^{-1}(O_\varepsilon(x)) = X_\alpha$, при любом $\alpha \in \mathcal{A}$). Остается заметить, что любое множество, открытое в X (в финальной топологии на X относительно вложений), является объединением ε-шаров $O_\varepsilon(x)$. $\square$

25.6. Теорема. *Счетное произведение метризуемых пространств метризуемо.*

Доказательство. Пусть $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Согласно Предложению 25.4 пространства X_n можно наделить такими метриками ρ_n, что

$$\mathrm{diam}\, X_n \leq 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

На X определим метрику ρ, принимающую на произвольной паре точек $x = (x_n)$ и $y = (y_n)$ из X значения $\rho(x, y) = \sup\{\frac{\rho_n(x_n, y_n)}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Нетрудно проверить, что ρ — метрика.

Метрическое пространство (X, ρ) обозначим через X_M. Надо доказать, что тождественное отображение $h : X \to X_M$ является гомеоморфизмом.

Докажем сначала, что h непрерывно. Возьмем произвольно точку $x = (x_n) \in X_M$ и ее ε-окрестность $O_\varepsilon(x)$, где $\varepsilon > 0$. Выберем N так, чтобы $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Окрестность $Ox \subset X$ точки x определим следующим образом:

$$Ox = \bigcap_{n=1}^{N} pr_n^{-1}(O_\varepsilon(x_n)),$$

где $O_\varepsilon(x_n)$ — открытая ε-окрестность с центром в точке x_n в пространстве X_n. Тогда для каждой точки $y \in Ox$ имеем $\rho(x, y) = \sup\{\frac{\rho_n(x_n, y_n)}{n} : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$. Таким образом, $Ox \subset O_\varepsilon(x)$, т.е. отображение h непрерывно.

Теперь докажем непрерывность отображения h^{-1}. Возьмем окрестность $Ox \subset X$ точки x. При необходимости уменьшая ее, можно считать, что окрестность Ox базисная, имеющая вид

$$Ox = \bigcap_{n=1}^{N} pr_n^{-1}(O_\varepsilon(x_n)),$$

где $O_\varepsilon(x_n)$ — открытая ε-окрестность с центром в точке x_n в пространстве X_n. для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $O_{\frac{\varepsilon}{N}}(x) \subset Ox$. $\square$

25.7. Теорема Урысона. *Всякое нормальное пространство X со счетной базой метризуемо.*

Доказательство. Поскольку подпространство метризуемого пространства метризуемо (см. Пример 9.2.4 и Предложение 10.5 Лекции 3), достаточно, в силу Теоремы 25.6, построить вложение $F : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ пространства X в тихоновское произведение счетного числа прямых. Пусть $\mathcal{B}$ — счетная база пространства X. Пару элементов (U, V) базы $\mathcal{B}$ назовем нормальной, если

$$\mathrm{Cl}(V) \subset U.$$

Множество всех нормальных пар, как и множество всех пар элементов базы $\mathcal{B}$ счетно. Занумеруем их натуральными числами:

$$(V_n, U_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

По Лемме Урысона для каждой нормальной пары (V_n, U_n) существует такая непрерывная функция

$$f_n : X \to [0, 1],$$

что

$$f_n(V_n) = 1,\ f_n(X \setminus U_n) = 0.$$

Легко проверить, что семейство функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию Леммы 24.3 (разделяет точки и замкнутые множества). Тогда

$$F = \mathop{\Delta}_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} - \text{ вложение. } \square$$

Лекция 10.

Компактные пространства. Лемма Александера. Первая Теорема Тихонова.

§ 26. Компактные пространства.

26.1. Определение. Покрытие v (см. Определение 8.6 Лекции 2) пространства X называется *открытым*, если оно состоит из открытых множеств. Множество всех открытых покрытий пространства X обозначается через $\operatorname{cov}(X)$.

Пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Покрытие u *вписано* в покрытие v, если каждый элемент $U \in u$ содержится в некотором множестве $V \in v$.

26.2. Примеры. 1. Прямая $\mathbb{R}$ не компактна. Из ее покрытия интервалами $(-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, нельзя выбрать конечное подпокрытие.

2. Любое конечное пространство компактно.

3. (Лемма Бореля–Лебега) Отрезок $[0, 1]$ компактен.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из Определения 26.1.

26.3. Предложение. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда в любое его открытое покрытие можно вписать конечное открытое покрытие.* $\square$

26.4. Определение. Семейство подмножеств множества X называется *центрированным*, если пересечение любого конечного числа его элементов не пусто.

26.5. Теорема. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система замкнутых подмножеств X имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство и Φ — центрированная система его замкнутых подмножеств. Если пересечение всех элементов Φ пусто, то множество $\{X \setminus F : F \in \Phi\}$ является открытым покрытием пространства X. Из него можно выделить конечное подпокрытие $\{X \setminus F_i,\ i = 1, \ldots, k\}$. Тогда $F_1 \cap \ldots \cap F_k = \varnothing$, что противоречит центрированности семейства Φ.

Наоборот, пусть в пространстве X всякая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Возьмем произвольное открытое покрытие u пространства X. Предположим, что покрытие u не содержит конечного подпокрытия. Тогда семейство

$\{X \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_k) : U_i \in u\}$

центрировано и имеет пустое пересечение. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

26.6. Лемма. *Пусть Y — подпространство X. Тогда Y компактно в том и только том случае, если из любого семейства u открытых в X подмножеств, покрывающих Y (т.е. $Y \subset \bigcup_{U \in u} U$), можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее Y.*

Доказательство. Пусть Y компактно, и $u = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ — семейство открытых в X подмножеств, покрывающих Y. Тогда $u' = \{U_\alpha \cap Y : \alpha \in \mathcal{A}\} \in \operatorname{cov}(Y)$, и существует конечное подпокрытие u':

$$\{U_{\alpha_1} \cap Y, \ldots, U_{\alpha_k} \cap Y\}.$$

Тогда конечное семейство $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ покрывает Y.

Обратно, пусть $u' = \{U'_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \in \operatorname{cov}(Y)$, и U_α открытое подмножество X такое, что $U'_\alpha = U_\alpha \cap Y$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Семейство $u = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ открытых подмножеств в X покрывет Y. По условию существует конечное подсемейство $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$, покрывающее Y. Тогда $\{U'_{\alpha_1}, \dots, U'_{\alpha_k}\}$ является конечным подпокрытием u'. □

26.7. Предложение. *Замкнутое подмножество Y компактного пространства X — компактное подпространство.*

Доказательство. Пусть $u = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ — семейство открытых в X подмножеств, покрывающих Y. Тогда $u \cup \{X \setminus Y\} \in \operatorname{cov}(X)$ (добавляем к семейству u одно открытое подмножество $X \setminus Y$). Так как X компактно, то существует конечное подпокрытие $u \cup \{X \setminus Y\}$:

$$\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}, X \setminus Y\},$$

и семейство $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ покрывает Y. По Лемме 26.6 Y компактно. □

26.8. Лемма. *Если Y компактное подпространство хаусдорфова пространства X и $x \notin Y$, то существуют дизъюнктные окрестности OY и Ox подмножества Y и точки x соответственно.*

Доказательство. Для любой точки $y \in Y$ существуют дизъюнктные окрестности Oy и O_yx точек y и x соответственно. По Лемме 26.6 из семейства $\{Oy : y \in Y\}$, покрывающего Y, можно выбрать конечное подсемейство $\{Oy_1, \dots, Oy_k\}$, покрывающее Y. Тогда $OY = \bigcup_{i=1}^k Oy_i$ и $Ox = \bigcap_{i=1}^k O_{y_i}x$ являются искомыми дизъюнктными окрестностями подмножества Y и точки x соответственно. □

26.9. Предложение. *Если Y — компактное подпространство хаусдорфова пространства X, то Y замкнуто в X.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in X \setminus Y$. По Лемме 26.8 существуют непересекающиеся окрестности Ox и OY. Тем самым x является внутренней точкой множества $X \setminus Y$, которое открыто. Значит Y замкнуто. □

26.10. Теорема. *Всякое хаусдорфово компактное пространство X нормально.*

Доказательство. X удовлетворяет аксиоме T_1. Проверим выполнение аксиомы T_4.

Пусть даны дизъюнктные замкнутые подмножества F и T. По Лемме 26.8 для каждой точки $x \in F$ существуют непересекающиеся окрестности Ox и O_xT точки x и подмножества T соответственно. По Лемме 26.6 из семейства $\{Ox : x \in F\}$, покрывающего F, можно выбрать конечное подсемейство $\{Ox_1, \dots, Ox_k\}$, покрывающее Y. Тогда $OF = \bigcup_{i=1}^k Ox_i$ и $OT = \bigcap_{i=1}^k O_{x_i}T$ являются искомыми дизъюнктными окрестностями подмножеств F и T соответственно. □

26.11. Предложение. *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть X компактно и $f : X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение. Покажем, что Y компактно. Пусть $u \in \operatorname{cov}(Y)$. В силу непрерывности f, семейство $f^{-1}(u) = \left\{f^{-1}(U) : U \in u\right\}$ является открытым покрытием пространства X. Выберем в нем конечное подпокрытие $f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_k)$. Тогда семейство $\{U_1, \dots, U_k\}$ будет конечным подпокрытием u. □

26.12. Предложение. *Непрерывное взаимно однозначное отображение f компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Для доказательства непрерывности отображения f^{-1} достаточно показать, что образ произвольного замкнутого в X множества F замкнут в Y.

По Предложению 26.7 подмножество F компактно в X. Из Предложения 26.11 вытекает компактность множества $f(F)$, из Предложения 26.9 вытекает замкнутость множества $f(F)$. $\square$

§ 27. Лемма Александера. Первая Теорема Тихонова.

27.1. Лемма Александера. *Если в пространстве X существует такая предбаза $\mathcal{B}$, что из любого покрытия пространства X ее элементами можно выделить конечное подпокрытие, то X компактно.*

Доказательство. Предположим, что существует покрытие $u_0 \in \operatorname{cov}(X)$, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Положим

$$\mathcal{U} = \big\{u \in \operatorname{cov}(X) : u_0 \subset u,\ u \text{ не содержит конечного } u' \in \operatorname{cov}(X)\big\}, \qquad (27.1)$$

считая все элементы рассматриваемых покрытий попарно различными. Множество $\mathcal{U}$ упорядочено отношением включения ($u_1 \leq u_2$, если $u_1 \subset u_2$).

Пусть $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ — линейно упорядоченное подмножество. Если $\mathcal{U}_0$ имеет максимальный элемент, то он является верхней гранью множества $\mathcal{U}_0$ в $\mathcal{U}$. Если же $\mathcal{U}_0$ не имеет максимального элемента, то положим

$$v = \bigcup_{u \in \mathcal{U}_0} u. \qquad (27.2)$$

Возьмем произвольное конечное множество $v' = \{V_1, \ldots, V_n\} \subset v$. Из (27.2) вытекает, что каждое $V_i \in v'$ является элементом некоторого $u_i \in \mathcal{U}_0$. Следовательно, $v' \subset u_1 \cup \ldots \cup u_n \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. Из определения (27.1) вытекает, что v' не является покрытием. Значит, $v \in \mathcal{U}$ является верхней гранью множества $\mathcal{U}_0$ в $\mathcal{U}$. Таким образом, множество $\mathcal{U}$ удовлетворяет условиям Леммы Куратовского–Цорна (§ 6 Лекции 1) и, следовательно, имеет максимальный элемент v_0.

Покажем, что $v_0 \cap \mathcal{B} \in \operatorname{cov}(X)$ (т.е. v_0 содержит подпокрытие из элементов предбазы $\mathcal{B}$). Для произвольной точки $x \in X$ существует содержащий ее элемент V покрытия v_0. Существуют такие элементы $G_1, \ldots, G_n$ предбазы $\mathcal{B}$, что

$$x \in G_1 \cap \ldots \cap G_n \subset V. \qquad (27.3)$$

Если для каждой точки $x \in X$ существует i такое, что $G_i \in v_0$, то $v_0 \cap \mathcal{B} \in \operatorname{cov}(X)$.

Предположим, что существует точка x такая, что никакое из множеств G_i не принадлежит v_0. Тогда, в силу максимальности семейства v_0 в $\mathcal{U}$,

$v_0 \cup \{G_i\} \notin \mathcal{U}, \quad i = 1, \ldots, n.$

Значит, $v_0 \cup \{G_i\}$ содержит конечное подпокрытие. Следовательно, для каждого $i = 1, \ldots, n$ существуют такие множества

$V_1^i, \ldots, V_{j(i)}^i \in v_0,$

что

$$G_i \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{j(i)} V_k^i\Big) = X. \qquad (27.4)$$

Из (27.4) вытекает
$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i,k} V_k^i\Big) = X. \tag{27.5}$$

Значит, в силу (27.3) и (27.5), семейство v_0 содержит конечное подпокрытие $\{V, V_k^i : i = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, j(i)\}$. Это противоречие показывает, что $v_0 \cap \mathcal{B} \in \operatorname{cov}(X)$. Из него по свойству предбазы $\mathcal{B}$ можно выделить конечное подпокрытие. Тем более конечное подпокрытие можно выделить из покрытия v_0. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

27.2. Первая Теорема Тихонова. *Произведение компактных пространств компактно.*

Доказательство. Пусть $X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$. Согласно Лемме Александера достаточно показать, что из покрытия u пространства X, состоящего из множеств вида $pr_\alpha^{-1}(V)$, где V открыто в X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, можно выделить конечное подпокрытие. Для этого достаточно найти такие индекс α' и $v \in \operatorname{cov}(X_{\alpha'})$, что $pr_{\alpha'}^{-1}(V) \in u$, $V \in v$. Действительно, тогда $pr_{\alpha'}^{-1}(v) = \{pr_{\alpha'}^{-1}(V) : V \in v\}$ — подпокрытие u. В силу компактности $X_{\alpha'}$, из покрытия v можно выделить конечное подпокрытие. Тем самым и из подпокрытия $pr_{\alpha'}^{-1}(v)$ (а значит и из покрытия u) можно выделить конечное подпокрытие.

Предположим, что такого α' нет. Тогда для всякого $\alpha \in \mathcal{A}$ найдется такая точка $x_\alpha \in X_\alpha$, что $x_\alpha \notin V$ для любого элемента покрытия u вида $pr_\alpha^{-1}(V)$, где V — открытое подмножество X_α. Тем самым точка $x = (x_\alpha)$ не лежит ни в одном из элементов покрытия u. В самом деле, если $x \in pr_\beta^{-1}(V) \in u$, где V открыто в X_β, то $pr_\beta(x) = x_\beta \in V$. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

27.3. Теорема. *Подмножество X евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Необходимость. Замкнутость X вытекает из Предложения 26.9. Если бы X было неограничено, то из покрытия X открытыми дисками $\mathcal{D}_m^n$, $m \in \mathbb{N}$, радиуса m с центром в начале координат нельзя было бы выделить конечного подпокрытия.

Достаточность. Пусть X замкнуто и ограничено. Из ограниченности X вытекает существование такого замкнутого шара B_m^n радиуса m с центром в начале координат, что $X \subset B_m^n$. Но B_m^n лежит в произведении отрезков $[-m, m]^n$, которое компактно по Теореме 27.2. Тогда X компактно как замкнутое подмножество компактного куба $[-m, m]^n$ (см. Предложение 26.7). $\square$

27.4. Пример. Сфера $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ и замкнутый шар $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \le 1\}$ — компактные пространства.

Из Предложения 26.11 и Теоремы 27.3 вытекает

27.5. Следствие. *Всякая непрерывная на компактном пространстве функция ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.* $\square$

Лекция 11.

Компактификации. Стоун-Чеховская компактификация. Локальная компактность. Одноточечная компактификация Александрова.

§ 28. Компактификации. Стоун-Чеховская компактификация.

28.1. Определение. *Компактификацией* пространства X называется пара (Y, i), где Y — компактное хаусдорфово пространство, $i : X \to Y$ — вложение такое, что $\mathrm{Cl}(i(X)) = Y$. При этом две компактификации (Y_1, i_1) и (Y_2, i_2) пространства X эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h : Y_1 \to Y_2$ такой, что $h \circ i_1 = i_2$.

Из Предложения 24.2 и Теоремы 24.3 Лекции 9 следует, что пространство X имеет компактификацию в том и только том случае, если оно тихоновское. Если ясно о каком вложении пространства в компактное хаусдорфово пространство идет речь, то в обозначении компактификации символ вложения будем опускать.

28.2. Примеры. 1. Окружность S^1 является компактификацией интервала $(0,1)$ (вложение $t \to (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

2. Отрезок $[0,1]$ является компактификацией интервала $(0,1)$.

3. Компакт $X \subset \mathbb{R}^2$ (называемый "$\sin \frac{1}{x}$"), являющийся объединением вертикального отрезка $X_1 = \{(0,y) : -1 \le y \le 1\}$ и графика X_2 функции $y = \sin\frac{1}{x}$; $0 < x \le 1$ является компактификацией интервала $(0,1)$ (вложение $t \to (t, \sin\frac{1}{t})$).

28.3. Теорема. *Пусть X — тихоновское пространство. Существует компактификация (Y, i) пространства X такая, что любая ограниченная непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет единственное продолжение $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$ (т.е. $f = \tilde{f} \circ i$).*

Доказательство. Пусть $C^*(X) = \{f_\alpha : X \to \mathbb{R} : \alpha \in \mathcal{A}\}$ — множество всех ограниченных непрерывных функций на X. Будем считать, что $f_\alpha(X) \subset [m_\alpha, M_\alpha]$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда отображение

$$F = \Delta_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} [m_\alpha, M_\alpha]$$

является вложением (Лемма 24.3 Лекции 9) в компактное пространство (Теорема 27.2 Лекции 10). Положим $Y = \mathrm{Cl}(F(X))$ (замыкание $F(X)$ в произведении $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}}[m_\alpha, M_\alpha]$).

Тогда (Y, F) — компактификация X. Пусть $f \in C^*(X)$. Так как $f = f_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathcal{A}$, то $f = pr_\alpha \circ F$ (см. Определение 16.7 Лекции 5), и отображение $pr_\alpha|_Y : Y \to [m_\alpha, M_\alpha]$ является искомым продолжением f. Единственность продолжения вытекает из Предложения 22.4 Лекции 7. $\square$

Компактификация, построенная в Теореме 28.3, называется *Стоун-Чеховской компактификацией* и обозначается βX.

28.4. Задача. Доказать ее единственность(с точностью до эквивалентности).

§ 29. Локальная компактность. Одноточечная компактификация Александрова.

29.1. Определение. Пространство X называется *локально компактным*, если для произвольной точки x и ее окрестности Ox существует такая окрестность Ux, что $\mathrm{Cl}(Ux) \subset Ox$ и пространство $\mathrm{Cl}(Ux)$ компактно.

29.2. Примеры. 1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, топологические многообразия являются локально компактными пространствами.

2. Открытое (замкнутое) подмножество локально компактного пространства локально компактно.

3. Прямая в топологии Зариского — компактное, не локально компактное пространство.

4. Хаусдорфово компактное пространство локально компактно.

29.3. Теорема. *Пусть X — хаусдорфово пространство. Тогда X — локально компактно в том и только том случае, если*
или X — компактное пространство,
или существует компактификация Y пространства X такая, что $Y \setminus X$ одноточечно.

Если X — локально компактное, не компактное пространство, то любые две одноточечные компактификации эквивалентны (название *одноточечная компактификация Александрова*, обозначение αX).

Доказательство. Докажем единственность одноточечной компактификации. Пусть (Y_j, i_j), где $Y_j \setminus i_j(X) = \{y_j\}$, $j = 1, 2$, — компактификации X. Положим $f : Y_1 \to Y_2$, $f|_{i_1(X)} = i_2 \circ i_1^{-1}$, $f(y_1) = y_2$. Отображение f — биекция, кроме того, $f|_{i_1(X)} : i_1(X) \to i_2(X)$ — гомеоморфизм. Остается проверить непрерывность f. Если O открыто в Y_2, то или $y_2 \notin O$, или $y_2 \in O$. В первом случае O открыто в $i_2(X)$. Значит $f^{-1}(O)$ открыто в $i_1(X)$, и открыто в Y_1 (так как $i_1(X)$ открыто в Y_1). Во втором случае $Y_2 \setminus O$ — компактное подмножество $i_2(X)$. Тогда $f^{-1}(Y_2 \setminus O)$ — компактное подмножество $i_1(X)$ (а значит и Y_1), которое замкнуто в Y_1. Тем самым, $f^{-1}(O)$ открыто в Y_1 и f непрерывно. Значит f — гомеоморфизм такой, что $f \circ i_1 = i_2$.

Доказательство первого утверждения. Необходимость. Если X не компактно, то определим топологию на множестве $Y = X \cup \{y\}$ $(y \notin X)$. Открытыми множествами являются открытые подмножества X и множества вида $Y \setminus K$, где K — компактное подмножество X. Легко проверяются: корректность определения топологиии и то, что X — всюду плотное подпространство Y.

Хаусдорфовость Y. Рассмотрим случай точек $x \in X$ и y. Так как X локально компактно, то существует окрестность Ox, замыкание которой $\mathrm{Cl}(Ox)$ компактно. Тогда Ox и $Y \setminus \mathrm{Cl}(Ox)$ — дизъюнктные окрестности точек $x \in X$ и y соответственно.

Компактность Y. Пусть $u \in \mathrm{cov}(Y)$ и $y \in U \in u$. Тогда $K = Y \setminus U$ — компактное подмножество X, поэтому существует конечное подсемейство $u' \subset u$, покрывающее K (Лемма 26.6 Лекции 10), и $\{U\} \cup u'$ — искомое конечное подпокрытие u.

Достаточность следует из пунктов 2 и 4 Примера 29.2.2. $\square$

29.4. Следствие. *Хаусдорфово локально компактное пространство X является тихоновским.*

29.5. Следствие. *Пространство X является хаусдорфовым локально компактным в том и только том случае, если X гомеоморфно открытому подмножеству хаусдорфова компактного пространства.*

29.6. Пример. Одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$ является сферой S^n, $n \in \mathbb{N}$. В одномерном случае окружностью S^1, в двумерном случае (если $\mathbb{R}^2$ рассматривать как комплексные числа) сфера S^2 называется *замкнутой комплексной плоскостью* или *сферой Римана*.

Лекция 12.

Метризуемые компактные пространства. Характеризации компактности метризуемых пространств. Полные метрические пространства. Теорема Бэра о категории. Вполне ограниченные метрические пространства. Критерий компактности метрического пространства.

§ 30. Метризуемые компактные пространства. Характеризации компактности метризуемых пространств.

30.1. Теорема. *Метризуемое компактное пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Пусть ρ — метрика на пространстве X. Из покрытия X открытыми шарами $O_{\frac{1}{n}}(x)$ можно выбрать конечное подпокрытие $O_{\frac{1}{n}}(x_1^n), \ldots, O_{\frac{1}{n}}(x_{k(n)}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда счетное множество $D = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_1^n, \ldots, x_{k(n)}^n\}$ всюду плотно в Y. Действительно, если O непустое открытое подмножество X, то существует открытый шар $O_\varepsilon(x) \subset O$. Для любого открытого шара $O_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$, где $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $x \in O_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$ имеем $O_{\frac{1}{n}}(x_i^n) \subset O_\epsilon(x) \subset O$. Значит, $x_i^n \in O$. По Теореме 21.7 Лекции 7 X удовлетворяет второй аксиоме счетности. $\square$

30.2. Следствие. *Пусть X — метризуемое пространство. Тогда X — сепарабельно в том и только том случае, если существует метризуемая компактификация X (не обязательно единственная).*

Доказательство. Необходимость следует из Теоремы 21.7 Лекции 7 и Теоремы Урысона 25.7 Лекции 9. Достаточность следует из Теоремы 30.1. $\square$

30.3. Теорема. *Пусть X — метризуемое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *X — компактно;*

(b) *любая последовательность точек в X содержит сходящуюся подпоследовательность (секвенциальная компактность X);*

(c) *любая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ ограничена (псевдокомпактность X).*

Доказательство. Пусть ρ — метрика на пространстве X. (a) $\Longrightarrow$ (b) Пусть (x_n) — последовательность точек в X. Можно считать, что все точки последовательности попарно различны (в противном случае или существует подпоследовательность из попарно различных точек и можно рассматривать ее, или существует подпоследовательность, все точки которой совпадают и она очевидно сходящаяся). Если показать, что у множества $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ есть предельная точка x^*, то тогда, беря по точке $x_{i_n} \in O_{\frac{1}{n}}(x^*)$, $i_{n+1} > i_n$, $n \in \mathbb{N}$, получим сходящуюся к x^* подпоследовательность (x_{i_n}).

Предположим, что A не имеет предельных точек. Тогда для любой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, содержащая лишь конечное число точек A. В силу компактности X из покрытия $\{Ox : x \in X\}$, можно выбрать конечное подпокрытие. Получается, что множество A конечно, что противоречит предположению о нем.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Если $f : X \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция (считаем, без ограничения общности, что f неограничена сверху), то существует последовательность точек (x_n) такая, что $f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность (x_n) содержит сходящуюся к точке x^* подпоследовательность (x_{i_n}). Но тогда по Теореме 13.7 Лекции 3 функция f разрывна в точке x^*. Полученное противоречие завершает доказательство импликации.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество точек $A_\varepsilon = \{x_1, \ldots, x_n\}$ такое, что для любой точки $x \in X$ существует точка $x_i \in A_\varepsilon$, для которой $\rho(x, x_i) < \varepsilon$ (множество точек $\{x_1, \ldots, x_n\}$ называется конечной *ε-сетью*). Действительно, в противном случае можно построить последовательность точек (x_n), попарные расстояния между которыми $\geq \varepsilon$. Множество $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ будет замкнутым подмножеством X и дискретным пространством (открытый шар $O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, $x \in X$, может содержать не более одной точки множества A), на котором функция $f : A \to \mathbb{N}$, $f(x_n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывна. По Теореме Брауэра–Титце–Урысона (Следствие 23.3 Лекции 8) существует непрерывное продолжение f на X, которое неограничено. Полученное противоречие завершает доказательство наличия конечной ε-сети.

Объединение $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ конечных $\frac{1}{n}$-сетей, $n \in \mathbb{N}$, есть счетное всюду плотное подмножество X. Так как X сепарабельно, то по Следствию 30.2 существует метризуемая компактификация Y пространства X, и пусть ρ' — метрика на Y. Точка $y \in Y \setminus X$ не является изолированной, поэтому функция $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\rho'(x,y)}$ — непрерывная неограниченная корректно определенная функция на X, что противоречит условию (c). Значит $X = Y$ и X — компактное пространство. $\square$

§ 31. Полные метрические пространства. Теорема Бэра о категории.

31.1. Определение. Последовательность (x_n) точек метрического пространства (X, ρ) называется *последовательностью Коши* или *фундаментальной последовательностью*, если для любого $\epsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ при $n, m > n_0$.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая последовательность Коши сходится. (Заметим, что всякая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.)

31.2. Примеры.

1. Пространства $\mathbb{R}^n$ в любой из следующих метрик

(ρ_1) $\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;

(ρ_2) $\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$;

(ρ_∞) $\rho_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\}$

полны, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

В одномерном случае все метрики на $\mathbb{R}$ совпадают и полнота $\mathbb{R}$ доказывается в курсе математического анализа.

2. Использование Задачи 7 Задания 3 устанавливает, что замкнутое подмножество полного метрического пространство полно.

3. Метрическое пространство (X, ρ) является полным в том и только том случае, если X полно в метрике $\rho'(x, y) = \min\{\rho(x, y),\ 1\}$.

4. Пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ полно в метрике $\rho(x, y) = \sup\{\frac{\rho'(x_n, y_n)}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, где $x = (x_n),\ y = (y_n)$, $\rho'(x_n, y_n) = \min\{|x_n - y_n|,\ 1\}$.

Пусть x^k, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность Коши в $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \rho)$. Так как $\rho'(pr_n(x), pr_n(y)) = \rho'(x_n, y_n) \le n\rho(x, y)$, то $pr_n(x^k) = x_n^k$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность Коши в $(\mathbb{R}, \rho')$ для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Пространство $(\mathbb{R}, \rho')$ полно, поэтому у последовательности x_n^k, $k \in \mathbb{N}$, существует предел x_n^*, $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность x^k, $k \in \mathbb{N}$, сходится к точке $x^* = (x_n^*)$. Действительно, любая окрестность точки x^* имеет по Теореме 25.6 Лекции 9 вид $Ox^* = \bigcap_{n=1}^{N} pr_n^{-1}(O_\varepsilon(x_n^*))$; для любого $n = 1, \dots, N$ существует $m_n \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho'(x_n^k, x_n^*) < \epsilon$ при $k > m_n$; для $m = \max\{m_n : n = 1, \dots, N\}$ имеем $x^k \in Ox^*$ при $k > m$.

31.3. Теорема (Бэра о категории). *В полном метрическом пространстве дополнение до счетного объединения нигде не плотных подмножеств всюду плотно.*

Доказательство. Заметим, что подмножество Y нигде не плотно в X в том и только том случае, если для любого непустого открытого подмножества O существует непустое открытое подмножество $V \subset O$ такое, что $V \cap Y = \emptyset$.

Пусть Y_n, $n \in \mathbb{N}$, — нигде не плотные подмножества, O — непустое открытое подмножество. Существует замкнутый шар $B_{r_1}(x_1)$, радиуса $r_1 \le 1$ такой, что $B_{r_1}(x_1) \subset O$ и $B_{r_1}(x_1) \cap Y_1 = \emptyset$, существует замкнутый шар $B_{r_2}(x_2)$, радиуса $r_2 \le \frac{1}{2}$ такой, что $B_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1)$, $B_{r_2}(x_2) \cap Y_2 = \emptyset$, и т.д.

$B_{r_n}(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Так как для любых $n < m$ $\rho(x_n, x_m) \le r_n$, и $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, то (x_n) — фундаментальная последовательность. Существует $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Так как любой шар $B_{r_k}(x_k)$ замкнут в X, и точка x является пределом подпоследовательности $(x_n : n \ge k)$ точек из $B_{r_k}(x_k)$, то $x \in B_{r_k}(x_k)$. Значит $x \in O$, $x \notin Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_n$. $\square$

31.4. Замечание. Пространства, являющиеся счетным объединением нигде не плотных подмножеств, называются *множествами первой категории.*

§ 32. Вполне ограниченные метрические пространства.

32.1. Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ из покрытия $\{O_\epsilon x : x \in X\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{O_\epsilon x_j : j = 1, \dots, k\}$.

Множество $E = \{x_j : j = 1, \dots, k\}$ называется *конечной ε-сетью.*

32.2. Свойства. 1. *Вполне ограниченное метрическое пространство ограничено.* Для конечной 1-сети $x_1, \dots, x_n$ пусть $M = \max\{\rho(x_1, x_k) : k = 1, \dots, n\}$. Тогда $X = O_{M+1}(x_1)$.

2. *Подпространство вполне ограниченого пространства вполне ограничено.* Действительно, пусть $y_x \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$, $x \in E$, (рассматриваем только те шары, которые пересекаются с Y). Так как $O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subset O_\varepsilon(y_x)$, то $\{O_\varepsilon(y_x) : x \in E\}$ — (конечная) ε-сеть для Y.

3. Вполне ограниченное пространство сепарабельно. В качестве всюду плотного множества можно взять объединение $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ конечных $\frac{1}{n}$-сетей $A_{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

32.3. Примеры. 1. В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ограниченность (возможность заключить множество в куб) совпадает с вполне ограниченностью. Действительно, если куб с ребром a разбить на кубики с ребром $\frac{a}{k}$ (k^n кубиков), то диаметр каждого кубика разбиения равен $\frac{a\sqrt{n}}{k}$, т.е. вершины кубиков образуют конечную $\frac{a\sqrt{n}}{k}$-сеть.

2. Подмножество $\{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1\} \subset \ell^2$ см.Задачу 13 задания 2 (*сфера в* ℓ^2) не вполне ограничено. Она содержит точки у которых лишь одна координата 1, а остальные 0. Расстояние между ними $\sqrt{2}$. Значит конечное число шаров радиуса меньше $\frac{1}{2}$ не может ее покрыть.

3. Подмножество $Q = \{(x_n) : |x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}\} \subset \ell^2$ (*гильбертов кирпич*) вполне ограничено.

Пусть $\varepsilon > 0$, N такое, что $\frac{1}{2^{N-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть подмножество $c_N \subset \ell^2$ состоит из точек, у которых только первые N координат отличны от нуля. Тогда для любой точки $\mathbf{x} = (x_n) \in Q$ существует точка $\mathbf{x}' = (x'_n)$ из $c_N \cap Q$ такая, что $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') < \frac{\varepsilon}{2}$ (у точки $\mathbf{x}$ надо обнулить все координаты начиная с $N+1$). Множество $c_N \subset \ell^2$ можно рассматривать как ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, и поэтому в нем существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть. Она будет ε-сетью для Q.

§ 33. Критерий компактности метрического пространства.

33.1. Лемма. *Если метрическое пространство X сепарабельно, то из любого его открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.*

Доказательство. По Теореме 21.7 Лекции 7 существует счетная база $\mathcal{B}$.

Пусть u — открытое покрытие X. Рассмотрим семейство $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} :$ существует $U(B) \in u, B \subset U\}$. Так как $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, то $\mathcal{B}'$ — счетное семейство открытых подмножеств. Для любой точки $x \in X$ существует $B \in \mathcal{B}'$ такой, что $x \in B$, $B \subset U(B) \in u$. Значит $\mathcal{B}' \in \operatorname{cov}(X)$, и $\{U(B) : B \in \mathcal{B}'\}$ — счетное подпокрытие u. $\square$

33.2. Теорема (Критерий компактности метрического пространства). *Метрическое пространство (X, ρ) компактно в том и только том случае, если X вполне ограничено и полно.*

Доказательство. Необходимость. Вполне ограниченность X следует из определения. Полнота X следует из сходимости произвольной фундаментальной последовательности, имеющей предельную точку по Теореме 30.3.

Достаточность. Рассмотрим произвольное открытое покрытие X. Так как X сепарабельно, то по Лемме 33.1 можем считать покрытие счетным $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$. Если из него нельзя выбрать конечное подпокрытие, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка x_n, $x_n \notin \bigcup\{O_k : k < n\}$.

Так как X вполне ограничено, то из последовательности (x_n) можно следующим образом выбрать фундаментальную подпоследовательность (x_{n_k}). Пусть A_n — конечная $\frac{1}{n}$-сеть, $n \in \mathbb{N}$, для X. Тогда $\{O_{\frac{1}{n}}(y) : y \in A_n\}$ — конечное покрытие X, $n \in \mathbb{N}$. Существует $O_1(y_1)$, в котором бесконечное число членов последовательности (x_n). В конечном покрытии $\{O_{\frac{1}{2}}(y) \cap O_1(y_1) : y \in A_2\}$ множества $O_1(y_1)$ существует подмножество $O_{\frac{1}{2}}(y_2) \cap O_1(y_1)$, в котором бесконечное число членов последовательности (x_n) и т.д. Искомая фундаментальная подпоследовательность определяется следующим образом $x_{n_1} \in O_1(y_1)$, $x_{n_2} \in O_{\frac{1}{2}}(y_2) \cap O_1(y_1)$, $n_2 > n_1$, и т.д.

Так как X полно, то существует предел $x \in X$ фундаментальной последовательности (x_{n_k}). Если $x \in O_m$, то бесконечное число членов последовательности (x_n) содержится во множестве O_m вопреки ее построению. Противоречие. Значит X компактно. $\square$

33.3. Следствие. *Подмножество Y метрического пространства (X, ρ) компактно в том и только том случае, когда Y вполне ограничено и полно.*

В частности, если X полное метрическое пространство, то Y компактно в том и только том случае, если Y вполне ограничено и замкнуто.

Лекция 13.

Равномерная метрика на произведении. Пространства отображений. Топологии равномерной и поточечной сходимостей. Компактно-открытая топология на $C(X, Y)$.

§ 34. Равномерная метрика на произведении. Пространства отображений в топологии равномерной сходимости. Топология поточечной сходимости.

Напомним, что на множестве Y^X (отображений множества X в топологическое пространство Y) определена тихоновская топология $\mathcal{T}$ (§16 Лекции 5).

34.1. Определение. Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство, $\rho'(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$ — ограниченная метрика на Y. На произведении Y^X определим *равномерную метрику*

$$d'(f, h) = \sup\{\rho'(f(x), h(x) : x \in X\}.$$

Метрическая топология $\mathcal{T}_{d'}$ на Y^X называется *топологией равномерной сходимости.*

Проверка корректности определения не составляет труда.

34.2. Предложение. *Если (Y, d) метрическое пространство, то тогда $\mathcal{T}_{d'} \geq \mathcal{T}$ (т.е. $\mathcal{T}_{d'} \supset \mathcal{T}$).*

Доказательство. Возьмем $O = \bigcap_{i=1}^{n} pr_{x_i}^{-1} O_{x_i} \in \mathcal{T}$ и $f = (f(x))_{x \in X} \in O$. Пусть $\epsilon = \min\{d'(f(x_i), Y \setminus O_{x_i}) : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда $O_\epsilon(f) \subset O$. $\square$

34.3. Теорема. *Если (Y, ρ) — полное метрическое пространство, то метрическое простанство (Y^X, d') полно.*

Доказательство. Метрическое пространство (Y, ρ') полно (Пример 31.2.3).

Рассмотрим фундаментальную последовательность $(f_n : X \to Y,\ n \in \mathbb{N})$ в (Y^X, d'). Для любого $x \in X$

$$\rho'(f_n(x), f_m(x)) \leq d'(f_n, f_m).$$

Значит для любого $x \in X$ последовательность $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, является фундаментальной в Y, и сходится к пределу, который обозначим $f(x)$. Покажем, что последовательность (f_n) сходится к $f \in Y^X$, $f = (f(x))$, $x \in X$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$\rho'(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

для любых $n, m \geq k$, и любого $x \in X$. Зафиксировав n и x, и устремляя m к бесконечности получаем

$$\rho'(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это неравенство выполнено для любых $x \in X$ и $n \geq k$. Поэтому

$$d'(f_n, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для любого $n \geq k$. $\square$

Если X топологическое пространство, то в произведении (Y^X, d') можно рассмотреть подмножество непрерывных отображений, обозначаемое $C(X,Y)$, и подмножество *ограниченных отображений* (т.е. отображений, для которых $\operatorname{diam} f(X) = \sup\{\rho(f(x), f(y)) : x, y \in X\} < +\infty$), обозначаемое $B(X,Y)$.

34.4. Пример. Если X дискретное пространство, то $C(X,Y) = Y^X$ ($C(X,Y) = Y$ для одноточечного X).

34.5. Теорема. *Подмножества $C(X,Y)$ и $B(X,Y)$ замкнуты в пространстве (Y^X, d'). Если (Y, ρ) — полное метрическое пространство, то $(C(X,Y), d'|_{C(X,Y)})$ и $(B(X,Y), d'|_{B(X,Y)})$ — полные метрические пространства.*

Доказательство. Замкнутость подмножества $C(X,Y)$. Пусть $f \in \mathrm{Cl}(C(X,Y))$. Существует последовательность непрерывных отображений (f_n), сходящаяся к f. Докажем непрерывность f в точке x_0.

Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$\rho'(f(x), f_n(x)) = \rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3 \quad \text{для всех} \quad n \geq k \quad \text{и} \quad x \in X. \tag{34.1}$$

Поскольку отображение f_k непрерывно, существует такая окрестность Ox_0, что

$$x \in Ox_0 \Rightarrow \rho'(f_k(x_0), f_k(x)) = \rho(f_k(x_0), f_k(x)) < \varepsilon/3. \tag{34.2}$$

Тогда для $x \in Ox_0$ имеем

$$\rho(f(x_0), f(x)) \leq \rho(f(x_0), f_k(x_0)) + \rho(f_k(x_0), f_k(x)) + \rho(f_k(x), f(x)) <$$

$$\text{(согласно (34.1) и (34.2))} \ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, f непрерывно в точке x_0.

Замкнутость подмножества $B(X,Y)$. Если $f \in \mathrm{Cl}(B(X,Y))$, то существует последовательность ограниченных отображений (f_n), сходящаяся к f. Существует такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$\rho'(f(x), f_k(x)) = \rho(f(x), f_k(x)) < 1 \text{ для всех } \ x \in X.$$

Тогда, если $\operatorname{diam} f_k(X) = \sup\{\rho(f_k(x), f_k(y)) : x, y \in X\} = M$, то

$$\operatorname{diam} f(X) = \sup\{\rho(f(x), f(y)) : x, y \in X\} \leq \sup\{\rho(f(x), f_k(x)) : x \in X\} +$$

$$+ \sup\{\rho(f_k(x), f_k(y)) : x, y \in X\} + \sup\{\rho(f_k(y), f(y)) : y \in X\} < M + 2.$$

Таким образом, отображение f ограниченно.

Второе утверждение теоремы является следствием Примера 31.2.2 $\square$

Легко проверить, что на подмножестве $B(X,Y)$ произведения Y^X корректно определена метрика

$$d(f,g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\},$$

и $d'(f,g) = \min\{d(f,g), 1\}$, где d' — равномерная метрика на Y^X. (Если $Y = \mathbb{R}$, то метрика d порождается нормой $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ на линейном пространстве $B(X)$.)

34.6. Следствие. *Пространство непрерывных ограниченных функций* $C^*(X) = C(X,\mathbb{R}) \cap B(X,\mathbb{R})$ *— полное мерическое пространство и в равномерной метрике, и по эквивалентной метрике* d*, порожденной нормой* $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

Топология поточечной сходимости на $C(X,Y)$ — топология $\mathcal{T}|_{C(X,Y)}$ подпространства тихоновского произведения Y^X.

§ 35. Компактно-открытая топология на $C(X,Y)$.

35.1. Компактно-открытая топология на $C(X,Y)$. Предбазу *компактно-открытой топологии* $\mathcal{T}_{co}$ на множестве $C(X,Y)$ образуют множества вида
$[K,U] = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subset U\}$,
где K — компактное множество в X, а U — открытое множество в Y.

35.2. Предложение. *Если пространство* Y *хаусдорфово, то пространство* $(C(X,Y),\mathcal{T}_{co})$ *также хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть $f_i : X \to Y$ — различные отображения, $i = 1,2$. Существует точка $x \in X$, для которой $f_1(x) \neq f_2(x)$. Возьмем непересекающиеся окрестности U_1 и U_2 точек $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда множества $V_i = \big[\{x\},U_i\big]$, $i = 1,2$, не пересекаются и $f_i \in V_i$. $\square$

35.3. Теорема.

$$\mathcal{T}_{co} \geq \mathcal{T}|_{C(X,Y)},$$

если X *дискретно, то топологии совпадают.*

Если (Y,d) *метрическое пространство, то тогда*

$$\mathcal{T}_{d'}|_{C(X,Y)} \geq \mathcal{T}_{co},$$

и топологии совпадают в случае хаусдорфова компактного пространства X.

Доказательство. Множество $O = pr_x^{-1}O \cap C(X,Y)$, $x \in X$, из предбазы топологии $\mathcal{T}|_{C(X,Y)}$ очевидно является множеством вида $[\{x\},O]$ из предбазы компактно-открытой топологии $\mathcal{T}_{co}$. Тем самым первое неравенство доказано. Равенство топологий в случае дискретного X следует из конечности компактных подмножеств X.

Для доказательства второго неравенства достаточно показать, что любое множество $[K,U]$ из предбазы компактно-открытой топологии открыто в топологии равномерной сходимости. Пусть $f = (f(x))_{x\in X} \in [K,U]$. Так как $f(K) \subset U$ и $f(K)$ компактно, то $d(f(K),Y \setminus O) = \inf\{d(x,Y \setminus O) : x \in f(K)\} = \epsilon > 0$ (согласно Задаче 16 Задания 3 функция $d : X \to \mathbb{R}_+$, $d(x) = d(x,Y \setminus O)$, непрерывна, и $f(K)$ компактно). Тогда $O_\epsilon(f) \subset [K,U]$ и второе неравенство доказано.

Докажем равенство топологий в случае хаусдорфова компактного X. Для этого достаточно показать, что в любой окрестности прозвольного отображения в топологии равномерной сходимости содержится его окрестность в компактно-открытой топологии.

Возьмем $O_\epsilon(f)$ — базисную окрестность отображения f в топологии равномерной сходимости. Для любой точки $x \in X$ существует ее окрестность Ox такая, что $f(\mathrm{Cl}(Ox)) \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$. В силу компактности X выберем конечное подпокрытие $\{O_{x_1},\dots,O_{x_n}\}$ из покрытия $\{Ox : x \in X\}$. Тогда для множеств $[\mathrm{Cl}(O_{x_i}),O_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x_i))]$, $i = 1,\dots,n$, из предбазы компактно-открытой топологии выполнено

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n}[\mathrm{Cl}(O_{x_i}),O_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x_i))] \subset O_\epsilon(f). \ \square$$

35.4. Отображения $X \times Y \to Z$ **и** $X \to C(Y, Z)$. Пусть даны пространства X, Y, Z и непрерывное отображение $f : X \times Y \to Z$ определено отображение $F : X \to C(Y, Z)$,

$$(F(x))(y) = f(x, y). \tag{35.1}$$

Теперь пусть дано отображение $F : X \to C(Y, Z)$. Тогда определено отображение $f : X \times Y \to Z$, задаваемое формулой

$$f(x, y) = (F(x))(y). \tag{35.2}$$

35.5. Теорема. *Для непрерывного отображения* $f : X \times Y \to Z$ *отображение* $F : X \to C(Y, Z)$ (35.1), *в пространство непрерывных отображений* $C(Y, Z)$ *с компактно-открытой топологией, непрерывно.*

Обратное утверждение выполняется, если пространство Y *локально компактно.*

Доказательство. Согласно Предложению 13.3 Лекции 3 достаточно для точки $x_0 \in X$ и предбазисной окрестности $[K, U]$ функции $F(x_0)$ (т.е.

$$(F(x_0))(K) \subset U) \tag{35.3}$$

найти такую окрестность Ox_0, что $F(Ox_0) \subset [K, U]$.

Для каждой точки $y \in K$ фиксируем такие окрестности V_y и W_y точек x_0 в X и y в Y соответственно, что

$$f(V_y \times W_y) \subset U. \tag{35.4}$$

Это возможно, в силу (35.1) и (35.3). Из семейства $\{W_y : y \in K\}$ выделим конечное подсемейство $W_{y_1}, \ldots, W_{y_n}$, покрывающее множество K. Тогда $Ox_0 = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ является окрестностью точки x_0 и

$$f(Ox_0 \times K) \subset f(\bigcup_{i=1}^{n} (V_{y_i} \times W_{y_i})) \subset (35.4) \subset U. \tag{35.5}$$

Из (35.5) и (35.1) вытекает, что $F(Ox_0) \subset [K, U]$.

Доказательство обратного утверждения. Для точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$ и окрестности W точки $f(x_0, y_0)$ возьмем окрестность V точки y_0 с компактным замыканием $\mathrm{Cl}(V)$, содержащимся в $(F(x_0))^{-1}(W)$. В силу непрерывности отображения F, существует такая окрестность U точки x_0, что $F(U) \subset \big[\mathrm{Cl}(U), W\big]$. Тогда $U \times W$ — окрестность точки (x_0, y_0), обладающая свойством $f(U \times V) \subset W$ согласно определению (35.2) и свойству $F(U) \subset \big[\mathrm{Cl}(V), W\big]$. $\square$

Добавление. Пополнение метрического пространства.

1. Определение. Отображение метрических пространств $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ называется *изометрическим вложением* (*изометрией*), если для любых точек $x, y \in X$ выполнено соотношение $\rho(x, y) = d(f(x), f(y))$ (и f — биекция).

Любое изометрическое вложение — непрерывное инъективное отображение, изометрия — гомеоморфизм.

2. Теорема. *Любое метрическое пространство* (X, ρ) *изометрически вкладывается в полное метрическое пространство.*

Доказательство. Покажем, что (X, ρ) изометрически вкладывается в полное метрическое пространство $C^*(X)$ с метрикой $d(f, g) = \sup\{|(f(x) - g(x)| : x \in X\}$.

Пусть x_0 фиксированная точка X. Для точки $a \in X$ определим функцию $\phi_a : X \to \mathbb{R}$,

$$\phi_a(x) = \rho(x, a) - \rho(x, x_0).$$

В §13.5 Лекции 3 показана непрерывность функций ϕ_a, $a \in X$. Докажем их ограниченность. Используя неравенство треугольника, для любой точки $x \in X$ имеем

$$|\phi_a(x)| = |\rho(x, a) - \rho(x, x_0)| \leq \rho(a, x_0).$$

Определим отображение $\Phi : X \to C^*(X)$, $\Phi(a) = \phi_a$, и покажем, что оно является изометрическим вложением, т.е. для любой пары точек $a, b \in X$ выполнено

$$\rho(a, b) = d(\phi_a, \phi_b) = \sup\{|\phi_a(x) - \phi_b(x)| : x \in X\}.$$

Так как

$$\sup\{|\phi_a(x) - \phi_b(x)| : x \in X\} = \sup\{|\rho(x, a) - \rho(x, b)| : x \in X\},$$

то $d(\phi_a, \phi_b) \leq \rho(a, b)$. При $x = a$ получаем равенство

$$|\phi_a(a) - \phi_b(a)| = \rho(a, b).$$

Значит, $d(\phi_a, \phi_b) = \rho(a, b)$. $\square$

3. Определение. Пусть X — метрическое пространство, f — его изометрическое вложение в полное метрическое пространство Y. Замыкание $f(X)$ в Y называется *пополнением* пространства X.

4. Задача. Проверить корректность определения пополнения метрического пространства, т.е. установить единственность пополнения с точностью до изометрий.

Лекция 14.

Связность. Компоненты связности. Наследственная несвязность. Нульмерность. Линейная связность.

§ 36. Связность. Компоненты связности.

36.1. Определение. Пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых открытых непересекающихся множеств.

Пространство X *несвязно* тогда и только тогда, когда X представляется в виде $X = A \cup B$ объединения непересекающихся непустых открыто-замкнутых множеств A и B.

36.2. Примеры. 1. Пустое множество и пространство, состоящее из одной точки, связны.

2. Если пространство X состоит из двух различных точек a и b (Пример 9.2.2), то топологии $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\}$ ("слипшееся двоеточие"), $\mathcal{T}_2 = \big\{\varnothing, \{a\}, X\big\}$, $\mathcal{T}_3 = \big\{\varnothing, \{b\}, X\big\}$ ("связные двоеточия") связны.

3. Конечное T_1-пространство, содержащее не менее двух точек, несвязно.

4. Подпространства $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$) рациональных (соответственно иррациональных) чисел числовой прямой $\mathbb{R}$ несвязны.

5. Отрезок $[0, 1]$ связен (доказано в курсе математического анализа).

36.3. Лемма. *Если связное подпространство X_0 пространства X пересекается с открыто-замкнутым множеством $U \subset X$, то $X_0 \subset U$.*

Доказательство. Действительно, в противном случае $X_0 = (U \cap X_0) \cup ((X \setminus U) \cap X_0)$, где $(U \cap X_0)$ и $(X \setminus U) \cap X_0$ — непустые дизъюнктные открытые подмножества X_0. Это противоречит связности X_0. $\square$

36.4. Предложение. *Пусть Z_α — связное подмножество пространства X, $\alpha \in A$. Если $Z_0 = \bigcap_{\alpha \in A} Z_\alpha \neq \varnothing$, то множество $Z = \bigcup_{\alpha \in A} Z_\alpha$ связно.*

Замыкание связного множества связно.

Доказательство. Если первое утверждение неверно, то Z представляется в виде объединения непересекающихся непустых открыто-замкнутых множеств A и B. Пусть точка $x_0 \in Z_0$ принадлежит одному из этих множеств, например, $x_0 \in A$. Тогда для любой точки $x \in Z$ связное множество Z_α, которому принадлежат точки x_0, x, принадлежит A согласно Лемме 36.3. Следовательно, $Z \subset A$ и $B = \varnothing$. Получили противоречие.

Пусть Z — связное подмножество пространства X. Если второе утверждение неверно, то $\mathrm{Cl}(Z)$ представляется в виде объединения непересекающихся непустых открыто-замкнутых множеств A и B. Так как Z всюду плотно в $\mathrm{Cl}(Z)$, то $A \cap Z \neq \varnothing$ и $B \cap Z \neq \varnothing$. Тем самым Z несвязно. Получили противоречие. $\square$

36.5. Свойства связности.

1. Пусть Z — связное подмножество X. Тогда любое подмножество Z' такое, что $Z \subset Z' \subset \mathrm{Cl}(Z)$, связно.

2. Непрерывный образ связного пространства связен.

3. Тихоновское произведение связных пространств — связное пространство.

Пусть $X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ и X_α — связное пространство, $\alpha \in \mathcal{A}$. Зафиксируем точку $x = (x_\alpha) \in X$ и для любого конечного подмножества $F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \mathcal{A}$

рассмотрим подмножество $X_F = \{y = (y_\alpha) \in X : y_\alpha = x_\alpha, \text{ если } \alpha \notin F\}$. Легко заметить, что X_F гомеоморфно произведению $X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_k}$.

Обозначим семейство конечных подмножеств $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}_{\mathrm{Fin}}$, $Y = \bigcup_{F \in \mathcal{A}_{\mathrm{Fin}}} X_F$. Тогда Y всюду плотно в X. Действительно, любое базисное открытое множество имеет вид $O = \bigcap_{i=1}^k pr_{\alpha_i}^{-1} O_i$, где O_i открыто в X_{α_i}. Тогда для $F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \mathcal{A}$ точка (y_α), $y_\alpha = x_\alpha$, если $\alpha \notin F$, и $y_{\alpha_i} \in O_i$, содержится в $O \cap X_F$. Поэтому, если Y связно, то и X связно (как его замыкание).

Подмножество Y связно, если все подмножества X_F, $F \in \mathcal{A}_{\mathrm{Fin}}$, связны (их пересечение не пусто (точка x принадлежит всем этим множествам)).

Связность пространств $X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_k}$, гомеоморфных X_F, доказывается индукцией по количеству сомножителей. Доказательство для двух сомножителей является основным.

Пусть A и B — связные пространства. Зафиксируем точку $(a, b) \in A \times B$. Тогда для любого $x \in A$ множество $T_x = (\{x\} \times B) \cup (A \times \{b\})$ является связным, и $A \times B = \bigcup_{x \in A} T_x$ связно (по Предложению 36.4). $\square$

36.6. Определение. Непустое связное множество Z в пространстве X называется *максимальным связным множеством* или *компонентой связности* пространства X, если всякое связное множество Z_1, удовлетворяющее условию $Z \subset Z_1 \subset X$, совпадает с Z.

Любая компонента связности пространства X замкнута в X (Предложение 36.4).

Всякое пространство X является дизъюнктной суммой своих компонент связности (Предложение 36.4). Значит всякая точка x пространства X лежит в единственной компоненте связности, которая обозначается через C_x и называется *компонентой связности точки x*.

36.7. Предложение. *Компонента связности точки $x = (x_\alpha)$ произведения $X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ совпадает с произведением $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ компонент связности C_α точек x_α в сомножителях X_α, $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть C_x — компонента связности точки x. Из пункта 36.5.2 следует, что $pr_\alpha(C_x)$ — связное подмножество X_α и $x_\alpha \in C_\alpha \subset pr_\alpha(C_x)$. Значит $C_x \subset \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$. Но $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$ связно (пункт 36.5.3), и значит $C_x = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$. $\square$

36.8. Примеры. 1. В связном пространстве одна компонента связности.

2. В пространстве $\mathbb{Q}$ компоненты связности одноточечны.

3. В произведении $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ компонентами связности являются вертикальные прямые, задаваемые уравнениями $x = r$, где r — рациональное число.

36.9. Определение. Пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X, содержащих точку $x \in X$, называется *квазикомпонентой точки x* и обозначается через Q_x.

36.10. Предложение. *Для всякой точки $x \in X$ ее компонента связности C_x содержится в квазикомпоненте Q_x.*

Доказательство. Пусть U_α — какое-нибудь открыто-замкнутое множество, содержащее точку x. Из Леммы 36.3 получаем, что $C_x \subset U_\alpha$. Тогда $C_x \subset \bigcap_{x \in U_\alpha} U_\alpha = Q_x$. $\square$

36.11. Пример *пространства, в котором квазикомпонента не совпадает с компонентой связности.*

Рассмотрим плоское множество X, которое есть объединение двух вертикальных прямых α и β, задаваемых соответственно уравнениями $x = -1, x = 1$, и контуров прямоугольников q_n, две стороны которых имеют уравнения $x = -1 + \frac{1}{n}, x = 1 - \frac{1}{n}$, а две другие лежат на горизонтальных прямых $y = n, y = -n$, $n \geq 2$.

Докажем, что объединение двух прямых α и β является квазикомпонентой в пространстве X. В самом деле, всякое открыто-замкнутое множество U, пересекающееся с прямой α, содержит всю эту прямую и контуры всех прямоугольников q_n, начиная с некоторого n_0, и, следовательно, будучи замкнутым, содержит прямую β. Таким образом, квазикомпонента произвольной точки $a \in \alpha$ содержит множество $\alpha \cup \beta$. Но Q_a является пересечением всех открыто-замкнутых множеств, содержащих точку a. Поэтому эта квазикомпонента не может пересекаться ни с одним из контуров q_n, т.е. $Q_a = \alpha \cup \beta$. Но это множество несвязно и, значит, не является компонентой.

36.12. Теорема. *В компактном хаусдорфовом пространстве X компонента связности C_x любой точки $x \in X$ совпадает с ее квазикомпонентой Q_x.*

Доказательство. Согласно Предложению 36.10 достаточно проверить, что

$$C_x \supset Q_x = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha, \tag{36.1}$$

а для этого достаточно показать, что множество Q_x связно. Если это не так, то Q_x представляется в виде дизъюнктной суммы непустых замкнутых в Q_x (а значит и в X) множеств F_1 и F_2. В силу нормальности компактного пространства X, существуют непересекающиеся окрестности OF_1 и OF_2, объединение которых $OQ_x = OF_1 \cup OF_2$ является окрестностью Q_x.

Покажем, что в ней содержится открыто-замкнутая окрестность U. Семейство открытых множеств

$$v = \{X \setminus U_\alpha : \alpha \in A\}$$

покрывает компактное подпространство $X \setminus OQ_x$. По Лемме 26.6 Лекции 10 в v можно выбрать конечное подсемейство $\{X \setminus U_{\alpha_i} : i = 1, \dots, n\}$, покрывающее $X \setminus OQ_x$. Тогда $U = \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ — искомая открыто-замкнутая окрестность.

Положим $W_i = U \cap OF_i$, $i = 1, 2$. Из условия $U \subset OF_1 \cup OF_2$ вытекает, что множества W_1 и W_2 открыто-замкнуты в X. Точка x лежит в одном из этих множеств, например, в W_1. Тогда и квазикомпонента Q_x лежит в W_1. Следовательно, $Q_x \cap W_2 = \varnothing$ и поэтому $Q_x \cap F_2 = \varnothing$, поскольку $F_2 \subset U \cap OF_2 = W_2$. Полученное противоречие доказывает связность Q_x. $\square$

§ 37. Наследственная несвязность. Нульмерность.

37.1 Определение. Пространство X называется *вполне несвязным* или *наследственно несвязным*, если несвязно всякое его подпространство, содержащее более одной точки.

Каждое вполне несвязное пространство является T_1-пространством.

Пространство вполне несвязно в том и только том случае, если компоненты связности одноточечны.

37.2. Определение. T_0-пространство X называется *нульмерным*, если оно имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств.

Нульмерное пространство является тихоновским. Действительно, для любой точки x и замкнутого множества F, $x \notin F$ существует открыто-замкнутая окрестность U (из базы топологии), точки x, содержащаяся в $X \setminus F$. Тогда функция $f : X \to \mathbb{R}$, $f(U) = 0$, $f(X \setminus U) = 1$ является непрерывной функцией, реализующей функциональную отделимость точки и замкнутого множества.

Для точек $x \neq y$ существует, например, окрестность Ox точки x, $y \notin Ox$. Существует и открыто-замкнутая окрестность U (из базы топологии), точки x, содержащаяся в Ox, и $X \setminus U$ является окрестностью y, не содержащей точки x. Тем самым, X — T_1-пространство.

37.3. Свойства несвязности. Подпространство нульмерного (соответственно вполне несвязного) пространства нульмерно (соответственно вполне несвязно).

Нульмерное пространство вполне несвязно.

Тихоновское произведение нульмерных (соответственно вполне несвязных) пространств нульмерно (соответственно вполне несвязно) (для доказательства использовать: Определение 16.1 Лекции 5, Предложение 22.8 Лекции 7, Предложение 36.7)).

37.4. Примеры. 1. Канторово множество нульмерно, а значит и вполне несвязно. Действительно пересечение интервалов прямой, концы которых принадлежат дополнению до канторова множества, с канторовым множеством — открыто-замкнутая база.

2. Подпространства $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$) рациональных (соответственно иррациональных) чисел числовой прямой $\mathbb{R}$ нульмерны.

3. Вполне несвязное не нульмерное пространство.

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy на плоскости $\mathbb{R}^2$. На отрезке $[0, 1]$ оси Ox рассмотрим канторово множество C. Соединим прямолинейным отрезком каждую точку x множества C с точкой $a = (1/2, 1/2)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ и обозначим этот отрезок через $[a, x]$. Если точка $x \in C$ является концом смежного к C интервала, то на отрезке $[a, x]$ берем все точки, у которых вторая координата рациональна, в противном случае на отрезке $[a, x]$ берем все точки, у которых вторая координата иррациональна. Все выбранные точки составляют "*веер Кнастера-Куратовского*", который обозначим через $\mathcal{K}$.

Задача. Доказать, что подпространство $\mathcal{K} \setminus \{a\}$ является вполне несвязным, не нульмерным пространством. (Отметим, что пространство $\mathcal{K}$ связно.)

37.5. Предложение. *Нульмерность и вполне несвязность хаусдорфовых компактных пространств совпадают.*

Доказательство. В силу пункта 37.3 необходимо показать, что вполне несвязное компактное пространство X нульмерно. Пусть O — окрестность точки $x \in X$. По Теореме 36.12 ее квазикомпонента $Q_x = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{x\}$. Из семейства $\{X \setminus U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытых множеств, покрывающих компактное подмножество $X \setminus O$, можно выбрать конечное подсемейство $\{X \setminus U_{\alpha_1}, \dots, X \setminus U_{\alpha_k}\}$, покрывающее $X \setminus O$. Тогда $\bigcap_{i=1}^k U_{\alpha_i}$ открыто-замкнутая окрестность точки x, и $\bigcap_{i=1}^k U_{\alpha_i} \subset O$. Таким образом установлено, что X имеет базу из открыто-замкнутых множеств. $\square$

§ 38. Линейная связность.

38.1. Определение. Непрерывное отображение $\varphi : I = [0, 1] \to X$ называется *путем* в пространстве X. Точки $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ называются соответственно *началом* и *концом* пути φ. Если начало и конец пути φ совпадают, то путь φ называется *петлей*.

38.2. Определение. Пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путем, т.е. для любых двух точек $x, y \in X$ существует путь φ такой, что $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$.

Всякое линейно связное пространство связно.

38.3. Пример. Компакт "$\sin\frac{1}{x}$" из примера 28.2.3 Лекции 11 связен (связное подмножество X_2 всюду плотно), но не линейно связен. Точки $(0,0) \in X_1$ и $(x', y') \in X_2$ не соединяются путем. Действительно, пусть существует путь

$$\varphi : I \to X,\ \varphi(t) = (x(t), y(t)),\ \varphi(0) = (0,0),\ \varphi(1) = (x', y').$$

Множество $\varphi^{-1}(X_1)$ замкнуто в $[0,1]$ и пусть $\tau = \sup\{t : t \in \varphi^{-1}(X_1)\}$. Тогда $\tau < 1$, $\varphi(\tau) \in X_1$, $\varphi((\tau, 1]) \subset X_2$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\tau < t_n < \min\{1, \tau + \frac{1}{n}\}$ такое, что $y(t_n) = (-1)^n$. Действительно, $x(\min\{1, \tau + \frac{1}{n}\}) > 0$. Поэтому существует a, $0 < a < x(\min\{1, \tau + \frac{1}{n}\})$ такое, что $\sin(\frac{1}{a}) = (-1)^n$. Образ отрезка $[\tau, \min\{1, \tau + \frac{1}{n}\}]$ содержит отрезок $[0, x(\min\{1, \tau + \frac{1}{n}\})]$. Значит существует точка $t_n \in [\tau, \min\{1, \tau + \frac{1}{n}\}]$ такая, что $x(t_n) = a$. Так как $(x(t_n), y(t_n)) \in X$, то $y(t_n) = (-1)^n$.

Имеем $\lim_{n\to\infty} t_n = \tau$, но $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = \lim_{n\to\infty}(x(t_n), y(t_n))$ не определен. Значит отображение φ разрывно в точке τ (Теорема 13.8 Лекции 3).

38.4. Определение. Пусть $\varphi : I \to X$ и $\psi : I \to X$ такие пути, что $\varphi(1) = \psi(0)$. *Произведением путей* φ и ψ называется путь $\varphi\psi : I \to X$,

$$\varphi\psi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{при } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \psi(2t-1) & \text{при } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Обратным путем к $\varphi : I \to X$ называется путь $\varphi^{-1} : I \to X$,

$$\varphi^{-1}(t) = \varphi(1-t).$$

38.5. Предложение. *Пусть Z_α — линейно связные подмножество пространства X, $\alpha \in A$. Если $Z_0 = \bigcap_{\alpha\in A} Z_\alpha \neq \varnothing$, то множество $Z = \bigcup_{\alpha\in A} Z_\alpha$ линейно связно.*

Доказательство. Пусть $x, y \in Z$ такие, что $x \in X_{\alpha_1}, y \in X_{\alpha_2}$, и $x_0 \in Z_0$. Найдем путь с началом в x и концом в y.

Существуют пути $\varphi : I \to X_{\alpha_1}$, $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x$, и $\psi : I \to X_{\alpha_2}$, $\psi(0) = x_0$, $\psi(1) = y$. Путь $\varphi^{-1}\psi : I \to Z$ является искомым. $\square$

38.6. Свойства линейной связности.

1. Непрерывный образ линейно связного пространства линейно связен.

2. Тихоновское произведение линейно связных пространств — линейно связное пространство.

Пусть $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ и X_α — линейно связное пространство, $\alpha \in \mathcal{A}$. Для $x = (x_\alpha), y = (y_\alpha) \in X$ существуют пути $\varphi_\alpha : I \to X_\alpha$, $\varphi_\alpha(0) = x_\alpha$, $\varphi_\alpha(1) = y_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда путь $\varphi = \Delta_{\alpha\in\mathcal{A}}\varphi_\alpha$ является искомым.

38.7. Определение. Максимальное (по включению) линейно связное подмножество пространства X называется *компонентой линейной связности* пространства X.

В отличие от компонент связности компоненты линейной связности не обязаны быть замкнутыми. Так, компакт “$\sin \frac{1}{x}$” имеет две компоненты линейной связности: замкнутую X_1 и незамкнутую X_2.

Пространство X является дизъюнктной суммой своих компонент линейной связности (см. Предложение 38.5). Всякая точка $x \in X$ содержится в единственной компоненте линейной связности пространства X.

Лекция 15.

Гомотопия. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства. Фундаментальная группа.

§ 39. Гомотопия. Связанные гомотопии.

39.1. Определение гомотопии. Непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ называются *гомотопными* (обозначение $f \sim_h g$), если существует такое непрерывное отображение $\Phi : X \times I \to Y$, что $\Phi(x, 0) = f(x)$, $\Phi(x, 1) = g(x)$ для каждого $x \in X$. Всякое такое отображение Φ называется *гомотопией*, соединяющей f с g.

Отбражение, гомотопное постоянному отображению, называют *гомотопным нулю.*

Иногда отображение Φ заменяется семейством отображений

$$f_t : X \to Y,\ t \in I,\ f_t(x) = \Phi(x, t)$$

Семейство $\{f_t : X \to Y : t \in T\}$ можно рассматривать как отображение

$$F : I \to C(X, Y)$$

Из Теоремы 35.5 Лекции 13 следует.

39.2. Предложение. *Пусть пространство $C(X, Y)$ с компактно-открытой топологией.*

Если отображение $\Phi : X \times I \to Y$ непрерывно, то непрерывно и отображение $F : I \to C(X, Y)$.

Если отображение $F : I \to C(X, Y)$ непрерывно и пространство X хаусдорфово и локально компактно, то непрерывно отображение

$$\Phi : X \times I \to Y,\ \Phi(x, t) = f_t(x).$$

39.3. Теорема. *Отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y.*

Доказательство. Рефлексивность. Всякое отображение $f : X \to Y$ гомотопно самому себе. Действительно, достаточно рассмотреть *постоянную гомотопию* отображения f: $\Phi : X \times I \to Y$, где $\Phi(x, t) = f(x)$ для любых $x \in X,\ t \in I$. Ее непрерывность следует из формулы $\Phi = f \circ pr_X$, где pr_X — проекция произведения на сомножитель X.

Симметричность. Пусть отображение $\Phi : X \times I \to Y$ — гомотопия, связывающая отображения f и g. Рассмотрим отображение $\Gamma : X \times I \to Y$, определяемое формулой $\Gamma(x, t) = \Phi(x, 1 - t)$. Это отображение, очевидно, непрерывно и является гомотопией, соединяющей отображение g и f. Следовательно, отношение $\sim_h$ симметрично.

Транзитивность. Пусть даны отображения $f_i : X \to Y,\ i = 1, 2, 3$. При этом, $f_1 \sim_h f_2$, а $f_2 \sim_h f_3$. Надо показать, что $f_1 \sim_h f_3$. Пусть гомотопия Φ_1 соединяет f_1 с f_2, а гомотопия Φ_2 соединяет f_2 с f_3. Определим гомотопию $\Phi : X \times I \to Y$ следующим образом:

$$\begin{cases} \Phi(x, t) = F_1(x, 2t) & \text{при} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}; \\ \Phi(x, t) = F_2(x, 2t - 1) & \text{при} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Имеем $\Phi\left(x,\frac{1}{2}\right)=\Phi_1(x,1)=f_2(x)$. С другой стороны $\Phi\left(x,\frac{1}{2}\right)=\Phi_2(x,0)=f_2(x)$. Значит, отображение Φ определено корректно. Оно непрерывно, будучи непрерывным на замкнутых слагаемых $X\times\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и $X\times\left[\frac{1}{2},1\right]$. Наконец, $\Phi(x,0)=\Phi_1(x,0)=f_1(x,0)$, $\Phi(x,1)=\Phi_2(x,1)=f_3(x)$. Таким образом, гомотопия Φ соединяет f_1 с f_3. $\square$

39.4. Определение. Классы эквивалентности гомотопных отображений называются *гомотопическими классами*. Множество гомотопических классов отображений $X\to Y$ обозначается через $\pi(X,Y)$. Гомотопический класс отображения $f:X\to Y$ будем обозначать через $[f]$.

39.5. Примеры. 1. $\pi(X,I)$ состоит из одной точки. В самом деле, пусть $f_0,f_1:X\to I$ — два непрерывных отображения. Рассмотрим гомотопию $\Phi:X\times I\to I$, определяемую следующим образом:

$$\Phi(x,t)=(1-t)f_0(x)+tf_1(x). \qquad (39.1)$$

Ясно, что отображение из (39.1) соединяет f_0 с f_1.

Непрерывность отображения $\Phi(x,t)=(1-t)f_0(x)+tf_1(x)=f_0(x)+t(f_1(x)-f_0(x))$ можно доказать, установив непрерывность отображений $H(x,t)=f_0(x):X\times I\to I$ и $G(x,t)=t(f_1(x)-f_0(x)):X\times I\to I$ (как сумму непрерывных функций). Остается отметить, что $H=f_0\circ pr_X$ (и она непрерывна как композиция непрерывных отображений), $G(x,t)=pr_I(x,t)\cdot((f_1-f_0)\circ pr_X)(x,t)$ (и она непрерывна как произведение непрерывных функций), где pr_I,pr_X — проекции произведения $X\times I$ на сомножители I и X соответственно.

2. Рассуждения предыдущего пункта показывают, что $\pi(X,V)$ одноточечно для любого выпуклого подмножества $\mathbb{R}^n$.

3. Если X одноточечное пространство, то множество $\pi(X,Y)$ есть множество компонент линейной связности пространства Y.

4. Если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то $\pi(X,Y)$ — компоненты линейной связности пространства $C(X,Y)$ в компактно-открытой топологии.

39.6. Лемма. *Если $h:A\to X, f,f':X\to Y, g:Y\to B$ — непрерывные отображения, и $F:X\times I\to Y$ — гомотопия, соединяющая f и f', то $g\circ F\circ(h\times \mathrm{id})$ — гомотопия, соединяющая $g\circ f\circ h$ и $g\circ f'\circ h:A\to B$, где* id *— тождественное отображение отрезка I.*

Доказательство. Тривиальная проверка условий гомотопности отображений. $\square$

39.7. Связанные гомотопии. Пусть A — подмножество пространства X. Гомотопия $F:X\times I\to Y$ называется *связанной на A*, или *A-гомотопией*, если $F(x,t)=F(x,0)$ при $x\in A$, $t\in I$. Два отображения, которые можно соединить A-гомотопией называются *A-гомотопными.*

Как и обычная гомотопность, A-гомотопность является отношением эквивалентности. Как правило, мы будем иметь дело лишь с одноточечным и двухточечным множеством A.

§ 40. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства.

40.1. Определение. Пространства X_1 и X_2 называются *гомотопически эквивалентными* (обозначение $X_1 \sim X_2$), если существуют такие непрерывные отображения $f : X_1 \to X_2,\ \ g : X_2 \to X_1$, что композиции $g \circ f : X_1 \to X_1,\ \ f \circ g : X_2 \to X_2$ гомотопны тождественным отображениям $\mathrm{id}_{X_1},\ \ \mathrm{id}_{X_2}$ соответственно.

Отображения f и g называются *гомотопически взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями.*

Если отображения $g \circ f$ и $f \circ g$ не просто гомотопны тождественным отображениям, но и являются таковыми, то f и g — взаимно обратные гомеоморфизмы. Таким образом, отношение гомотопической эквивалентности является обобщением отношения гомеоморфности. Гомотопически эквивалентные пространства не обязаны быть гомеоморфными.

40.2. Примеры. 1. Шары B^n гомотопически эквивалентны точке, но B^{n_1} не гомеоморфно B^{n_2} при $n_1 \neq n_2$, в частности, отрезок I не гомеоморфен кругу B^2.

2. Диск $D^n,\ n > 0$, гомотопически эквивалентен точке, но D^n не гомеоморфен B^n, поскольку шар B^n компактен, а диск D^n — нет.

3. Окружность S^1 и кольцо $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ имеют одинаковый гомотопический тип, но не гомеоморфны.

40.3. Теорема. *Отношение гомотопической эквивалентности является отношением эквивалентности на классе всех топологических пространств.*

Доказательство. Фактически в проверке нуждается только транзитивность. Пусть $X_1 \sim X_2$ и $X_2 \sim X_3$. Существуют такие отображения $f_1 : X_1 \to X_2,\ \ g_1 : X_2 \to X_1,\ \ f_2 : X_2 \to X_3,\ \ g_2 : X_3 \to X_2$, что

$$g_1 \circ f_1 \sim_h \mathrm{id}_{X_1},\quad f_1 \circ g_1 \sim_h \mathrm{id}_{X_2}; \tag{40.1}$$

$$g_2 \circ f_2 \sim_h \mathrm{id}_{X_2},\quad f_2 \circ g_2 \sim_h \mathrm{id}_{X_3}. \tag{40.2}$$

Положим

$$f = f_2 \circ f_1,\quad g = g_1 \circ g_2.$$

Тогда $g \circ f = g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 = g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \sim_h \big(\text{по Лемме 39.6 и (40.2)}\big) \sim_h g_1 \circ \mathrm{id}_{X_2} \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \sim_h \text{(40.1)} \sim_h \mathrm{id}_{X_1}$. Таким же образом показываем, что $f \circ g \sim_h \mathrm{id}_{X_3}$. Значит, отображения f и g гомотопически взаимно обратны и $X_1 \sim X_3$. $\square$

40.4. Класс гомотопически эквивалентных пространств называется *гомотопическим типом.*

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $\mathrm{id} : X \to X$ гомотопно нулю (т.е. постоянному отображению $\mathrm{const}_{x_0} : X \to X$, переводящему все X в точку $x_0 \in X$).

40.5. Пример. 1. Пространство стягиваемо тогда и только тогда когда оно имеет гомотопический тип точки.

2. Отрезок (выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$) стягиваем.

§ 41. Фундаментальная группа.

41.1. Определение. Пути $\varphi, \psi : I \to X$ называются *гомотопными* (обозначение $\varphi \sim \psi$), если $\varphi(0) = \psi(0) = x_0$, $\varphi(1) = \psi(1) = x_1$ (совпадают их начала и концы) и существует связанная на $\{0, 1\}$ гомотопия $\Phi : I \times I \to X$, соединяющая φ и ψ.

Отношение гомотопности путей является отношением эквивалентности.

41.2. Умножение гомотопических классов путей. Если для путей $\varphi, \psi : I \to X$ $\varphi(1) = \psi(0)$, то
$$[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi\psi].$$

41.3. Лемма. (корректность умножения) *Если $\varphi_0 \sim \varphi_1$ и $\psi_0 \sim \psi_1$, то $\varphi_0\psi_0 \sim \varphi_1\psi_1$.*

Доказательство. Пусть $F : I \times I \to X$ — связанная гомотопия, соединяющая φ_0 и φ_1, а $G : I \times I \to X$ — связанная гомотопия, соединяющая ψ_0 и ψ_1. $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = x_0$, $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = \psi_0(0) = \psi_1(0) = x_1$, $\psi_0(1) = \psi_1(1) = x_2$. Определим гомотопию $\Phi : I \times I \to X$ следующим образом:

$$\Phi(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & : \ 0 \le s \le \frac{1}{2}; \\ G(2s-1,t) & : \ \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Ясно, что эта гомотопия соединяет $\varphi_0\psi_0$ с $\varphi_1\psi_1$. Для любого $t \in I$ имеем $\Phi(0,t) = F(0,t) = x_0$, $\Phi(1,t) = G(1,t) = x_2$. Тем самым она связана.

Сужение отображения Φ на $[0, \frac{1}{2}] \times I$ и $[\frac{1}{2}, 1] \times I$ совпадает с композициями произведений подобий отрезка на тождественное отображение и отображений F и G соответственно. Тем самым они непрерывны. Так как для любого $t \in I$ $\Phi(\{\frac{1}{2}\} \times I) = F(1,t) = G(0,t) = x_1$, то непрерывность Φ вытекает из пункта 13.4.6 Лекции 3. $\square$

41.4. Теорема. *Операция умножения гомотопических классов путей удовлетворяет следующим свойствам.*

а) (Ассоциативность) Если класс $[\varphi] \cdot ([\psi] \cdot [\chi])$ определен, то определен класс $([\varphi] \cdot [\psi]) \cdot [\chi]$, и они совпадают.

б) (Левая и правая единицы) Для $x \in X$ обозначим через $\mathrm{const}_x : I \to X$ постоянное отображение в точку x. Если $\varphi : I \to X$, $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$, то

$$[\varphi] \cdot [\mathrm{const}_{x_1}] = [\varphi], \quad [\mathrm{const}_{x_0}] \cdot [\varphi] = [\varphi].$$

в) (Обратный путь) Если $\varphi : I \to X$, $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$, то

$$[\varphi] \cdot [\varphi^{-1}] = [\mathrm{const}_{x_0}], \quad [\varphi^{-1}] \cdot [\varphi] = [\mathrm{const}_{x_1}].$$

Доказательство. а) Пусть $\varphi(1) = \psi(0)$, $\psi(1) = \chi(0)$. Тогда

$$F(s,t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{4s}{t+1}\right), & \text{если} \quad 0 \le s \le \frac{t+1}{4}, \\ \psi(4s-t-1), & \text{если} \quad \frac{t+1}{4} \le s \le \frac{t+2}{4}, \\ \chi\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right), & \text{если} \quad \frac{t+2}{4} \le s \le 1, \end{cases}$$

является связанной гомотопией, соединяющей пути $(\varphi\psi)\chi$ и $\varphi(\psi\chi)$ (проверить самостоятельно).

б) Приведем гомотопию (проверить самостоятельно), доказывающую второе равенство
$$F(s,t) = \begin{cases} x_0, & t \le 1-2s; \\ \varphi\left(\frac{2s+t-1}{1+t}\right), & t \ge 1-2s. \end{cases}$$

Поэтому гомотопический класс $[\mathrm{const}_{x_0}]$ является левой единицей. Первое равенство доказывается аналогично.

в) Покажем лишь, что $\varphi\varphi^{-1} \sim \mathrm{const}_{x_0}$. Действительно,

$$F(s,t) = \begin{cases} \varphi(2s), & \text{если} \quad 0 \le s \le \frac{1-t}{2}, \\ \varphi(1-t), & \text{если} \quad \frac{1-t}{2} \le s \le \frac{1+t}{2}, \\ \varphi(2-2s), & \text{если} \quad \frac{1+t}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

является связанной гомотопией, соединяющей путь $\varphi\varphi^{-1}$ с постоянным путем const_{x_0} (проверить самостоятельно). □

41.5. Пространства с отмеченной точкой. В топологии часто рассматривают пространства с *отмеченной точкой*, т.е. считают, что во всех пространствах выделены отмеченные точки и все отображения переводят отмеченные точки в отмеченные. Пространство X с отмеченной точкой x_0 обозначается (X, x_0). Одинаковые пространства с разными отмеченными точками считаются разными.

41.6. Определение множества $\pi_1(X, x_0)$. Рассматриваются петли пространства X с отмеченной точкой x_0, т.е. такие пути $\varphi : I \to X$, что $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, где x_0 — отмеченная точка.

Фундаментальной группой пространства X с отмеченной точкой x_0 называется множество гомотопических классов петель $\varphi : I \to (X, x_0)$ с операцией умножения. Обозначение $\pi_1(X, x_0)$. Множество $\pi_1(X, x_0)$ является группой.

Петля, рассматриваемая как отображение $\varphi : I \to X$ с условием $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, равносильна отображению $\widehat{\varphi} : S_1 \to X$, переводящему точку $0 = (\cos(0), \sin(0))$ в отмеченную точку $x_0 \in X$. Поэтому множество $\pi_1(X, x_0)$ можно рассматривать как множество гомотопических классов $\pi(S^1, X)$ отображений пространств с отмеченными точками $(S^1, 0)$ и (X, x_0).