Содержание

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 1. Аксиомы ZFC

Рубеж XIX–XX веков: кризис оснований математики.

Программа Гильберта

- *Формализация всей математики*: все математические утверждения должны быть написаны на точном формальном языке и управляться четко определёнными правилами.
- *Полнота*: доказательство того, что все истинные математические утверждения могут быть формально доказаны.
- *Непротиворечивость*: доказательство того, что в формализме математики не может быть получено никакого противоречия. Желательно, чтобы оно использовало только «конечные» рассуждения о конечных математических объектах.
- *Экономность*: любой результат о «реальных объектах», полученный с использованием рассуждений об «идеальных объектах» (таких как несчётные множества), может быть доказан без использования идеальных объектов.
- *Алгоритмическая разрешимость*: для любого математического утверждения существует алгоритм, определяющий его истинность или ложность.

Формальная система (*формальная теория*, *дедуктивная система*) — это совокупность абстрактных объектов вместе с чисто синтаксическими правилами оперирования символами.

Формальная система считается определённой, если

- задано конечное или счётное число произвольных символов (*язык*);
- выделены конечные последовательности символов (выражения), которые считаются *формулами*;
- выделены формулы, которые называются *аксиомами*;
- задано конечное число отношений между формулами, называемых *правилами вывода*.

Мы возьмём за основу *аксиоматическую формальную систему* (гильбертовского типа), где основное ударение делается на аксиомы, а правила вывода сведены к минимуму; бывают ещё, например, *системы естественного вывода* (генценовского типа), где аксиом нет вообще, но много правил вывода.

Логика первого порядка

Логика высказываний

Язык логики высказываний:

- символы P, Q, R, ... для «первичных высказываний» (*атомов*) произвольной природы, которые играют роль переменных;
- *пропозициональные связки* — символы

  $\wedge$ — *конъюнкция* (логическое «и»),

  $\vee$ — *дизъюнкция* (логическое «или»),

$\neg$ — *отрицание* (логическое «не»),

$\to$ — *импликация* («влечёт за собой»);

- служебные символы — скобки (и).

Пропозициональные формулы определяются рекурсивно:

1) все атомы — формулы;
2) если A и B — формулы, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$ и $A \to B$ — формулы.

Соглашение о скобках: $(A) \rightsquigarrow A$, $(A \wedge B) \wedge C \rightsquigarrow A \wedge B \wedge C$, $(A \vee B) \vee C \rightsquigarrow A \vee B \vee C$. Скобки также опускаются, если их можно однозначно восстановить по приоритетам: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$.

Длина формулы — число символов (считая повторения и опущенные скобки).

Тавтологии

Введём два «внешних» символа И («истина») и Л («ложь»). *Истинностная оценка* на множестве $\mathscr{P}$ первичных высказываний — это любая функция $\nu\colon \mathscr{P} \to \{\text{И}, \text{Л}\}$. Для каждой истинностной оценки определяется её продолжение $\bar{\nu}$ на все пропозициональные формулы индукцией по длине формулы с помощью общеизвестных таблиц истинности.

Пропозициональная формула A называется *тавтологией*, если $\bar{\nu}(A) = \text{И}$ для любой истинностной оценки $\nu\colon \mathscr{P} \to \{\text{И}, \text{Л}\}$.

Тавтологии играют роль аксиом в логике высказываний. Достаточный набор тавтологий:

$A \wedge B \to A$,
$A \wedge B \to B$,
$A \to (A \vee B)$,
$B \to (A \vee B)$
$A \vee \neg A$,
$A \to (B \to A)$,
$\neg A \to (A \to B)$,
$A \to (B \to (A \wedge B))$,
$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$,
$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$.

Единственное правило вывода в логике высказываний — *modus ponens*, или *правило отделения*, — переход от любых двух формул вида A и $A \to B$ к одной формуле B. Запись: $\frac{A,\ A \to B}{B}$.

Язык логики первого порядка

- символы x, y, z, u, v ... для переменных;
- пропозициональные связки;
- служебные символы — скобки (и) и запятая;
- символ равенства $=$;
- кванторы *существования* $\exists$ («существует») и *всеобщности* $\forall$ («для всех»);
- *сигнатура* — набор Σ нелогических символов, который может включать *предикатные* символы и *функциональные* символы, каждому из которых сопоставлена «арность» — число аргументов. 0-арные функциональные символы называются также *константными* символами.

Термы сигнатуры Σ определяются рекурсивно:

1) все символы переменных и константные символы — термы;
2) если $t_1, \dots, t_n$ — термы и f — n-арный функциональный символ из Σ, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

Формулы первого порядка определяются рекурсивно:

1) любое выражение вида $(t_1 = t_2)$ и вида $R(t_1, \dots, t_2)$, где t_i — термы и R — n-арный предикатный символ — формулы (они называются *атомными формулами* или *атомами*);
2) если φ и φ — формулы, то $\varphi \wedge B$, $\varphi \vee B$, $\neg A$ и $\varphi \to B$ — формулы;
3) если φ — формула и x — символ переменной, то $(\exists x \varphi)$ и $(\forall x \phi)$ — формулы.

Свободные переменные формулы ϕ определяются так:

1) если φ — атом, то свободные переменные формул φ и $\neg\varphi$ — это все переменные, которые встречаются в φ;
2) свободные переменные формул $\varphi \wedge B$, $\varphi \vee B$ и $\varphi \to B$ — это {свободные переменные φ} $\cup$ {свободные переменные ψ};
3) свободные переменные формул $(\exists x \varphi)$ и $(\forall x \phi)$ — это все свободные переменные формулы φ, кроме x.

Когда пишут $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, обычно имеют в виду, что все свободные переменные формулы содержатся среди $x_1, \dots, x_n$.

Высказывание (или *предложение*) — это любая формула, не содержащая свободных переменных.

Логические аксиомы первого порядка

- Все тавтологии.
- *Аксиомы равенства:*
  - $(x = x)$, $(x = y) \to (y = x)$, $(x = y) \wedge (y = x) \to (x = z)$;
  - для любого функционального символа f $(x = y) \to (f(\dots, x, \dots) = f(\dots, y, \dots))$;
  - для любой формулы φ, в которой x свободна, $(x = y) \to (\varphi(\dots, x, \dots) \to \varphi(\dots, y, \dots))$, если y остаётся свободной.
- Все формулы вида $(\forall x \varphi(x)) \to \varphi(t/x)$ и $\varphi(t/x) \to \exists x \varphi(x)$

  ($\varphi(t/x)$ — формула, которая получается подстановкой t вместо свободных вхождений переменной x, t — любой терм, ни одна переменная которого не становится связанной в процессе подстановки).

Правила вывода в логике первого порядка:

- *Modus ponens* (правило отделения): $\frac{A,\ A\to B}{B}$.
- *Правила обобщения*: если переменная x не входит в формулу φ в качестве свободной переменной, то
$$\frac{\varphi\to\psi(x)}{\varphi\to\forall y\psi(y)} \quad \text{и} \quad \frac{\psi(x)\to\varphi}{\exists y\psi(y)\to\varphi}.$$

Модели и выводимость

Алгебраическая система для произвольной сигнатуры Σ, или Σ-*система*, — это пара (M,σ), где M — непустое множество и σ — отображение с областью определения Σ такое, что

- если $R\in\Sigma$ — n-арный предикатный символ, то $\sigma(R)$ — n-местное отношение на M (т.е. $\sigma(R)\subset M^n$);
- если $f\in\Sigma$ — n-арный функциональный символ, то $\sigma(f)$ — отображение $M^n\to M$ (т.е. $\sigma(f)\subset M^{n+1}$ и если $(x_1,\dots,x_n,x),(x_1,\dots,x_n,y)\in\sigma(f)$, то $x=y$);
- в частности, если $c\in\Sigma$ — константный символ, то $\sigma(c)\in M$.

M — *несущее множество*, σ — *семантическая* (интерпретирующая) *функция*. Обычно алгебраическую систему отождествляют с несущим множеством и вместо (M,σ) пишут просто M (наличие семантической функции подразумевается), а вместо $\sigma(R)$ или $\sigma(f)$ — R^M или f^M.

Теперь, когда мы проинтерпретировали все предикатные и функциональные символы в системе M, выясним, чему в этой системе соответствуют термы — символы переменных и констант, выражения вида $f(x_1,\dots,x_n)$, где f — n-арный функциональный символ и $x_1,\dots,x_n$ — символы переменных или констант, выражения вида $g(y_1,\dots,y_k)$, где g — k-арный функциональный символ и $y_1,\dots,y_k$ — символы переменных или констант или выражения, полученные на предыдущем шаге (возможно, $g=f$ и $n=k$), и т.д.

Подстановка в системе M для сигнатуры Σ — это отображение s из множества переменных сигнатуры Σ в M. Другими словами, подстановка — это просто приписывание каждому символу переменной конкретного значения из M.

Для каждого терма t сигнатуры Σ рекурсивно определяется его интерпретация — отображение t^M всех подстановок в элементы M: для каждой подстановки s

- если t — константный символ c, то $t^M(s)=c^M$;
- если t — переменная x, то $t^M(s)=s(x)$;
- если $t=f(t_1,\dots,t_n)$, то $t^M(s)=f^M(t_1^M(s),\dots,t_n^M(s))$.

Таким образом, отображение t^M просто определяет, какие значения принимают функции f^M, когда их аргументы принимают значения, определённые каждой конкретной подстановкой.

Через $s(a/v)$ обозначим подстановку s', которая приписывает значение a переменной v, а в остальном совпадает с s.

Пусть M — Σ-система и φ — формула сигнатуры Σ. Определим по индукции естественное отношение $M\models\varphi[s]$ (φ выполняется в M при подстановке s):

- $M \models (t_1 = t_2)[s]$ означает, что $t_1^M(s)$ совпадает с $t_2^M(s)$;
- $M \models R(t_1, \dots, t_n)[s]$ — что $(t_1^M(s), \dots, t_n^M(s)) \in R^M$;
- $M \models \neg\varphi[s]$ — что $M \models \varphi[s]$ не выполняется;
- $M \models (\varphi \to \psi)[s]$ — что либо $M \models \neg\varphi[s]$, либо $M \models \psi[s]$;
- $M \models (\varphi \wedge \psi)[s]$ — что $M \models \varphi[s]$ и $M \models \psi[s]$;
- $M \models (\varphi \vee \psi)[s]$ — что либо $M \models \varphi[s]$, либо $M \models \psi[s]$;
- $M \models (\exists x\varphi)[s]$ — что $M \models \varphi[s(a/x)]$ для некоторого $a \in M$;
- $M \models (\forall x\varphi)[s]$ — что для всех $a \in M$ выполнено $M \models \varphi[s(a/x)]$.

Справедливость $M \models \varphi[s]$ зависит только от значений $s(x)$ для *свободных* переменных в φ. Если φ — высказывание, пишем $M \models \varphi$.

Определение 1. (Формальное) *доказательство* (вывод) формулы φ из набора высказываний A — это конечный список формул $\psi_1, \dots, \psi_n = \varphi$, каждая из которых либо является некоторой аксиомой логики первого порядка, либо входит в набор A, либо получена по одному из трёх правил вывода из формул, предшествующих ей в этом списке. Если формула φ имеет доказательство, то мы говорим, что φ *выводима из* A и пишем $A \vdash \varphi$.

Теория T состоит из фиксированной сигнатуры и набора высказываний в этой сигнатуре. Обычно предполагается, что задан список аксиом — высказываний, которые порождают теорию (т.е. любое высказывание из T выводится из аксиом), и что T включает все высказывания, выводимые из аксиом.

Теория (набор формул) T *непротиворечива*, если не существует формулы φ, для которой $T \vdash \varphi$ и $T \vdash \neg\varphi$.

Определение 2. Система M называется *моделью* набора формул T, если $M \models \varphi$ для всех $\varphi \in T$.

Теория множеств

Сигнатура теории множеств состоит из единственного предикатного символа $\in$.

Система аксиом ZFC (Zermelo–Fraenkel–choice)

- *Аксиома существования*: множества существуют.

  $\exists x(x = x)$

- *Аксиома объёмности*: два множества равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы, т.е. каждый элемент одного множества принадлежит другому и наоборот.

  $\forall X \forall Y(\forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$

- *Схема аксиом выделения*: любому множеству X и любому свойству φ отвечает множество Y, состоящее в точности из тех элементов множества X, которые обладают свойством φ.

  Если φ — формула, свободные переменные которой содержатся
  среди $X, z, u_1, \dots, u_n$, то $\forall X \forall u_1, \dots, u_n \exists Y \forall z(z \in Y \leftrightarrow z \in X \wedge \varphi)$

  Множество всех $y \in X$, обладающих свойством φ, обозначается

$$\{y \in X : \varphi(y)\}.$$

По техническим причинам бывает удобно рассматривать совокупность всех множеств x, для которых выполнено данное свойство-формула $\varphi(x)$. Такая совокупность называется *классом*. Запись:

$$x \in \boldsymbol{C} \leftrightarrow \varphi(x) \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{C} = \{x : \varphi(x)\}.$$

Классы $\boldsymbol{C} = \{x : \varphi(x)\}$ и $\boldsymbol{D} = \{x : \psi(x)\}$ *равны*, если $\forall x(\varphi(x) = \psi(x))$. Класс, который не равен никакому множеству, называется *собственным*. *Универсальный класс* $\boldsymbol{V}$ — это класс всех множеств:
$\boldsymbol{V} = \{x : x = x\}$.

Используя аксиому объёмности и схему аксиом выделения, можно определить

- *пересечение* $X \cap Y = \{z \in X : z \in Y\}$,
- *разность* $X \setminus Y = \{z \in X : z \notin Y\}$,
- *пустое множество* $\varnothing = \{y \in X : y \neq y\}$.

- *Аксиома пары*: для любых множеств x и y существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — x и y (*неупорядоченная пара* элементов x и y).

  $\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$

  Используя аксиому объёмности и аксиому пары, можно определить

  - неупорядоченную пару $\{x, y\}$,
  - одноэлементное множество $\{x\} = \{x, x\}$,
  - упорядоченную пару $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,
  - упорядоченную тройку $(x, y, z) = ((x, y), z)$,
  - ...

- *Аксиома объединения*: для любого семейства множеств $\mathscr{F}$ существует множество $X = \bigcup \mathscr{F}$ — объединение семейства $\mathscr{F}$; его элементами являются в точности все элементы множеств-элементов семейства $\mathscr{F}$.

  $\forall \mathscr{F} \exists X \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathscr{F} \to x \in X)$.

  Обозначения: $X \cup Y = \bigcup\{X, Y\}$, $X \cup Y \cup Z = \bigcup\{X, Y, Z\}$ и т.д.

- *Схема аксиом подстановки* (*замещения*): если $\varphi(x, y)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества a существует единственное множество b такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества X определено множество Y, элементами которого являются те и только те множества y, для которых $\varphi(x, y)$ истинно при некотором $x \in X$.

  $\forall x \forall y \forall z(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z) \to$
  $\to \forall X \exists Y (\forall x \in X) \forall y(\varphi(x, y) \to y \in Y)$

  Здесь формулу φ можно воспринимать как класс-отображение, которое каждому a ставит в соответствие то единственное множество b, для которого высказывание $\varphi(a, b)$ истинно; тогда Y — не что иное как образ множества X при этом «отображении».

- *Аксиома бесконечности*: существует множество, которое содержит (в качестве элемента) $\varnothing$ и вместе с каждым элементом x содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$ ($x \cup \{x\}$ — множество, элементами которого являются все элементы множества x и само множество x).

  $\exists X((\varnothing \in X) \wedge \forall x(x \in X \to (x \cup \{x\}) \in X))$

  Из аксиом объёмности, бесконечности и выделения следует, что существует множество, состоящее из элементов $\varnothing$ (обозначение: 0), $\{\varnothing\}$ (обозначение: 1), $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (обозначение: 2), $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ (обозначение: 3), $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$ (обозначение: 4), ...

Назовём множество Y *подмножеством* множества X (обозначение: $Y \subset X$), если $\forall y(y \in Y \to y \in X)$. Если $Y \subset X$ и $\neg(Y = X)$, то Y называется *собственным подмножеством* (обозначение: $Y \subsetneq X$).

- *Аксиома множества подмножеств*: для любого множества X существует множество Y, состоящее из всех подмножеств множества X.

  $\forall X \exists Y \forall z(z \subset X \to z \in Y)$

  Для множества подмножеств множества X используются обозначения $\mathscr{P}(X)$, 2^X и $\exp X$.

  Аксиома множества подмножеств позволяет определить

  декартово произведение $X \times Y$ двух (и любого конечного числа) множеств X и Y, а также понятия отношений и отображений:

  $$X \times Y = \{z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X \cup Y) : (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = (x, y))\}.$$

  Множество R называется (бинарным) *отношением*, если $R \subset X \times Y$ для некоторых множеств X и Y. *Область определения* и *область значений* отношения R — это множества

  $$\operatorname{dom} R = \{x \in X : \exists y((x, y) \in R)\} \quad \text{и} \quad \operatorname{ran} R = \{y \in Y : \exists x((x, y) \in R)\}.$$

  Отношение f называется *отображением* (или *функцией*), если

  $$\forall x \forall y \forall x(((x, y) \in f) \wedge ((x, z) \in f) \to y = z).$$

  В случае, когда $\operatorname{dom} f = X$, используют обозначение $f\colon X \to Y$.

  Множества можно возводить в степень:

  $$Y^X = \{f \subset X \times Y : f \text{ — функция}, \operatorname{dom} f = X, \operatorname{ran} f \subset Y\}.$$

- *Аксиома регулярности (фундирования)*: каждое непустое множество X содержит элемент x такой, что $X \cap x = \varnothing$.

  $\forall X(\neg(X = \varnothing) \to (\exists x \in X)(x \cap X = \varnothing)$

  Следствие: не существует бесконечной последовательности множеств $x_0, x_1, x_2, \dots$ такой, что $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$ (в частности, $\nexists X(X \in X)$) — достаточно рассмотреть $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ и применить аксиому. Из аксиомы выбора следует, что верно и обратное: из несуществования бесконечной последовательности $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$ вытекает аксиома регулярности — иначе $(\exists X \neq \varnothing)(\forall x \in X)(x \cap X \neq \varnothing)$ и по аксиоме выбора существует множество $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, в котором $x_0 \in X$, $x_1 \in X \cap x_0$, $x_2 \in X \cap x_1$ и т.д.

- *Аксиома выбора* (AC): для каждого семейства $\mathscr{F}$ непустых множеств существует *функция выбора* на $\mathscr{F}$, т.е. отображение $f\colon \mathscr{F} \to \bigcap \mathscr{F}$ с тем свойством, что $f(X) \in X$ для каждого $X \in \mathscr{F}$.

  $\forall \mathscr{F}((\forall X \in \mathscr{F})(X \neq \varnothing) \to (\exists f\colon \mathscr{F} \to \bigcup \mathscr{F})(\forall X \in \mathscr{F})(f(X) \in X))$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 2. Ординалы и кардиналы. Упорядоченные множества

Ординалы и кардиналы

Порядок

Частичный порядок, или просто *порядок*, на множестве X — это подмножество $\leq$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами (мы пишем $x \leq y$ вместо $(x, y) \in \leq$; кроме того, мы иногда пишем $y \geq x$ вместо $x \leq y$):

- $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \to (x \leq z)$ (*транзитивность*);
- $\forall x \in X (x \leq x)$ (*рефлексивность*);
- $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \to (x = y)$ (*антисимметричность*).

Множество X вместе с заданным на нём порядком (т.е. пара $(X, \leq)$) называется (*частично*) *упорядоченным множеством*; про множество X говорят, что оно (*частично*) *упорядочено отношением* $\leq$. Запись $x \leq y$ читается «элемент x не больше элемента y» или «элемент x не превосходит элемента y», а запись $x \geq y$ — «элемент x не меньше элемента y».

Для каждого порядка $\leq$ на X однозначно определено соответствующее отношение $<$ *строгого порядка*: $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$. При этом говорят, что элемент x *меньше* элемента y, а y *больше* x. И наоборот, по строгому порядку $<$ очевидным образом восстанавливается порядок $\leq$, которому он соответствует.

Два элемента x и y множества X, упорядоченного отношением $\leq$, *сравнимы*, если либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Элементы x и y *совместимы*, если существует $z \in X$ такой, что $z \leq x$ и $z \leq y$.

Говорят, что $y \in X$ лежит *между* $x \in X$ и $z \in X$, если $x \leq y \leq z$.

Элемент x множества $Y \subset X$ называется *минимальным* (*максимальным*) элементом этого множества, если $\forall y \in Y((y \leq x) \to (y = x))$ (соответственно $\forall y \in Y((x \leq y) \to (y = x))$).

Элемент x *ограничивает* множество $Y \subset X$ *сверху* (*снизу*), или является *верхней* (*нижней*) *гранью* множества Y, если $\forall y \in Y (y \leq x)$ (соответственно $\forall y \in Y (x \leq y)$). Если при этом x принадлежит множеству Y, то он называется *наименьшим* (*наибольшим*) элементом Y и обозначается $\min Y$ ($\max Y$).

Множество, у которого есть верхняя (нижняя, верхняя и нижняя) грань называется *ограниченным сверху* (*ограниченным снизу*, *ограниченным*).

Наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) грань множества Y, если она существует, называется также *точной верхней* (*нижней*) *гранью*, или *супремумом* (*инфимумом*), множества Y и обозначается $\sup Y$ ($\inf Y$).

Интервалом упорядоченного множества $(X, \leq)$ называется любое его подмножество I с тем свойством, что для любых $x, y \in I$ всякий элемент $z \in X$ между x и y принадлежит I. Интервалы бывают восьми типов:

а) $\{x : x < a\}$,	д) $\{x : a \leq x \leq b\} = [a, b]$,
б) $\{x : x \leq a\}$,	е) $\{x : a < x < b\} = (a, b)$,
в) $\{x : a < x\}$,	ё) $\{x : a \leq x < b\} = [a, b)$,
г) $\{x : a \leq x\}$,	ж) $\{x : a < x \leq b\} = (a, b]$,

где $a, b \in I$. Интервалы типа а) называют *начальными интервалами*.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Порядок $\leq$ на X называется *линейным*, если любые два элемента x и y множества X сравнимы. В этом случае пара $(X, \leq)$ называется *линейно упорядоченным множеством*, а пара $(X, <)$ — *строго линейно упорядоченным множеством*.

Порядок $\leq$ на X *полон*, если он линеен и любое непустое множество $Y \subset X$ содержит наименьший (в Y) элемент. Пара $(X, \leq)$, где $\leq$ — полный порядок, называется *вполне упорядоченным множеством*, а пара $(X, <)$ — *строго вполне упорядоченным множеством*. Всякое непустое вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент (хотя наибольший элемент существовать не обязан), и для всякого его элемента, который не является наибольшим, определён элемент, непосредственно следующий за ним.

Порядок $\leq$ на X называется *фундированием*, если любое непустое множество $Y \subset X$ содержит минимальный (в Y) элемент.

На каждом подмножестве Y упорядоченного множества $(X, \leq)$ естественно возникает *индуцированный* порядок, или *сужение* порядка $\leq$ на Y — это пересечение порядка $\leq$ (который является подмножеством $X \times X$) с $Y \times Y$. Как легко видеть, индуцированный порядок линеен или полон, если таковым является порядок $\leq$ на X. В дальнейшем, рассматривая подмножества упорядоченных множеств, мы всегда будем считать, что они снабжены индуцированным порядком.

Отображение $f\colon X \to Y$ между упорядоченными множествами $(X, \leq)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ называется *порядковым изоморфизмом*, а сами эти упорядоченные множества — *порядково изоморфными*, если f взаимно однозначно и для любых $x, y \in X$ соотношение $x \leq y$ выполнено тогда и только тогда, когда $f(x) \preccurlyeq f(y)$. В случае линейно упорядоченных множеств любая сохраняющая порядок (т.е. «монотонно неубывающая») биекция является порядковым изоморфизмом.

Теорема об изоморфизме

Теорема 1. Пусть $(X, \leq)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ — любые вполне упорядоченные множества. Тогда либо существует $x_* \in X$ такой, что начальный интервал $\{x \in X : x < x_*\}$ множества X порядково изоморфен вполне упорядоченному множеству Y, либо существует $y_* \in Y$ такой, что вполне упорядоченное множество X порядково изоморфно начальному интервалу $\{y \in Y : y \prec y_*\}$ множества Y, либо сами множества $(X, \leq)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ порядково изоморфны.

Замечание 1.
1. Пусть $f\colon P \to P$ — сохраняющее порядок биективное отображение вполне упорядоченного множества P в себя. Тогда $f(x) \geq x$ для каждого $x \in P$.
2. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему начальному интервалу.

Ординалы

Определение 3. Множество S *транзитивно*, если оно содержит все элементы всех своих элементов: $\forall x (x \in S \to x \subset S)$.

Определение 4. Множество называется *ординалом* (*порядковым числом*), если оно транзитивно и строго вполне упорядочено отношением $\in$.

Ординалы обычно обозначают буквами α, β, γ, ... Вместо $\alpha \in \beta$ часто пишут $\alpha < \beta$. Запись $\alpha \leq \beta$ означает, что либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$.

Класс всех ординалов обозначается Ord или On.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

- Каждый ординал α — это множество всех ординалов $\beta < \alpha$
- $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ = множество всех ординалов $\beta \leq \alpha$ — наименьший ординал, больший α
- Для множества ординалов A $\bigcup A = \sup A$ (очень легко проверить). Множество $\sup A$ иногда обозначают $\lim A$.
- Класс ординалов собственный (по аксиоме регулярности).

Сам Кантор понимал ординалы как классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств и называл их *порядковыми типами*.

Теорема 2. Каждое вполне упорядоченное множество $(P, \leq)$ порядково изоморфно единственному ординалу.

Доказательство. P вполне упорядочено $\Longrightarrow$ по аксиоме подстановки можно определить множество S ординалов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь начальному интервалу P. Ординал $\alpha = \sup S = \bigcup S$ изоморфен P. Действительно, если это не так, то по теореме об изоморфизме либо α изоморфен начальному интервалу $I \subsetneq P$ (а тогда $\alpha \in \alpha$ в противоречие с аксиомой регулярности), либо P изоморфно начальному интервалу α. Любой начальный интервал α — это некоторый ординал $\beta < \alpha$, который изоморфен начальному интервалу P, а вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему начальному интервалу. Отсюда же вытекает единственность. ■

Определение 5. Ординал α называется *изолированным*, или *непредельным*, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого β. В противном случае α называется *предельным* ординалом.

Замечание 2. Ординал α является предельным тогда и только тогда, когда $\alpha = \sup \alpha$.

Из аксиом объёмности, бесконечности и выделения следует существование наименьшего непустого предельного ординала ω. Ординалы, меньшие ω (т.е. элементы ω) называются *натуральными числами*, а сам ординал ω называется *множеством натуральных чисел*. Натуральные числа обозначаются $0, 1, 2, \ldots, i, j, k, l, m, n, \ldots$.

(Привычнее было бы сказать, что натуральные числа — непустые элементы множества ω; иногда, а за пределами теории множеств почти(?) всегда, под множеством натуральных чисел имеют в виду $\omega \setminus \{\varnothing\}$, и тогда его обозначают $\mathbb{N}$.)

Трансфинитная индукция и рекурсия

Каждый ординал строго вполне упорядочен отношением $\in$ $\Longrightarrow$ в каждом непустом классе ординалов есть наименьший элемент.

Принцип трансфинитной индукции:
Пусть $\boldsymbol{C}$ — класс ординалов такой, что

1. $\varnothing \in \boldsymbol{C}$,
2. $\alpha \in \boldsymbol{C} \to \alpha + 1 \in \boldsymbol{C}$,
3. $A \in \boldsymbol{C} \to \sup A \in \boldsymbol{C}$.

Тогда $\boldsymbol{C} = \mathrm{Ord}$.

Доказательство. Если утверждение неверно, то существует наименьший ординал $\alpha \notin \boldsymbol{C}$, а это противоречит условиям 1–3. ■

На практике принцип индукции часто приходится применять к множествам, а не классам множеств. В этом случае следует считать, что класс $\boldsymbol{C}$ заведомо содержит все ординалы, начиная с некоторого.

Трансфинитная рекурсия похожа на трансфинитную индукцию, но вместо того чтобы *доказывать*, что что-то верно для всех ординалов, мы *строим* последовательность объектов, по одному для каждого ординала.

Принцип трансфинитной рекурсии:
Для любой функции-класса $G\colon \boldsymbol{V} > \boldsymbol{V}$ (где $\boldsymbol{V}$ — класс всех множеств) существует единственная трансфинитная последовательность ординалов $F\colon \mathrm{Ord} \to \boldsymbol{V}$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Н.К. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*,
Москва: МЦНМО, 2012

Теорема Цермело и лемма Цорна

Теорема 3. Любое множество можно вполне упорядочить.

Теорема 4. Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества $Y \subset X$, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в X есть максимальный элемент.

Теорема Цермело и лемма Цорна равносильны аксиоме выбора в том смысле, что

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{ZF} + \text{теорема Цермело}, \quad \mathrm{ZF} + \text{теорема Цермело} \vdash \mathrm{ZFC}$$

и

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{ZF} + \text{лемма Цорна}, \quad \mathrm{ZF} + \text{лемма Цорна} \vdash \mathrm{ZFC}.$$

Принцип трансфинитной рекурсии равносилен схеме аксиом подстановки в том же смысле.

Пример применения леммы Цорна.

Теорема 5. В любом векторном пространстве V имеется базис. Более того, всякое линейно независимое множество векторов в V можно дополнить до базиса.

Теорема 6 (Оригинальная формулировка леммы Цорна). Пусть $\mathscr{X}$ — семейство множеств со свойством: если $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ таково, что для любых $X, Y \in \mathscr{Y}$ либо $X \subset Y$, либо $Y \subset X$, то $\bigcup \mathscr{Y} \in \mathscr{X}$. Тогда в семействе $\mathscr{X}$ есть максимальный по включению элемент.

Доказательство. Возьмём в качестве $\mathscr{X}$ семейство всех линейно независимых множеств в V, содержащих данное множество $\mathcal{S}$. Пусть $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ удовлетворяет условию в лемме. Возьмём любые $n \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \bigcup \mathscr{Y}$. Для $i \in \mathbb{N}$ найдём $\mathcal{S}_i \in \mathscr{Y}$, для которых $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{S}_i$. По условию на $\mathscr{Y}$ множества $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ можно упорядочить по включению. Пусть $\mathcal{S}_{k_1} \subset \mathcal{S}_{k_2} \subset \cdots \subset \mathcal{S}_{k_n}$. Тогда $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathcal{S}_{k_n}$. Множество $\mathcal{S}_{k_n}$ линейно независимо $\implies \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ линейно независимы $\implies \bigcup \mathscr{Y}$ линейно независимо. Лемма Цорна $\implies$ в $\mathscr{X}$ есть максимальное линейно независимое множество, содержащее $\mathcal{S}$. ■

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Понятие вполне упорядоченного множества и теорема Цермело позволяют распространить метод математической индукции на произвольные множества. Пусть X — непустое множество и $\varphi(x)$ — любое высказывание об элементах X. Предположим, что нам удалось ввести полный порядок $\leq$ на X так, что мы умеем доказывать $\varphi(x_0)$ для наименьшего элемента x_0 и умеем выводить утверждение $\varphi(x)$ из утверждения «$\varphi(y)$ верно для всех $y < x$». Тогда мы смело можем утверждать, что утверждение $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$. Действительно, если это не так, т.е. если множество $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\}$ непусто, то мы можем взять наименьший элемент в этом множестве и сразу получить противоречие.

То же рассуждение работает в случае, когда $\leq$ — фундирование: если $\varphi(x_0)$ верно для всех минимальных элементов x_0 и из утверждения «для любого $y < x$ $\varphi(y)$ верно» выводится $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$ — если $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\} \neq \varnothing$, то существование минимального элемента в этом множестве приводит к противоречию.

Кардиналы

Для каждого множества X Кантор определял мощность $|X|$ как класс всех множеств, находящихся во взаимно однозначном соответствии с X ($|X| = |Y|$, если существует биекция $X \rightleftarrows Y$). Мощности сравниваются так:

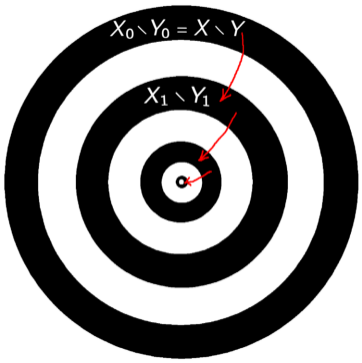
$$|X| \leq |Y|, \qquad \text{если существует инъекция } X \to Y \text{ (или сюръекция } Y \to X)$$

Теорема 7 (Кантора–Бернштейна–Шрёдера). Если $|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |X|$, то $|X| = |Y|$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $X_1 \subset Y \subset X$ и $|X_1| = |X|$, то $|X| = |Y|$. Пусть $f\colon X \to X_1$ — биекция. Положим

$$\begin{array}{llll} X_0 = X, & X_1 = f(X_0), & X_2 = f(X_1), & \dots; \\ Y_0 = Y, & Y_1 = f(Y_0), & Y_2 = f(Y_1), & \dots. \end{array}$$

Для $x \in X$ положим $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } \exists n \in \omega\colon x \in X_n \setminus Y_n, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$



Отображение $g\colon X \to Y$ — биекция.

■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 6. *Мощность* $|X|$ множества X — это наименьший ординал α, для которого существует биекция $X \rightleftarrows \alpha$.

Определение 7. Ординал α называется *кардиналом*, если не существует биекции между α и β ни для какого ординала $\beta < \alpha$.

Кардиналы обозначаются буквами κ, λ, ...

Кардиналы называются также *алефами*. Кантор использовал для них обозначение $\aleph_\alpha$, $\alpha \in$ Ord:

- $\aleph_0 = \omega$,
- $\aleph_{\alpha+1}$ = наименьший кардинал, больший $\aleph_\alpha$,
- для предельного ординала α $\aleph_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$.

Сейчас наравне с $\aleph_\alpha$ используется обозначение ω_α (которое сам Кантор использовал только для ординалов):

- $\omega_0 = \omega$,
- $\omega_{\alpha+1}$ = наименьший кардинал, больший ω_α,
- для предельного ординала α $\omega_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$.

Мощность определена для каждого множества. Действительно, по теореме Цермело любое множество можно вполне упорядочить, а каждое вполне упорядоченное множество порядково изоморфно единственному ординалу. Порядковый изоморфизм — биекция, поэтому для любого множества X существуют ординал α и биекция $\alpha \rightleftarrows X$. Значит, множество ординалов $\{\beta \in \alpha + 1 :$ существует биекция $\beta \rightleftarrows X\}$ непусто, и $|X|$ — его наименьший элемент.

Для каждого бесконечного множества X $\exists \alpha \in$ Ord: $|X| = \omega_\alpha$.

Определение 8. Множество X *счётно*, если $|X| = \omega$. Множество X *несчётно*, если $|X| > \omega$.

Арифметика кардиналов

Для непересекающихся множеств X и Y

- $|X| + |Y| = |X \cup Y|$
- $|X| \cdot |Y| = |X \times Y|$
- $|Y|^{|X|} = |Y^X|$
  (напомним: $Y^X = \{f \subset X \times Y : f$ — отображение $X \to Y\}$)
- в частности, $2^{|X|} = |\{\chi_A : A \subset X\}| = |\mathscr{P}(X)|$
  ($\mathscr{P}(X)$ — множество всех подмножеств X,
  χ_A — характеристическая функция подмножества $A \subset X$)

Свойства арифметических операций:

- $(\kappa+\lambda)+\mu=\kappa+(\lambda+\mu)$, $\quad(\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu=\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu)$;
- $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$, $\quad\kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa$;
- $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$;
- если $\kappa\le\lambda$, то $\kappa+\mu\le\lambda+\mu$, $\kappa\cdot\mu\le\lambda\cdot\mu$ и $\kappa^\mu\le\lambda^\mu$;
- если $1\le\kappa$ и $\lambda\le\mu$, то $\kappa^\lambda\le\kappa^\mu$;
- если κ бесконечен, то $\kappa\cdot\kappa=\kappa$;
- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они
- отличны от нуля, то $\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$;
- $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu$, $\quad(\kappa\cdot\lambda)^\mu=\kappa^\mu\cdot\lambda^\mu$, $\quad\kappa^{\lambda\cdot\mu}=(\kappa^\lambda)^\mu$;
- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa\ge2$ и $\lambda\ge1$, то
- $\max\{\kappa,2^\lambda\}\le\kappa^\lambda\le\max\{2^\kappa,2^\lambda\}$;
- в частности, если λ бесконечен, то $2^\lambda=\kappa^\lambda$ для любого $\kappa\le2^\lambda$, $\kappa\ge2$.

- $(\kappa+\lambda)+\mu=\kappa+(\lambda+\mu)$, $\quad(\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu=\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu)$;
- $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$, $\quad\kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa$;
- $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$;
- если $\kappa\le\lambda$, то $\kappa+\mu\le\lambda+\mu$, $\kappa\cdot\mu\le\lambda\cdot\mu$ и $\kappa^\mu\le\lambda^\mu$;
- если $1\le\kappa$ и $\lambda\le\mu$, то $\kappa^\lambda\le\kappa^\mu$;
- если κ бесконечен, то $\kappa\cdot\kappa=\kappa$;
- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они
- отличны от нуля, то $\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$;
- $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu$, $\quad(\kappa\cdot\lambda)^\mu=\kappa^\mu\cdot\lambda^\mu$, $\quad\kappa^{\lambda\cdot\mu}=(\kappa^\lambda)^\mu$;
- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa\ge2$ и $\lambda\ge1$, то
- $\max\{\kappa,2^\lambda\}\le\kappa^\lambda\le\max\{2^\kappa,2^\lambda\}$;
- в частности, если λ бесконечен, то $2^\lambda=\kappa^\lambda$ для любого $\kappa\le2^\lambda$, $\kappa\ge2$.

Теорема 8 (Кантора). Для любого кардинала κ $\ 2^\kappa>\kappa$.

Доказательство. Надо доказать: $|\mathscr{P}(X)|>|X|$ для любого множества X. Ясно, что $|\mathscr{P}(X)|\ge|X|$. Для любого отображения $f\colon X\to\mathscr{P}(X)$

$$Y=\{x\in X: x\notin f(x)\}\notin\operatorname{ran}f\quad(\operatorname{ran}f\text{ — множество значений }f).$$

Действительно, пусть $Y=f(y)$. По определению множества Y если $y\in Y$, то $y\notin Y$, и если $y\notin Y$, то $y\in Y$.

Не существует сюръекции $X\to\mathscr{P}(X)\implies|\mathscr{P}(X)|>|X|$. ■

Определение 9. Кардинал 2^ω называется *мощностью континуума.*

Континуум-гипотеза (CH): $\boxed{2^\omega=\omega_1}$.

CH верна $\iff$ существует сюръекция $\omega_1\to\mathscr{P}(\omega)$.
CH неверна $\iff$ существует инъекция $\omega_2\to\mathscr{P}(\omega)$.

Лекция 3. Теорема Цермело. Трансфинитная индукция. Универсум фон Неймана. Генерические множества

Кумулятивная иерархия фон Неймана

$\in$-Индукция

Аксиома регулярности $\implies$ любое непустое множество содержит $\in$-минимальный элемент (если $X \neq \varnothing$, то $(\exists Y \in X)(Y \cap X = \varnothing)$). Покажем, что любой непустой класс тоже содержит $\in$-минимальный элемент.

Определение 10. *Транзитивное замыкание* множества X — это транзитивное множество $\mathrm{TC}(X)$ такое, что $X \subset \mathrm{TC}(X)$ и $\mathrm{TC}(X) \subset Y$ для любого транзитивного множества $Y \supset X$.

Лемма 1. Для любого множества X существует транзитивное замыкание $\mathrm{TC}(X)$.

Доказательство. По индукции: $X_0 = X$, …, $X_{n+1} = \bigcup X_n$, …, $\mathrm{TC}(X) = \bigcup\limits_{n\in\omega} X_n$. ■

Лемма 2. Если $\boldsymbol{C}$ — непустой класс, то $(\exists X \in \boldsymbol{C})(X \cap \boldsymbol{C} = \varnothing)$.

Доказательство. Возьмём $X \in \boldsymbol{C}$. Предположим, что $X \cap \boldsymbol{C} \neq \varnothing$. Тогда $T = \mathrm{TC}(X) \cap \boldsymbol{C} \neq \varnothing$. По аксиоме регулярности существует $x \in T$, для которого $x \cap T = \varnothing$. Имеем $x \cap \boldsymbol{C} = \varnothing$, так как если $y \in x \cap \boldsymbol{C}$, то $y \in \mathrm{TC}(X)$ в силу транзитивности $\mathrm{TC}(X)$, так что $y \in x \cap T$. ■

Теорема 9 (Теорема об $\in$-индукции). Если для класса $\boldsymbol{C}$ выполнено условие $\forall x(X \subset \boldsymbol{C} \to X \in \boldsymbol{C})$, то $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{V}$.

Доказательство. Если класс $\boldsymbol{V} \setminus \boldsymbol{C}$ непуст, то по лемме существует $X \in \boldsymbol{V} \setminus \boldsymbol{C}$, для которого $X \cap (\boldsymbol{V} \setminus \boldsymbol{C}) = \varnothing$, т.е. $X \subset \boldsymbol{C}$. По предположению $X \in \boldsymbol{C}$. ■

Иерархия фон Неймана

Иерархия фон Неймана — это ранжирование всех множеств в соответствии с их принадлежностью к множествам V_α, где α пробегает класс всех ординалов. Классы V_α определяются по трансфинитной рекурсии:

- $V_0 = \varnothing$
- если $\alpha = \beta + 1$, то $V_\alpha = \mathscr{P}(V_\beta)$
- если α — предельный ординал, то $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$

Положим $\mathbf{\Pi} = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Ord}} V_\alpha$ (это собственный класс).

Определение 11. *Ранг* множества $x \in \mathbf{\Pi}$ — это наименьший ординал α, для которого $x \subset V_\alpha$ (т.е. $x \in V_{\alpha+1}$). Обозначение: $\operatorname{rank} x$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

1. $\beta < \alpha \Rightarrow V_\beta \subset V_\alpha$
2. $x \in \mathbf{\Pi} \Leftrightarrow x \subset \mathbf{\Pi}$
3. $\mathrm{Ord} \subset \mathbf{\Pi}$
4. $\forall \alpha \in \mathrm{Ord} \;\; \mathrm{rank}\,\alpha = \alpha$
5. $x \in y \in \mathbf{\Pi} \Rightarrow \mathrm{rank}\,x < \mathrm{rank}\,y$
6. $\mathrm{rank}\,X = \sup\{\mathrm{rank}\,x + 1 : x \in X\}$
7. существует формула $\varphi(\alpha, x)$, выражающая «$x \in V_\alpha$»

Теорема 10 (фон Нейман). Аксиома регулярности $\iff \mathbf{\Pi} = \boldsymbol{V}$.

Доказательство. $\Longrightarrow$: Если класс $\boldsymbol{V} \setminus \mathbf{\Pi}$ непуст, то существует $X \in \boldsymbol{V} \setminus \mathbf{\Pi}$, для которого $X \cap \boldsymbol{V} \setminus \mathbf{\Pi} = \varnothing$, т.е. $(\forall x \in X)(x \in \mathbf{\Pi})$. Положим $\alpha = \sup\{\mathrm{rank}\,x : x \in X\}$. По определению ранга $X \subset V_{\alpha+1}$. Значит, $X \in V_{\alpha+2} \subset \mathbf{\Pi}$.

$\Longleftarrow$: Если $X \neq \varnothing$, то для элемента $x \in X$ наименьшего ранга имеем $x \cap X = \varnothing$, так как если $y \in x \cap X$, то $\mathrm{rank}\,y < \mathrm{rank}\,x$ в противоречие с минимальностью ранга x. ■

Модели теории множеств

Алгебраическая система для сигнатуры $\{\in\}$ теории множеств, или $\in$-система, — это пара $(M, \sigma(\in))$, где M — непустое множество и $\sigma(\in)$ — бинарное отношение на M (т.е. $\sigma(\in) \subset M \times M$). Мы будем рассматривать только *стандартные* $\in$-системы, для которых $\sigma(\in) = \in$. Стандартная $\in$-система — это просто непустое множество M.

В дальнейшем будем рассматривать только формулы языка теории множеств. Атомы: $x \in y$ и $x = y$. Все остальные формулы теории множеств стоятся из атомов с помощью пропозициональных связок и кванторов:

$$\varphi \wedge \psi, \quad \varphi \vee \psi, \quad \neg\varphi, \quad \varphi \to \psi, \quad \forall x\varphi, \quad \exists x\varphi$$

(можно обойтись связками $\vee$ и $\neg$ и квантором $\exists$).

Выше мы определили в общем случае (для произвольных Σ-системы M, Σ-формулы φ и подстановки s: {символы переменных} $\to M$) отношение $M \models \varphi[s]$ (φ выполняется в M при подстановке s).

Для стандартной $\in$-системы определение становится проще.

Определение 12. Пусть M — $\in$-система и φ — формула. *Релятивизация* φ^M формулы φ к M определяется индукцией по длине формулы:

- если φ — атом, то $\varphi^M = \varphi$;
- если $\varphi = \chi \wedge \psi$, то $\varphi^M = \chi^M \wedge \psi^M$;
- если $\varphi = \chi \vee \psi$, то $\varphi^M = \chi^M \vee \psi^M$;
- если $\varphi = \chi \to \psi$, то $\varphi^M = \chi^M \to \psi^M$;
- если $\varphi = \neg\psi$, то $\varphi^M = \neg(\psi^M)$;
- если $\varphi = \exists x\psi$, то $\varphi^M = (\exists x \in M)(\psi^M)$;
- если $\varphi = \forall x\psi$, то $\varphi^M = (\forall x \in M)(\psi^M)$.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Пусть теперь φ — высказывание. Мы пишем $M \models \varphi$ и говорим, что φ истинно в M, или M является *моделью* для φ, если истинна его релятивизация φ^M.

Модель теории множеств — это множество M с тем свойством, что $M \models \varphi$ для каждой аксиомы φ системы ZFC.

Если система аксиом ZFC непротиворечива, то модель теории множеств существует (по теореме о существовании модели).

Обычно в теории множеств рассматривают только *стандартные транзитивные модели* (*CTM*).

Теорема Лёвенгейма–Скулема $\implies$ если существует какая-то CTM теории множеств, то существует и счётная CTM.

Определение 13. Пусть M — CTM. Говорят, что формула $\varphi(x)$ *абсолютна* (для M), если

$$(\forall x \in M)(\varphi(x) \leftrightarrow \varphi^M(x)).$$

Предложение 1. 1. Все атомы абсолютны.

2. Любая формула φ, которая содержит кванторы $\exists$ и $\forall$ только в составе выражений вида $(\exists x \in y)$ и $(\forall x \in y)$, абсолютна (такие формулы называются Σ_0-*формулами*).

3. Любая формула φ с тем свойством, что для некоторой Σ_0-формулы ψ $\text{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, абсолютна.

4. Любая формула φ с тем свойством, что для некоторых Σ_0-формул χ и ψ $\text{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x \chi(x)$ и $\text{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \forall x \psi(x)$, абсолютна.

Доказательство. 2: Если φ — атом или имеет один из видов $\chi \wedge \psi$, $\chi \vee \psi$, $\chi \to \psi$ и $\neg\psi$ для абсолютных χ и ψ, то доказывать нечего. Пусть $\varphi(y, z)$ имеет вид $(\exists x \in y)\psi(x, y, z)$ для абсолютной ψ, и пусть $y, z \in M$.

Формула $\varphi(y, z)^M$ означает, что $((\exists x \in y)(\psi(x, y, z))^M$. Следовательно, $\exists x \in y \in M$, для которого $\psi(x, y, z)^M$. Транзитивность M + абсолютность ψ $\implies$ $(\exists x \in y)\psi(x, y, z)$.

Обратно, формула $\varphi(y, z)$ означает, что $(\exists x \in y)\psi(x, y, z)$, т.е. $\psi(x, y, z)$ для некоторого $x \in y$. В случае $y \in M$ имеем $x \in M$. Формула ψ абсолютна $\implies$ $\psi(x, y, z)^M$ для некоторого $x \in y$, т.е. $((\exists x \in y)\psi(x, y, z))^M$, а это и есть $\varphi(y, v)^M$.

3: Пусть x — набор всех свободных переменных в φ, и пусть ψ — Σ_0-формула, для которой $\text{ZFC} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Поскольку аксиомы ZFC не содержат свободных переменных, по правилу обобщения (одно из правил вывода для кванторов) имеем $\text{ZFC} \vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)$. Значит, $(\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi))^M$ (потому что M — модель ZFC), т.е. $(\forall x \in M)(\varphi^M \leftrightarrow \psi^M)$. С другой стороны, $(\forall x \in M)(\varphi \leftrightarrow \psi)$ и $(\forall x \in M)(\psi \leftrightarrow \psi^M)$ (так как ψ абсолютна). Следовательно, $(\forall x \in M)(\varphi \leftrightarrow \varphi^M)$. ■

Предложение 2. Формула $\text{WF}(x, Y)$, означающая «x — отношение фундирования на Y», абсолютна.

Доказательство. Схема доказательства. Легко видеть, что утверждение «x является бинарным отношением на Y» выражается Σ_0-формулой. Поэтому сосредоточимся на той части формулы WF, которая относится к существованию минимальных элементов.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Обозначим соответствующее утверждение φ: для бинарного отношения R на Y формула $\varphi(R, Y)$ («R — отношение фундирования») — это

$$\forall A((A \subset Y) \wedge (A \neq \varnothing) \to (\exists a \in A)(\forall b \in A)\neg(bRa)).$$

Видно, что формула WF, выписанная полностью, удовлетворяет одному из условий в пункте 4 предыдущего предложения.

Рассуждая по трансфинитной рекурсии, можно показать, что

$$\mathrm{ZFC} \vdash \varphi(R, Y) \leftrightarrow \exists f((f \text{ — отображение } Y \to \mathrm{Ord}) \wedge \\ \wedge (\forall y, z \in Y)(yRz \to f(y) < f(z)),$$

так что второе условие тоже выполнено.

■

Список абсолютных формул

- $x \in Y$
- $X = Y$
- $X \subset Y$
- $\{x, y\}$
- $\{x\}$
- (x, y)
- $\varnothing$
- $X \cup Y$
- $X \cap Y$
- $X \setminus Y$
- $S(X) = X \cup \{X\}$
- $\bigcup X$
- $\bigcap X$, $X \neq \varnothing$
- $X \times X$
- R — отношение
- $\mathrm{dom}\, R$
- $\mathrm{ran}\, R$
- f — функция
- $f(x)$
- f — биекция
- X транзитивно
- X — ординал
- X — предельный ординал
- X — изолированный ординал
- X — конечный ординал
- ω
- 27
- X конечно
- X бесконечно
- X^n
- $X^{<\omega}$ $(= \bigcup\{X^n : n \in \omega\})$
- R упорядочивает X
- R вполне упорядочивает X
- порядковый тип $(X, \leq)$

Теорема 11 (Абсолютность трансфинитной рекурсии). *Для любой функции-класса $G\colon \boldsymbol{V} > \boldsymbol{V}$ (где $\boldsymbol{V}$ — класс всех множеств) существует единственная трансфинитная последовательность ординалов $F\colon \mathrm{Ord} \to \boldsymbol{V}$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}$.*

Если G абсолютна, то и F абсолютна.

Доказательство. Схема доказательства. Применяя трансфинитную рекурсию внутри СТМ M, определяем $F^M\colon \mathrm{Ord}^M \to M$ так, что $(\forall \alpha \in \mathrm{Ord}^M)(F^M(\alpha) = G^M|_\alpha)$. По трансфинитной индукции доказываем, что $F^M = F|_{\mathrm{Ord}^M}$ (иначе рассмотрим наименьший ординал α, для которого это нарушается, и придём к противоречию). ■

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Теорема 12. 1. Формулы $\operatorname{rank} x$ и $\mathrm{TC}(x)$ абсолютны.

2. Для любой СТМ M

$$(\forall X \in M)(\mathscr{P}(X)^M = \mathscr{P}(X) \cap M) \quad \text{и} \quad (\forall \alpha \in M)(V_\alpha^M = V_\alpha \cap M).$$

Генерическое расширение

В дальнейшем под (*частично*) *упорядоченным множеством* (сокращение: ч.у.м.) мы всегда будем иметь в виду тройку $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$, где P — множество, $\leq$ — порядок на P и $\mathbf{1}$ — наибольший элемент P. Когда мы пишем $\mathbb{P} \in M$, мы имеем в виду, что $P \in M$, $\leq \in M$ и $\mathbf{1} \in M$. Скажем, что $x, y \in P$ *совместимы*, если существует элемент $z \in P$ такой, что $z \leq x$ и $z \leq y$. Если x и y несовместимы, мы пишем $x \perp y$.

Определение 14. Множество $D \subset P$ *плотно* в $\mathbb{P}$, если для каждого $p \in P$ существует $d \leq p$, $d \in D$.

Для данного $p \in P$ множество $D \subset P$ *плотно ниже* p, если для всякого $q \leq p$ существует $d \leq q$, $d \in D$.

Ясно, что всякое плотное множество плотно ниже любого $p \in P$.

Свойство «быть отношением частичного порядка» абсолютно, так как оно выражается через абсолютное свойство «быть отношением» формулой, содержащей лишь ограниченные кванторы. То же относится к понятиям плотности и плотности ниже p.

Определение 15. Пусть M — множество и $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м.. Множество $G \subset P$ называется $\mathbb{P}$-*генерическим над* M, или просто *генерическим*, если

1. $\mathbf{1} \in G$;
2. для любых $p, q \in G$ существует $r \in G$ такое, что $r \leq p$ и $r \leq q$;
3. если $p \in G$, $q \in P$ и $p \leq q$, то $q \in G$;
4. если $D \subset P$ плотно и $D \in M$, то $G \cap D \neq \varnothing$.

Предложение 3. Если M счётно, то для любого $p \in P$ найдётся генерическое множество $G \subset P$, содержащее p.

Доказательство. Перенумеруем все плотные $D \subset P$, принадлежащие множеству M: $D_0, D_1, \ldots$. По индукции выберем $q_i \in D_i$ так, что $p \geq q_0 \geq q_1 \geq \ldots$. Положим

$$G = \{r \in P : \text{существует } n \in \omega, \text{ для которого } q_n \leq r\}.$$

■

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что M — счётная стандартная транзитивная модель ZFC и $\mathbb{P}$ — частично упорядоченное множество, $\mathbb{P} \in M$. Напомним, что $p \perp q$ означает, что p и q несовместимы, т.е. не существует $r \in P$, для которого одновременно $r \leq p$ и $r \leq q$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Предложение 4. Если $\mathbb{P}$ таково, что для всякого $p \in P$ существуют $q, r \in P$ со свойствами

$$q \leq p, \quad r \leq p \quad \text{и} \quad q \perp r,$$

то никакое генерическое множество не принадлежит M.

Доказательство. Если G — генерическое множество и $G \in M$, то $D = P \setminus G \in M$ (так как операция $\setminus$ абсолютна). Множество D плотно. (Действительно, пусть $p \in P$. Возьмём $q, r \in P$ такие, что $q \leq p$, $r \leq p$ и $q \perp r$. Поскольку $q \perp r$, имеем либо $q \notin G$, либо $r \notin G$, а значит, либо $q \in D$, либо $r \in D$.) Однако $G \cap D = \varnothing$. ■

Исходя из счётной СТМ M, ч.у.м. $\mathbb{P}$ и генерического множества G мы будем строить другую счётную СТМ $M[G]$ со свойствами

1. $M \subset M[G]$
2. $G \in M[G]$
3. M — минимальная модель со свойствами 1 и 2.

Позже мы увидим, что из свойств 1–3 вытекает свойство

4. $\mathrm{Ord}^{M[G]} = \mathrm{Ord}^M$.

(Грубо говоря, $M[G]$ — это множество всех множеств из M и множеств, которые можно получить из G с помощью процессов, определимых в M. Таким образом, хотя элементы $M[G]$ и не обязаны принадлежать модели M, их можно описывать изнутри M, если дать им имена из M.)

Элементы генерического множества G называются *условиями*.

Как это работает

Определение 16. Пусть α — ординал. Упорядоченное множество $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$, где

$$P \text{ — множество конечных частичных функций } \alpha \times \omega \to \{0,1\},$$

$$p \leq q \iff p \supset q,$$

$$\mathbf{1} = \varnothing,$$

называется *α-коэновским частично упорядоченным множеством.*

Если M — СТМ ZFC и $\alpha \in M$, то α-коэновское множество принадлежит M — это вытекает из абсолютности множеств ω и $\{0,1\}$ и формул $X \times Y$, $X \subset Y$, «X — функция» и «X конечно».

Элементы α-коэновского множества можно рассматривать как «конечные приближения» функций $\alpha \times \omega \to \{0,1\}$.

Важно: для любой СТМ M имеем $\omega \in M$ и $\omega = \omega^M$. Однако даже если, например, $\omega_1 \in M$, нельзя утверждать, что $\omega_1 = \omega_1^M$. Если M счётна, то все ординалы $\alpha \in M$ счётны.

Предложение 5. Пусть $\mathbb{P}$ — ω_2^M-коэновское ч.у.м., $G \subset \mathbb{P}$ — любое $\mathbb{P}$-генерическое множество и $g = \bigcup G$. Тогда

1. $g \in M[G]$ (очевидно);
2. g является функцией;

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

3. $\operatorname{dom} g = \omega_2^M \times \omega$;

4. если $\alpha, \beta \in \omega_2^M$ и $\alpha \neq \beta$, то существует $n \in \omega$, для которого $g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)$.

Замечание 3. Любая функция $g\colon \omega_2^M \times \omega \to \{0,1\}$ со свойством 4 порождает вложение $f\colon \omega_2^M \to \mathscr{P}(\omega)^{M[G]}$, определённое правилом

$$f(\alpha) = \{n \in \omega : g(\alpha, n) = 0\}.$$

Доказательство предложения. 2: Ясно, что $g \subset \omega_2^M \times \omega \times \{0,1\}$. Если бы множество g не было функцией, то нашлись бы $p, q \in G$ и $(\alpha, n) \in \operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q$ такие, что $p(\alpha, n) \neq q(\alpha, n)$, т.е. для которых не существовало бы функции $r \in P$, являющейся продолжением и функции p, и функции q. Однако поскольку любые два условия (элемента G) совместимы в G (см. 2 в определении), такая функция r обязана существовать.

3: Пусть $\alpha \in \omega_2^M$ и $n \in \omega$. Положим

$$D = \{p \in P : (\alpha, n) \in \operatorname{dom} p\}.$$

Очевидно, $D \in M$. Множество D плотно: если $p \in P$, то либо $p \in D$, либо $d = p \cup \{((\alpha, n), 0)\} \in D$, причём $d \supset p$, т.е. $d \leq p$. По свойству 4 генерических множеств найдётся $q \in D \cap G$. Имеем $(\alpha, n) \in \operatorname{dom} q \subset \operatorname{dom} g$.
4: Пусть $\alpha < \beta < \omega_2^M$. Положим

$$D = \{p \in P : \exists n \in \omega \text{ такое, что } (\alpha, n), (\beta, n) \in \operatorname{dom} p \text{ и } p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}.$$

Очевидно, $D \in M$. Множество D плотно. Действительно, если $p \in P$, то $\operatorname{dom} p$ конечно, а значит, существует $n \in \omega$, для которого пары (α, n) и (β, n) не принадлежат $\operatorname{dom} p$. Положим

$$d = p \cup \{((\alpha, n), 0), ((\beta, n), 1)\}.$$

Имеем $d \leq p$ и $d \in D$.

Итак, D плотно. Значит, существует $q \in D \cap G$. Имеем

$$g(\alpha, n) = q(\alpha, n) \neq q(\beta, n) = g(\beta, n).$$

■

Мы построили (в модели $M[G]$) функцию $g\colon \omega_2^M \times \omega \to \{0,1\}$, а значит, и вложение $f\colon \omega_2^M \to \mathscr{P}(\omega)^{M[G]}$. Тем самым мы доказали, что $\left|\mathscr{P}(\omega)^{M[G]}\right| \geq \left|\omega_2^M\right|$. Чтобы доказать совместимость $\neg$CH с ZFC, достаточно проверить, что

- $M[G]$ существует;
- $\omega_2^{M[G]} = \omega_2^M$.

Тогда мы сможем утверждать, что в некоторой модели $\omega_1 < 2^\omega$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 4. Имена и интерпретации. Определение генерического расширения модели ZFC как множества интерпретаций

Имена и интерпретации

Пусть $\mathbb{P}$ — ч.у.м. в СТМ M. Мы будем обозначать $\mathbb{P}$-имена греческими буквами $\tau, \sigma, \pi \dots$.

Определение 17 (основное). Класс $\mathbb{P}$-*имён* определяется по рекурсии:

- $\varnothing$ — имя;
- множество τ — $\mathbb{P}$-имя, если τ — отношение (т.е. множество пар) и для любого $(\sigma, p) \in \tau$ σ — $\mathbb{P}$-имя и $p \in P$.

По-другому:

- $V^{\mathbb{P}}_{\varnothing} = \varnothing$;
- $V^{\mathbb{P}}_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V^{\mathbb{P}}_{\alpha} \times P)$ для любого ординала α;
- $V^{\mathbb{P}}_{\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} V^{\mathbb{P}}_{\beta}$ для любого предельного ординала α;
- $V^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V^{\mathbb{P}}_{\alpha}$.

Множество $M^{\mathbb{P}}$ $\mathbb{P}$-*имён* из M — это $V^{\mathbb{P}} \cap M$.

Определение 18 (упрощённое). Множество τ — $\mathbb{P}$-*имя* из M, если $\tau \in M$ и $\tau \subset M \times P$.

Определение 19 (основное). Для $G \subset P$ G-*интерпретация* $\mathbb{P}$-*имён* — это отображение, которое каждому имени τ ставит в соответствие множество τ_G. Определяется по рекурсии:

- $\varnothing_G = \varnothing$;
- $\{\tau_G = \{\sigma_G : \text{ существует } p \in G, \text{ для которого } (\sigma, p) \in \tau\}$.

Определение 20 (упрощённое). G-*интерпретация* τ_G имени $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ — это множество

$$\tau_G = \{x \in M : \text{ существует } p \in G, \text{ для которого } (x, p) \in \tau\}.$$

Определение 21. *Генерическое расширение* $M[G]$ модели M — это множество всех G-интерпретаций $\mathbb{P}$-имён из M: $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$.

Замечание 4. Множество $M[G]$ транзитивно. Если N — любая транзитивная модель ZFC, для которой $M \subset N$ и $G \in N$, то $M[G] \subset N$.

Пример 1.

- $\varnothing \in M^{\mathbb{P}}$ и $\varnothing_G = \varnothing$ для любого G.
- Для $p \in P$ $\{(\varnothing, p)\} \in M^{\mathbb{P}}$ и

$$\{(\varnothing, p)\}_G = \begin{cases} \{\varnothing\}, & \text{если } p \in G, \\ \varnothing, & \text{если } p \notin G. \end{cases}$$

- Для любого имени $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ $\{(\tau, \mathbf{1})\} \in M^{\mathbb{P}}$ и $\{(\tau, \mathbf{1})\}_G = \{\sigma_G : \sigma \in \tau\}$. (Если принято простое определение, то $\{(x, \mathbf{1})\} \in M^{\mathbb{P}}$ для любого $x \in M$, и $\{(x, \mathbf{1})\}_G = x$.)

  Таким образом, каждому множеству x канонически (независимо от G и, по сути, от $\mathbb{P}$) соответствует имя
  $$\check{x} = \{(\check{y}, \mathbf{1}) : y \in x\}.$$
  Это определение абсолютно, так что если $x \in M$, то $\check{x} \in M$. Кроме того, $\check{x}_G = x$ (доказывается $\in$-индукцией).

- $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in P\} \in M^{\mathbb{P}}$, $\Gamma_G = \{\check{p}_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$.

- $0 = \varnothing = \varnothing$.

- $1 = \{\varnothing\}$, $1 = \{(\varnothing, \mathbf{1})\}$.

- $2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $2 = \{(0, \mathbf{1}), (1, \mathbf{1})\} = \{(\varnothing, \mathbf{1}), ((\varnothing, \mathbf{1}), \mathbf{1})\}$.

Свойства $M[G]$ для СТМ M

1. Для любого имени $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ $\operatorname{rank} \tau_G \leq \operatorname{rank} \tau$.

   (Доказывается простой $\in$-индукцией.)

2. Множества $M[G]$ и M содержат одни и те же ординалы: $\operatorname{Ord}^{M[G]} = \operatorname{Ord}^M$.

3. Если модель M счётна, то и $M[G]$ счётна.

   Доказательство. Если $\alpha \in \operatorname{Ord}^{M[G]}$, то $\alpha = \tau_G$ для некоторого $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Свойство 1 $\implies$ $\operatorname{rank} \alpha \leq \operatorname{rank} \tau$. Поскольку $\operatorname{rank} \alpha = \alpha$ для всякого ординала α, имеем $\alpha \leq \operatorname{rank} \tau$. Определение ранга абсолютно $\implies$ для любого $x \in M$ имеем $\operatorname{rank} x \in M$, так что $\operatorname{rank} \tau \in M$. Транзитивность M и определение порядка на ординалах $\implies$ $\alpha \in M$.

   Включение $\operatorname{Ord}^M \subset \operatorname{Ord}^{M[G]}$ следует из того, что $M \subset M[G]$. ■

Вынуждение (форсинг)

Определение 22. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула, M — СТМ, $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество в M и $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — имена. Элементы $p \in P$ называются *условиями*. Говорят, что условие $p \in P$ *вынуждает* утверждение $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, и пишут
$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$
если для любого $\mathbb{P}$-генерического множества $G \ni p$ над M имеем $M[G] \models \varphi(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})$ (т.е. верно $\varphi(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})^{M[G]}$).

Вместо $x_1, \ldots, x_n$, $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}$ будем писать $\vec{x}$, $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}_G$.

Теорема 13 (об определимости). Для любых $\varphi(\vec{x})$ и $\vec{\tau}$ и любого условия p высказывание $p \Vdash \varphi(\vec{\tau})$ можно доказать или опровергнуть внутри M.

Теорема 14 (об истинности). Для любого истинного в $M[G]$ высказывания существует условие из G, которое его вынуждает.

Замечание 5. Если $p, q \in P$, $p \leq q$ и $p \Vdash \varphi(\tau)$, то $q \Vdash \varphi(\tau)$.

Отношение $\Vdash$ определено в классе V всех множеств, а не в модели M, поскольку оно предполагает знание *всех* генерических множеств $G \subset P$. Мы определим другое отношение $\Vdash^*$ и покажем, что $p \Vdash \varphi(\tau)$ тогда и только тогда, когда $(p \Vdash \varphi^*(\tau))^M$.

Пример 2. Предположим, что $\tau_1 = \{(\pi_1, s)\}$, $\tau_2 = \{(\pi_2, s)\}$ и житель M пытается понять, какие условия p вынуждают $\tau_1 = \tau_2$.

Если $p \perp s$, то $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$, потому что $s \notin G$ для $G \ni p$, так что $\tau_{1G} = \tau_{2G} = \varnothing$ для всех $G \ni p$.

Если $p \leq s$, то для любого $G \ni p$ имеем $\tau_{1G} = \{\pi_{1G}\}$ и $\tau_{2G} = \{\pi_{2G}\}$, так что $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \pi_1 = \pi_2$ (при условии, что $p \leq s$). Можно показать, что $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ тогда и только тогда, когда

$$\forall q \in P((q \leq p) \wedge (q \leq s) \to q \Vdash \pi_1 = \pi_2).$$

Определение 23. (Индукция по рангу имён и длине формул.) Пусть $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество. Для любых $p \in P$, любых имён $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и любых формул $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$

1. $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$, если

   (α) $\forall(\pi_1, s_1) \in \tau_1 \; \forall q \leq p \; \exists r \leq q \; ((r \leq s_1) \to \exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2((r \leq s_2) \wedge (r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)))$

   (β) $\forall(\pi_2, s_2) \in \tau_2 \; \forall q \leq p \; \exists r \leq q \; ((r \leq s_2) \to \exists(\pi_1, s_1) \in \tau_1((r \leq s_1) \wedge (r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))).$

2. $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$, если $\forall q \leq p \; \exists r \leq q$

   $$\exists(\pi, s) \in \tau_2((r \leq s) \wedge (r \Vdash^* \pi = \tau_1).$$

3. $p \Vdash^* (\varphi(\vec{\tau}) \wedge \psi(\vec{\tau}))$, если $p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$ и $p \Vdash^* \psi(\vec{\tau})$.

4. $p \Vdash^* \neg\varphi(\vec{\tau})$, если не существует $q \leq p$ такого, что $q \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$.

5. $p \Vdash^* \exists x(\varphi(x, \vec{\tau})$, если для каждого $q \leq p$ существуют условие $r \leq q$ и имя σ, для которых $r \Vdash^* \varphi(\sigma, \vec{\tau})$.

Лемма 3. Если $E \in M$, $E \subset P$ и G — генерическое множество, то

1. либо $G \cap E \neq \varnothing$, либо существует $q \in G$ такое, что $q \perp E$ (т.е. $q \perp r$ для всех $r \in E$);

2. если $p \in G$ и E плотно ниже p, то $G \cap E \neq \varnothing$.

Доказательство. 1 вытекает из плотности множества

$$D = \{p \in P : \exists r \in E(p \leq r)\} \cup \{q \in P : \forall r \in E(q \perp r)\}$$

и того, что любое генерическое множество пересекает все плотные множества, и что если $p \in G$ и $r \geq p$, то $r \in G$ (см. определение генерических множеств).

2: Пусть $G \cap E = \varnothing$. Пользуясь утверждением 1, зафиксируем $q \in G$, удовлетворяющее условию $q \perp E$. Пусть $q' \in G$, $q' \leq q$, $q' \leq p$ (оно существует, так как G генерическое). Поскольку E плотно ниже p, найдётся $r \in E$ такое, что $r \leq q' \leq q$. Получили противоречие. ■

Лемма 4. Для любого условия p и любой формулы $\varphi(\vec{x})$ следующие утверждения равносильны:

1. $p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$;

2. $\forall r \leq p(r \Vdash^* \varphi(\tau^*)$;

3. $\forall q \leq p \; \exists r \leq q(r \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))$.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Доказательство. Импликации 2⇒3 и 2⇒1 тривиальны. Чтобы доказать, что 1⇒2 и 3⇒1 для атомов, достаточно проанализировать определение отношения $\Vdash^*$ и определение генерического множества. Для составных формул применяется индукция по длине формулы (индуктивное предположение нужно только при рассмотрении формул вида $\varphi_1 \wedge \varphi_2$). ■

Лемма 5. Для любой формулы $\varphi(\vec{x})$, любого набора имён $\vec{\tau}$ и любого генерического множества G

1. $p \in G \wedge \big(p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})\big)^M \to \big(\varphi(\vec{\tau}_G)\big)^{M[G]}$;
2. $\big(\varphi(\vec{\tau}_G)\big)^{M[G]} \to \exists p \in G\big((p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))^M\big)$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по рангу имён для атомов и по длине формулы для сложных формул. Мы разберём только один ингредиент доказательства (это даст хорошее представление об остальных).

Проверим 1 для формулы $\tau_1 = \tau_2$. Пусть $p \in G$ и $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Надо показать, что $\tau_{1G} = \tau_{1G}$, т.е. $\tau_{1G} \subset \tau_{1G}$ и $\tau_{1G} \supset \tau_{1G}$. Докажем первое включение (второе аналогично).

Любой элемент интерпретации τ_{1G} имеет вид π_{1G}, где $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ для некоторого $s_1 \in G$. Надо показать, что $\pi_{1G} \in \tau_{2G}$. Зафиксируем $q \in G$ такое, что $q \le p$ и $q \le s_1$. По лемме (2) имеем $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Множество тех $r \in P$, которые удовлетворяют условию в пункте $1(\alpha)$ определения отношения $\Vdash^*$, в котором p заменено на q, плотно ниже q. По лемме (1) это множество пересекает G, т.е.

$$\exists r \in G\big((r{\le}q) \wedge \big((r{\le}s_1) \to \exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2((r{\le}s_2) \wedge (r \Vdash^* \pi_1{=}\pi_2))\big)\big)$$

(переписали (α) с q вместо p и $r \in G$ вместо любого r $(\in P)$). Но $q \le s_1$; значит, для любого $r \le q$ имеем $r \le s_1$, так что нужное имя (π_2, s_2) существует. Зафиксируем его.

Имеем $s_2 \in G$ (так как $s_2 \ge r \in G$). Следовательно, $\pi_{2G} \in \tau_{2G}$. Поскольку $\operatorname{rank}\pi_i < \operatorname{rank}\tau_i$, по индуктивному предположению $r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2 \to \pi_{1G} = \pi_{2G}$, откуда $\pi_{1G} \in \tau_{2G}$. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 5. Основные положения форсинга

Теорема 15 (определимость + истинность). Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество в M, $\varphi(\vec{x})$ — формула и $\vec{\tau}$ — набор имён из M. Тогда

1. для всякого $p \in P$ $\quad p \Vdash \varphi(\vec{\tau}) \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))^M$;
2. для всякого $\mathbb{P}$-генерического множества G над M

$$\varphi(\vec{\tau}_G)^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\vec{\tau})).$$

Доказательство. 1, $\leftarrow$: из леммы (3) и определения $\Vdash$.

1, $\rightarrow$: лемма (2) $\implies$ достаточно показать, что $D = \{r \in P : (r \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})\}$ плотно ниже p. Пусть это не так, и пусть $q \leq p$ таково, что $\neg\exists r \leq q(r \in D)$. По определению $\Vdash^*$ имеем $(q \Vdash^* \neg\varphi(\vec{\tau}))^M$. Доказанная импликация $\leftarrow$ $\implies$ $q \Vdash \neg\varphi(\vec{\tau})$. Если G — генерическое множество и $q \in G$, то $(\neg\varphi(\vec{\tau}_G))^{M[G]}$, но $p \in G$ (так как $p \geq q$), откуда $(\varphi(\vec{\tau}_G))^{M[G]}$ — противоречие.

2, $\rightarrow$: из 1 и леммы (3) 2.

2, $\leftarrow$: из определения $\Vdash$. ■

Следствие 1. Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — ч.у.м. в M и $\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n$ — имена в M. Тогда

1. множество $\{p \in P : (p \Vdash \varphi(\vec{\tau})) \vee (p \Vdash \neg\varphi(\vec{\tau}))\}$ плотно в P;
2. $p \nVdash \neg\varphi(\vec{\tau}) \leftrightarrow \neg\exists q \leq p(q \Vdash \varphi(\vec{\tau}))$;
3. $p \Vdash \exists x\varphi(x, \vec{\tau}) \leftrightarrow \{r \leq p : \exists \pi \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau})\}$ плотно ниже p;
4. если $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x, \vec{\tau}))$, то $\exists q \leq p\ \exists \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)(q \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau}))$.

Доказательство. Утверждения 1–3 верны для $\Vdash^*$ (по определению), значит, они верны и для $\Vdash$ (по основной теореме 1).

Докажем 4. Зафиксируем генерическое множество $G \ni p$. По определению $\Vdash$ найдётся $a \in \sigma_G$, для которого $(\varphi(a, \vec{\tau}))^{M[G]}$; имеем $a \in \pi_G$ для некоторого $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$. По основной теореме 2 $\exists r \in G(r \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau}))$. Для $q \leq p$, $q \leq r$ имеем $q \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau})$. ■

ZFC в $M[G]$

Аксиома существования: множества существуют.

Выполнение в $M[G]$ очевидно.

Аксиома объёмности: два множества равны $\iff$ каждый элемент одного из них принадлежит другому и наоборот.

Выполнение в $M[G]$ вытекает из транзитивности $M[G]$.

Аксиома регулярности: $X \neq \varnothing$ $\implies$ существует $x \in X$ такой, что $X \cap x = \varnothing$.

Из транзитивности.

Аксиома бесконечности: существует множество, которое содержит в качестве элемента $\varnothing$ и вместе с каждым элементом x содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$.

$\omega = \check{\omega}_G \in M[G]$.

Аксиома пары: для любых множеств x и y существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — x и y.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поскольку $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$, достаточно показать, что для любых имён $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ найдётся имя $\text{ПАРА}(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$, которое всегда интерпретируется как $\{\sigma_G, \tau_G\}$. Оно определяется так:

$$\text{ПАРА}(\sigma, \tau) = \{(\sigma, \mathbf{1}), (\tau, \mathbf{1})\}.$$

Схема аксиом выделения: любому множеству X и любому свойству φ отвечает множество Y, состоящее в точности из тех элементов множества X, которые обладают свойством φ.

Надо проверить, что для любых $\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ и любой формулы $\varphi(x, \vec{y})$ имеем $\{u \in \sigma_G : \big(\varphi(u, \vec{\tau}_G)\big)^{M[G]}\} \in M[G]$. Положим

$$\rho = \{(\pi, p) \in \operatorname{dom}(\sigma) \times P : p \Vdash ((\pi \in \sigma) \wedge \varphi(\pi, \vec{\tau}))\}.$$

Из теоремы об определимости вытекает, что $\rho \in M$ (а значит, $\rho \in M^{\mathbb{P}}$). Покажем, что $\rho_G = \{u \in \sigma_G : \big(\varphi(u, \vec{\tau}_G)\big)^{M[G]}\}$.

Любой элемент ρ_G имеет вид π_G, где $(\pi, p) \in \rho$ для некоторого $p \in G$. По определению $p \Vdash \big((\pi \in \sigma) \wedge \varphi(\pi_G, \vec{\tau})^{M[G]}\big)$; значит, $\rho_G \subset \{u \in \sigma_G : \big(\varphi(u, \vec{\tau}_G)\big)^{M[G]}\}$.

Докажем обратное включение. Пусть $u \in \sigma_G$ и $\varphi(u, \vec{\tau}_G)^{M[G]}$. Тогда $u = \pi_G$ для некоторого $\pi \in \operatorname{dom}(\sigma)$. Значит, $((\pi_G \in \sigma_G) \wedge \varphi(\pi_G, \vec{\tau}_G))^{M[G]}$. Любое высказывание, истинное в $M[G]$, вынуждается некоторым условием из $G \implies$ найдётся $p \in G$, для которого $p \Vdash ((\pi \in \sigma) \wedge \varphi(\pi, \vec{\tau}))$, так что $(\pi, p) \in \rho$, откуда $\pi_G \in \rho_G$.

Аксиома объединения: для любого семейства множеств $\mathscr{F}$ существует множество $X = \bigcup \mathscr{F}$ — объединение семейства $\mathscr{F}$; его элементами являются в точности все элементы множеств-элементов семейства $\mathscr{F}$.

Поскольку у нас уже есть аксиома выделения, достаточно проверить, что для любого $\mathscr{F} \in M[G]$ существует $X \in M[G]$ такое, что $\bigcup \mathscr{F} \subset X$, т.е. $(\forall Y \in \mathscr{F})(Y \subset X)$.

Пусть τ — имя и $\tau_G = \mathscr{F}$. Для $\pi = \bigcup \operatorname{dom}(\tau)$ имеем $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ и $X = \pi_G \in M[G]$. Пусть $Y \in \mathscr{F}$. Тогда $Y = \sigma_G$ для некоторого имени $\sigma \in \operatorname{dom}(\tau)$. Поскольку $\sigma \subset \pi$, имеем $Y = \sigma_G \subset \pi_G = X$.

Аксиома множества подмножеств: для любого множества X существует множество Y, состоящее из всех подмножеств множества X.

Пусть $X = \tau_G \in M[G]$. Положим $\sigma = S \times \{\mathbf{1}\}$ для

$$S = \{\pi \in M^{\mathbb{P}} : \operatorname{dom}(\pi) \subset \operatorname{dom}(\tau)\} = \big(\mathscr{P}(\operatorname{dom}(\tau) \times P)\big)^M.$$

Зафиксируем имя ρ, для которого $\rho_G \subset \tau_G$. Покажем, что $\rho_G \in \sigma_G$. Положим

$$\mu = \{(\nu, p) : \nu \in \operatorname{dom}(\tau) \wedge p \Vdash \nu \in \rho\}.$$

Имеем $\mu \in S$, откуда $\mu_G \in \sigma_G$. Осталось показать, что $\rho_G = \mu_G$.

Покажем, что $\rho_G \subset \mu_G$. Поскольку $\rho_G \subset \tau_G$, любой элемент ρ_G имеет вид ν_G для некоторого $\nu \in \operatorname{dom}(\tau)$, а поскольку $\nu_G \in \rho_G$, по теореме об истинности найдётся условие $p \in G$, для которого $p \Vdash \nu \in \rho$, так что $(\nu, p) \in \mu$ и $\nu_G \in \mu_G$.

Докажем обратное включение $\mu_G \subset \rho_G$. Любой элемент μ_G имеет вид ν_G для имени ν с тем свойством, что $(\nu, p) \in \mu$ для некоторого $p \in G$. Значит, $p \Vdash \nu \in \rho$ и $\nu_G \in \rho_G$.

Схема аксиом подстановки: если $\varphi(x, y)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества a существует единственное множество b такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества X определено множество Y, элементами которого являются те и только те множества y, для которых $\varphi(x, y)$ истинно при некотором $x \in X$.

Пусть $X = \tau_G$, и пусть множество имён $S \in M$ таково, что

$$(\forall \pi \in \tau)(\forall p \in P)\big((\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}})(p \Vdash \varphi(\pi, \sigma)) \to (\exists \sigma \in S)(p \Vdash \varphi(\pi, \sigma))\big).$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Существование множества S следует из теоремы об определимости и общего *принципа отражения*: *для любой формулы $\varphi(x,y)$ и любого множества S_0 существует множество $S \supset S_0$ такое, что для всякого $x \in S$*

$$\exists y(\varphi(x,y)) \to (\exists y \in S)(\varphi(x,y)).$$

Множество S строится так: для всякого множества x положим $C_x = \{y : \varphi(x,y)\}$ (это класс) и для всякого множества Y положим

$$\mathfrak{C}(Y) = Y \cup \bigcup^{x\in Y} \{y \in C_x : (\forall z \in C_x)(\operatorname{rank} y \le \operatorname{rank} z)\}$$

(это множество). По рекурсии определяем $S_{n+1} = \mathfrak{C}(S_n)$ для $n \in \omega$. Множество $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ обладает нужными свойствами.

Пусть $\sigma = S \times \{\mathbf{1}\}$. Тогда $\sigma_G = \{\pi_G : \pi \in S\}$. Зафиксируем $x \in \tau_G$ и покажем, что найдётся $y = \rho_G \in \sigma_G$ такое, что $(\varphi(x,y))^{M[G]}$. По предположению $(\exists! y \varphi(\pi_G, y))^{M[G]}$, поэтому для некоторого имени ρ имеем $(\varphi(\pi_G, \rho_G))^{M[G]}$, и по основной теореме 2 $(\exists p \in G)(p \Vdash \varphi(\pi,\rho))$. Следовательно,

$$(\exists \rho \in S)(p \Vdash \varphi(\pi,\rho)),$$

откуда $\rho_G \in \sigma_G$ и $(\varphi(\pi_G,\rho_G))^{M[G]}$.

Мы показали, что для всякого $x \in \tau_G = X$ найдётся $y \in \sigma_G$, для которого $\varphi(x,y)$. По предположению такой y единствен. Применив аксиому выделения, получим требуемое множество $Y \subset \sigma_G$.

Аксиома выбора. По теореме Цермело аксиома выбора равносильна утверждению, что *на каждом множестве существует отношение полного порядка.*

Существование полного порядка на множестве X равносильно существованию ординала α и отображения $f\colon \alpha \overset{\text{на}}{\to} X$. Действительно, если они существуют, то отображение $g\colon X \to \alpha$, определённое правилом $g(x) = \min\{f^{-1}(x)\}$, инъективно, и полный порядок на X можно определить правилом $x \le y \Leftrightarrow g(x) \le g(y)$.

Зафиксируем $X = \tau_G \in M[G]$. Пользуясь тем, что аксиома выбора верна в M, перенумеруем элементы $\operatorname{dom}(\tau)$ посредством принадлежащей M биекции $f\colon \alpha \to \operatorname{dom}(\sigma)$ (α — ординал):

$$\operatorname{dom}(\tau) = \{\pi_\gamma : \gamma < \alpha\},$$

где $\pi_\gamma = f(\gamma)$. Положим

$$\sigma = \{\text{ПАРА}(\check{\gamma}, \pi_\gamma) : \gamma < \alpha\} \times \{\mathbf{1}\}.$$

Имеем $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ и $\sigma_G = \{(\gamma, \pi_{\gamma_G}) : \gamma < \alpha\}$, так что σ_G — отображение, $\operatorname{dom}(\sigma_G) = \alpha$ и $\tau_G \subset \operatorname{ran}(\sigma_G)$.

Первая теорема о сохранении кардиналов

Пусть $\mathbb{P} = (P, \le, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество.

Определение 24. Множество $A \subset P$ называется *антицепью*, если оно состоит из попарно несовместимых элементов. Множество $C \subset P$ называется *цепью*, если отношение $\le$ индуцирует на нём линейный порядок.

В следующем определении слово «цепей» следовало бы заменить на «антицепей», но по устоявшейся традиции говорят именно о цепях.

Определение 25. Говорят, что ч.у.м. $\mathbb{P}$ удовлетворяет *условию счётности цепей* (*у.с.ц.*), если $\mathbb{P}$ не содержит несчётных антицепей.

Теорема 16 (первая теорема о сохранении кардиналов). Пусть M — СТМ и $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м. и $\kappa \in M$. Если

$$M \models (\kappa \text{ — кардинал и } \mathbb{P} \text{ удовлетворяет у.с.ц.}),$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

то $\mathbf{1} \Vdash (\check{\kappa}$ — кардинал), т.е. κ остаётся кардиналом в $M[G]$ для любого генерического множества $G \subset P$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $G \subset P$ — генерическое множество и функция $f \in M[G]$ отображает некоторый ординал $\lambda < \kappa$ на κ. Тогда $f = \varphi_G$ для некоторого имени φ. По теореме об истинности для некоторого $p \in G$ имеем $p \Vdash (\varphi$ — функция из λ на $\kappa)$.

Рассуждаем в M. Для каждого $\alpha < \lambda$ положим

$$A_\alpha = \{\beta < \kappa : \exists q \leq p (q \Vdash \varphi(\alpha) = \beta)\}.$$

Это множество действительно можно определить в M:

$$A_\alpha = \{\beta < \kappa : \exists q \leq p (q \Vdash^* \text{ПАРА}(\alpha, \beta) \in \varphi)\}.$$

Множество A_α можно представлять себе как совокупность всех возможных значений $\varphi(\alpha)$ при разных интерпретациях.

Для каждого $\beta \in A_\alpha$ выберем условие $q(\beta) \leq p$, вынуждающее $\varphi(\alpha) = \beta$. Для $\beta \neq \gamma$ условия $q(\beta)$ и $q(\gamma)$ несовместимы. Действительно, если $r \leq q(\beta)$ и $r \leq q(\gamma)$, то

$$r \Vdash (\varphi \text{ — функция из } \lambda \text{ на } \kappa) \wedge (\varphi(\alpha) = \beta) \wedge (\varphi(\alpha) = \gamma).$$

Из того, что $\mathbb{P}$ удовлетворяет у.с.ц. в M, следует, что $|A_\alpha|^M \leq \omega$ для каждого $\alpha < \lambda$. Положим $A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$. Имеем $|A|^M \leq \omega$.

Возьмём любой ординал $\beta < \kappa$. В $M[G]$ имеем $\beta = f(\alpha)$ для некоторого $\alpha < \lambda$. По теореме об истинности существует $q \in G$, для которого $q \Vdash (\varphi(\alpha) = \beta)$, причём можно считать, что $q \leq p$. Это означает, что $\beta \in A_\alpha \subset A$. Значит, $\kappa \subset A$. Из абсолютности отношения $\subset$ и того, что $\kappa, A \in M$, получаем $|A|^M \geq \kappa$. Противоречие.

■

Как это работает

Предложение 6. α-коэновское ч.у.м. $\mathbb{P}$ удовлетворяет условию счётности цепей для любого ординала α.

Доказательство. Предположим, что в α-коэновском ч.у.м. $\mathbb{P}$ есть несчётная антицепь A. Для каждого конечного множества $F \subset \alpha \times \omega$ множество функций $F \to \{0, 1\}$ конечно. Значит, семейство $\mathscr{F} = \{\text{dom}(p) : p \in A\}$ несчётно.

По лемме о Δ-системе найдутся несчётное подсемейство $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ и конечное множество $R \subset \alpha \times \omega$ такие, что $\mathscr{F}'$ — Δ-система с корнем R, т.е. $F' \cap F'' = R$ для любых различных $F', F'' \in \mathscr{F}'$. Поскольку число разных функций $R \to \{0, 1\}$ конечно, можно подобрать $p, q \in A$, для которых $\text{dom}(p) \neq \text{dom}(q)$, $\text{dom}(p) \cap \text{dom}(q) = R$ и $p|_R = q|_R$. Функция $r = p \cup q$ продолжает как p, так и q, т.е. $r \leq p$ и $r \leq q$ в $\mathbb{P}$ в противоречие с тем, что A — антицепь. ■

Определение 26. Семейство множеств $\mathscr{F}$ называется Δ-*системой*, если существует множество R такое, что $A \cap B = R$ для любых различных $A, B \in \mathscr{F}$. Множество R называется *корнем* Δ-системы $\mathscr{F}$.

Лемма 6 (О Δ-системе). Любое несчётное семейство $\mathscr{F}$ конечных множеств содержит несчётную Δ-систему.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что все множества в $\mathscr{F}$ имеют одинаковую мощность n и что все они — подмножества ω_1.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Индукция по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Если существует $\alpha \in \omega_1$, для которого семейство

$$\mathscr{F}_\alpha = \{F \in \mathscr{F} : \min F = \alpha\}$$

несчётно, то надо рассмотреть

$$\mathscr{F}'' = \{F \setminus \{\alpha\} : F \in \mathscr{F}_\alpha\}$$

и применить индуктивное предположение. Если $\tilde{\mathscr{F}}'' \subset \mathscr{F}''$ — несчётная Δ-система и R'' — её корень, то $\{F \cup \{\alpha\} : F \in \tilde{\mathscr{F}}''\} \subset \mathscr{F}$ — несчётная Δ-система с корнем $R'' \cup \{\alpha\}$.

В противном случае по трансфинитной рекурсии легко построить отображение $f\colon \omega_1 \to \mathscr{F}$ такое, что

$$\left(\bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)\right) \subset \min f(\alpha)$$

для всех $\alpha < \omega_1$. В этом случае $\mathscr{F}' = \{f(\alpha) : \alpha < \omega_1\} \subset \mathscr{F}$ — несчётная Δ-система с корнем $R = \varnothing$. ■

Совместимость континуум-гипотезы

Истинность CH в модели M означает, что существует функция $f \in M$ из ω_1^M на $\mathscr{P}^M(\omega)$.

Определение 27. *Антикоэновским частично упорядоченным множеством* называется множество

$$P = \{p : p \text{ — частичная функция из } \omega_1 \text{ в } \mathscr{P}(\omega),\ |\operatorname{dom}(p)| \leq \omega\},$$

упорядоченное обратно включению.

В антикоэновском ч.у.м. наибольший элемент $\mathbf{1}$ — это пустая функция.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 6. Доказательство основных положений форсинга. Гипотеза Суслина о существовании линейно упорядоченного несепарабельного топологического пространства со свойством Суслина

Предложение 7. Пусть $\mathbb{P} \in M$ — антикоэновское ч.у.м., $G \subset \mathbb{P}$ — любое $\mathbb{P}$-генерическое множество и $g = \bigcup G$. Тогда $g \in M[G]$ и g является сюръективной функцией из ω_1^M на $\mathscr{P}^M(\omega)$.

Доказательство. Любые два элемента G совместимы $\iff$ любые две функции из G имеют общее продолжение $\iff$ для любого $\alpha \in \omega_1$ и любых $p, q \in G$ имеем $p(\alpha) = q(\alpha)$ $\iff$ $g = \bigcup G$ — отображение из (подмножества) ω_1 в $\mathscr{P}^M(\omega)$.

Пусть $\alpha \in \omega_1$. Множество

$$D = \{p \in P : \alpha \in \operatorname{dom} p\}$$

плотно в P (для любого $q \in P$ либо $\alpha \in \operatorname{dom} q$, и тогда $q \in D$, либо $\alpha \notin \operatorname{dom} q$, и тогда $p = q \cup \{(\alpha, \varnothing)\} \in D$ и $p \leq q$). Значит, $G \cap D \neq \varnothing$, т.е. G содержит функцию, определённую в точке α $\implies$ отображение g определено в точке α.

Пусть $N \in M$, $N \subset \omega$. Множество

$$D = \{p \in P : N \in \operatorname{ran} p\}$$

плотно в P (для любого $q \in P$ существует $\alpha \notin \operatorname{dom} q$; имеем $p = q \cup \{(\alpha, N)\} \in D$ и $p \leq q$). Значит, $G \cap D \neq \varnothing$, т.е. G содержит функцию, принимающую значение N в некоторой точке $\implies$ отображение g принимает значение N в некоторой точке $\implies$ $g\colon \omega_1^M \to \mathscr{P}^M(\omega)$ сюръективно. ■

Чтобы доказать, что $M[G] \models \mathrm{CH}$ (т.е. что CH истинна в $M[G]$), надо проверить, что

$$\mathscr{P}^{M[G]}(\omega) = \mathscr{P}^M(\omega) \quad \text{и} \quad \omega_1^M \text{ — кардинал в } M[G].$$

Определение 28. Частично упорядоченное множество $\mathbb{P}$ называется *ω-замкнутым*, если для любой невозрастающей последовательности $(p_n)_{n\in\omega}$ условий из P найдётся $p \in P$ такое, что $p \leq p_n$ для всех $n \in \omega$.

Очевидно, антикоэновское множество ω-замкнуто.

Теорема 17 (о сохранении функций). Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м., $M \models (\mathbb{P}\ \omega\text{-замкнуто})$, G — генерическое множество, $X \in M$ и $f \in M[G]$ — функция $\omega \to X$. Тогда $f \in M$.

Доказательство. Пусть $f \in M[G]$ — функция $\omega \to X$. Предположим, что $f \notin X^\omega \cap M$. Зафиксируем имя τ, для которого $f = \tau_G$, и условие $p \in P$ такое, что

$$p \Vdash \tau \text{ — функция } \omega \to X \text{ и } \tau \notin (X^\omega).$$

Рассуждаем в M. По индукции построим последовательности $(p_n)_{n\in\omega}$ условий из P и $(x_n)_{n\in\omega}$ точек из X так, что

- $p_0 = p$,
- $p_{n+1} \leq p_n$ для $n \in \omega$,
- $p_{n+1} \Vdash \tau(n) = x_n$ для $n \in \omega$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На n-м шаге точка x_n и условие p_{n+1} строятся так: поскольку $p_n \Vdash (\tau$ — функция $\omega \to X)$, имеем $p \Vdash \exists \pi \in X(\tau(n) = \pi)$. Поскольку все имена $\pi \in X$ имеют вид x для $x \in X$, в силу следствия из основной теоремы, пункт 4, существуют $x_n \in X$ и $p_{n+1} \in P$, для которых $p_{n+1} \Vdash \tau(n) = x_n$.

Получили последовательность $g = (x_n)_{n\in\omega} = \{(n, x_n) : n \in \omega\} \in M$.

Это функция $\omega \to X$. $\mathbb{P}$ ω-замкнуто $\implies$ $\exists\, p_\omega \in P$ такое, что $p_\omega \leq p_n$ для $n \in \omega$. Для любого генерического множества $G' \ni p_\omega$ и любого $n \in \omega$ имеем $\tau_{G'}(n) = x_n$, откуда $\tau_{G'} = g \in X^\omega = (X^\omega)_{G'}$ в противоречие с предположением, что $p_0 \Vdash \tau \notin (X^\omega)$.

■

Следствие 2. Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м., $M \models (\mathbb{P}$ ω-замкнуто) и G — генерическое множество. Тогда

1. $\mathscr{P}^{M[G]}(\omega) = \mathscr{P}^M(\omega)$;
2. $\omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$.

Доказательство. 1. Если $A \in \mathscr{P}^{M[G]}(\omega) \setminus \mathscr{P}^M(\omega)$, то характеристическая функция $\chi_A \colon \omega \to \{0, 1\}$ — контрпример к теореме.

2. Очевидно. ■

Гипотеза Суслина

Пусть $(X, \leq)$ — линейно упорядоченное множество, и пусть $L, R \subset X$, причём $L \cup R = X$ и $L < R$ (т.е. $x < y$ для любых $x \in L$ и $y \in R$). Пара L, R называется

- *скачком*, если существуют $\max L \in L$ и $\min R \in R$;
- *дедекиндовым сечением*, если не существует $\min R$;
- *щелью*, если не существуют $\min R$ и $\max L$.

Пусть (L, R) и (L', R') — дедекиндовы сечения. Будем писать $(L, R) \leq (L', R')$, если $L \subset L'$. Множество $\widehat{X}$ всех дедекиндовых сечений, так упорядоченное, не содержит щелей и содержит X (каждый элемент X отождествляется с (L_x, R_x), где $L_x = \{y \in X : y \leq x\}$ и $R_x = \{y \in X : x < y\}$). При этом X *плотно* в $\widehat{X}$, т.е. любой непустой интервал в $\widehat{X}$ содержит точку из X. Множество $\widehat{X}$ называется *дедекиндовым пополнением* линейно упорядоченного множества X.

Линейно упорядоченное множество X *связно*, если в нём нет скачков и щелей. Дедекиндово пополнение любого множества, в котором нет скачков, связно.

На каждом линейно упорядоченном множестве $(X, \leq)$ естественно возникает *порядковая топология* $\mathscr{T}$: множество открыто $\iff$ оно является объединением произвольного семейства открытых интервалов. Множество $Y \subset X$ плотно в X относительно этой топологии (т.е. его замыкание $\operatorname{cl} Y$ совпадает с X) $\iff$ Y плотно в X в смысле порядка. Топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ связно (т.е. его нельзя представить как объединение непересекающихся непустых открытых множеств) $\iff$ $(X, \leq)$ связно в смысле порядка.

Вещественная прямая $\mathbb{R}$ — дедекиндово пополнение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Она связна и *сепарабельна* (т.е. содержит счётное всюду плотное множество). Кроме того, в $\mathbb{R}$ нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Хорошо известно и нетрудно показать, что всякое линейно упорядоченное множество, которое

- не содержит ни наименьшего, ни наибольшего элемента,
- связно,

- сепарабельно

порядково изоморфно прямой $\mathbb{R}$.

Определение 29. Топологическое пространство обладает *свойством Суслина*, если в нём всякое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств не более чем счётно.

Замечание 6.
1. Всякое сепарабельное пространство обладает свойством Суслина.
2. Топология $\mathscr{T}$ (семейство всех открытых множеств) любого топологического пространства X частично упорядочена отношением $\subset$. Пространство X обладает свойством Суслина $\iff$ $\mathscr{T}$ удовлетворяет условию счётности цепей.

Определение 30. *Прямая Суслина* — это несепарабельное линейно упорядоченное пространство со свойством Суслина.

Гипотеза Суслина — это утверждение «прямых Суслина не существует». Обозначение: *SH*.

Топологические произведения

Декартово произведение семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ определяется так:

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{f\colon A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \forall \alpha \in A(f(\alpha) \in X_\alpha)\}.$$

Элемент $f\colon A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ принято записывать не в виде отображения, а в специальном виде $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, где подразумевается, что $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого α. При этом x_α называется *α-й координатой* элемента $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Канонической проекцией произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ на сомножитель X_β, где $\beta \in A$, называется отображение $\pi_\beta\colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha\in A}\big) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

На декартовом произведении $X \times Y$ двух топологических пространств имеется естественная *топология произведения* — в ней открыты всевозможные объединения множеств вида

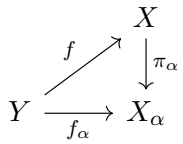
$$U \times V, \qquad \text{где } U \text{ открыто в } X,\ V \text{ открыто в } Y.$$

Топологическим произведением, или просто *произведением*, двух топологических пространств называется их декартово произведение с этой топологией.

Тихоновская топология, или *топология произведения*, на декартовом произведении $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ произвольного семейства топологических пространств — это самая слабая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны.

Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются *топологическими*, или *тихоновскими, произведениями*. Открытые множества — всевозможные объединения множеств вида $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое U_α — открытое подмножество X_α и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, индексов α.

В теории категорий произведение объектов X_α, $\alpha \in A$, определяется как объект X вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ (называемых каноническими проекциями) с тем свойством, что для любого объекта Y этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f\colon Y \to X$ такой, что диаграмма



коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\underset{\alpha\in A}{\Delta} f_\alpha \colon Y \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

Теорема 18 (Хьюитт–Марчевский–Пондицери). Произведение непустых неодноточечных топологических пространств X_α, $\alpha \in A$, сепарабельно $\iff$ все X_α сепарабельны и $|A| \leq 2^\omega$.

Теорема 19. Если семейство пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ таково, что для любого конечного множества индексов $F \subset A$ произведение $X = \prod\limits_{\alpha\in F} X_\alpha$ обладает свойством Суслина, то и всё произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ обладает этим свойством.

Доказательство. Пусть $\{W_\iota\}$ — несчётное семейство непустых открытых множеств в X. Имеем $W_\iota \supset \prod U_\alpha^\iota \neq \varnothing$, где $U_\alpha^\iota = X_\alpha$ для всех $\alpha \notin F_\iota$, $F_\iota \subset A$ конечно. Пусть R — корень несчётной Δ-системы, содержащейся в $\{F_\iota\}$. Произведение $\prod\limits_{\alpha\in R} X_\alpha$ со свойством Суслина $\implies$ существуют $\iota' \neq \iota''$ такие, что $F_{\iota'}$ и $F_{\iota''}$ попали в Δ-систему и $\prod\limits_{\alpha\in R} U_\alpha^{\iota'} \cap \prod\limits_{\alpha\in R} U_\alpha^{\iota''} \neq \varnothing$. Поскольку $(F_{\iota'} \setminus R) \cap (F_{\iota''} \setminus R) = \varnothing$, имеем $W_{\iota'} \cap W_{\iota''} \neq \varnothing$. ■

Предложение 8. Квадрат прямой Суслина не обладает свойством Суслина.

Доказательство. Пусть $(X, \leq)$ — прямая Суслина. Индукцией по α найдём точки $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$, $\alpha < \omega_1$, со свойствами

1. $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$;
2. $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \varnothing$ и $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \varnothing$;
3. $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\beta : \beta < \alpha\} = \varnothing$.

Пусть I — множество всех изолированных точек в X. Оно счётно, так как X обладает свойством Суслина и $\{x\}$ открыто для каждого $x \in I$. Выберем любые $a_0, b_0, c_0 \in X$ со свойствами 1 и 2.

Пусть $\alpha < \omega_1$ и $a_\beta, b_\beta, c_\beta$ уже построены для всех $\beta < \alpha$. X не сепарабельно $\implies$ множество $X \setminus \operatorname{cl} I \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}$ содержит непустой интервал (a_α, c_α).

Он бесконечен (изолированные точки исключены) $\implies \exists\, b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ со свойством 2.

Множества $(a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$ непусты, открыты и попарно не пересекаются: если $\beta < \alpha$, то либо $b_\beta \leq a_\alpha$, либо $b_\beta \geq c_\alpha$, т.е. либо $(a_\beta, b_\beta) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \varnothing$), либо $(b_\beta, c_\beta) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \varnothing$. ■

Предложение 9. Если существует прямая Суслина, то существует и прямая Суслина, которая

1. не имеет скачков (т.е. $(a, b) \neq \varnothing$ для $a < b$) и
2. не содержит сепарабельных открытых подмножеств.

Идея доказательства. Взяв любую прямую Суслина $(X, \leq)$, определим отношение эквивалентности $\sim$ на X, полагая $x \sim y \iff$ интервал (x, y) сепарабелен.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Каждый класс эквивалентности $[x]_\sim$ — выпуклое множество, т.е. если $y, z \in [x]_\sim$ и $y < z$, то $(y, z) \subset [x]_\sim$. Поэтому на множестве классов эквивалентности определён естественный порядок: $[x]_\sim \leq_\sim [y]_\sim \iff x \leq y$ (он не зависит от выбора представителей x и y).

Факторпространство $X/\sim = \{[x]_\sim : x \in X\}$ с порядком $\leq_\sim$ — прямая Суслина с нужными свойствами. ■

Следствие 3. Если существует прямая Суслина, то существует линейно упорядоченное множество, которое

- не содержит ни наименьшего, ни наибольшего элемента,
- связно,
- обладает свойством Суслина

и не изоморфно прямой $\mathbb{R}$.

Этими свойствами обладает дедекиндово пополнение прямой Суслина из предыдущей теоремы, из которого выкинули наименьший и наибольший элементы (если они есть).

Аксиома Мартина

Определение 31. Пусть $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество и $\mathscr{D}$ — любое семейство его подмножеств. Множество $F \subset P$ называется *$\mathscr{D}$-генерическим фильтром*, если

1. $\mathbf{1} \in F$;
2. для любых $p, q \in F$ существует $r \in F$ такое, что $r \leq p$ и $r \leq q$;
3. если $p \in F$, $q \in P$ и $p \leq q$, то $q \in F$;
4. $F \cap D \neq \varnothing$ для любого $D \in \mathscr{D}$.

Аксиома Мартина. *Для любого ч.у.м. $\mathbb{P}$, удовлетворяющего условию счётности цепей, и любого семейства $\mathscr{D}$ плотных подмножеств P мощности $|\mathscr{D}| < 2^\omega$ существует $\mathscr{D}$-генерический фильтр.*

Замечание 7. CH $\implies$ MA

Определение 32. Семейство множеств назвается *центрированным*, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.

Теорема 20 (MA + ¬CH). Пусть X — топологическое пространство со свойством Суслина и $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых подмножеств X. Тогда найдётся несчётное множество $A \subset \omega_1$, для которого семейство $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ центрировано.

Доказательство. Для каждого $\alpha < \omega_1$ положим $V_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma > \alpha} U_\gamma$. Для любых $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega$ имеем $V_{\alpha_1} \supset V_{\alpha_2}$. Существует $\alpha_0 < \omega_1$ такое, что

$$\forall \beta > \alpha_0 (\overline{V}_\beta = \overline{V}_{\alpha_0}) \qquad (\star)$$

(черта сверху — замыкание). Действительно, в противном случае мы могли бы найти возрастающую несчётную последовательность ординалов $(\alpha_\xi)_{\xi < \omega_1}$ такую, что $\operatorname{cl} V_{\alpha_{\xi+1}} \neq \operatorname{cl} V_{\alpha_\xi}$, т.е. $V_{\alpha_\xi} \setminus \operatorname{cl} V_{\alpha_{\xi+1}} \neq \varnothing$, для каждого ξ. Множества $V_{\alpha_\xi} \setminus \operatorname{cl} V_{\alpha_{\xi+1}}$ открыты и попарно не пересекаются. Свойство Суслина $\implies$ все они, кроме счётного числа, должны быть пустыми.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Зафиксируем $\alpha_0 < \omega_1$, для которого выполнено условие $(\star)$, и положим

$$P = \{p \subset V_{\alpha_0} : p \text{ открыто и } p \neq \varnothing\}.$$

Упорядочим P по включению. Максимальный элемент $\mathbf{1}$ — это V_{α_0}. $\mathbb{P}$ удовлетворяет у.с.ц., так как X обладает свойством Суслина. Для $\alpha < \omega_1$ положим

$$D_\alpha = \{p \in P : \exists \beta > \alpha (p \subset U_\beta)\}.$$

Множество D_α плотно: если $p \in P$, то $p \cap V_\alpha \neq \varnothing$ в силу $(\star)$, и из того, что $V_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma > \alpha} U_\gamma$, следует, что $p \cap U_\gamma \neq \varnothing$ для некоторого $\gamma > \alpha$. Имеем $p \cap U_\gamma \in D_\alpha$ и $p \cap U_\gamma \leq p$.

Положим $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. $\neg$CH $\implies \omega_1 < 2^\omega$. MA $\implies \exists\, \mathscr{D}$-генерический фильтр F (семейство открытых подмножеств X). Семейство F центрировано, так как любые два $p, q \in F$ совместимы в F, т.е. их пересечение содержит элемент F. Положим

$$A = \{\beta < \omega_1 : \exists p \in F (p \subset U_\beta)\}.$$

F центрировано $\implies \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. F пересекает все D_α $\implies A$ неограничено в ω_1, а значит, несчётно. ■

Следствие 4 (MA + $\neg$CH). Топологическое произведение любого семейства пространств со свойством Суслина обладает свойством Суслина.

Доказательство. В силу теоремы о свойстве Суслина топологического произведения, все конечные подпроизведения которого обладают свойством Суслина, достаточно проверить, что если X и Y — два топологических пространства со свойством Суслина, то $X \times Y$ обладает свойством Суслина.

Пусть $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых множеств в $X \times Y$. Для каждого $\alpha < \omega_1$ выберем непустые открытые множества U_α в X и V_α в Y, удовлетворяющие условию $U_\alpha \times V_\alpha \subset W_\alpha$. Пользуясь теоремой, найдём несчётное $A \subset \omega_1$, для которого $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. Семейство $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ не может состоять из попарно непересекающихся множеств, так как Y обладает свойством Суслина. Пусть $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ и $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$. Поскольку $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ (в силу центрированности), имеем

$$W_\alpha \cap W_\beta \supset (U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta) \neq \varnothing.$$

■

Следствие 5 (MA + $\neg$CH). Прямых Суслина не существует.

Теорема 21. Аксиома Мартина равносильна утверждению:

> Если X — любой компакт со свойством Суслина и $\mathscr{U}$ — любое семейство всюду плотных открытых подмножеств X мощности $|\mathscr{U}| < 2^\omega$, то $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.

Теорема 22. MA $\implies$ всякое подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$, являющееся объединением $< 2^\omega$ нигде не плотных множеств, является множеством первой категории в $\mathbb{R}$.

Теорема 23. MA $\implies$ в любом компакте мощности $< 2^\omega$ всякая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Проблема Уайтхеда

Назовём *группой Уайтхеда* абелеву группу A такую, что если B — любая другая абелева группа и существует эпиморфизм $f\colon B \to A$ с ядром, изоморфным $\mathbb{Z}$, то существует гомоморфизм $h\colon A \to B$, для которого $f \circ h = \mathrm{id}_A$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Хорошо известно, что всякая свободная абелева группа является группой Уайтхеда.
Проблема Уайтхеда: верно ли обратное?

В модели Гёделя $V = L$ всякая группа Уайтхеда свободна, в MA + ¬CH существуют несвободные группы Уайтхеда (Шелах).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 7. Комбинаторные следствия аксиомы Мартина

Непротиворечивость MA и CH

Существует модель ZFC, в которой истинны MA и ¬CH. Идея построения:

Пусть M — счётная СТМ, $M \models 2^\omega = \omega_2$, и пусть $\mathbb{P}, \mathscr{D} \in M$. Будем говорить, что пара $(\mathbb{P}, \mathscr{D})$ — *контрпример для MA* в M, если

$$M \models (\mathbb{P} \text{ — ч.у.м., удовлетворяющее у.с.ц.,}$$

$$\mathscr{D} \text{ — семейство плотных подмножеств } P, |\mathscr{D}| = \omega_1$$

$$\text{и не существует } \mathscr{D}\text{-генерического фильтра в } M).$$

$M \models \mathrm{MA} \iff$ в M нет контрпримеров для MA.

Если $(\mathbb{P}, \mathscr{D}) \in M$ — контример для MA и множество G $\mathbb{P}$-генерическое, то тем более G является $\mathscr{D}$-генерическим фильтром, так что в $M[G]$ пара $(\mathbb{P}, \mathscr{D})$ уже не является контрпримером, причём поскольку $\mathbb{P}$ удовлетворяет условию счётности цепей, в M и $M[G]$ одни и те же кардиналы, так что $M[G] \models \neg\mathrm{CH}$. Многократно (бесконечное число раз) применяя генерическое расширение, можно «убить» все контрпримеры для MA. При этом приходится следить, чтобы при расширениях не появлялись новые контрпримеры.

Комбинаторные следствия аксиомы Мартина

Малые несчётные кардиналы

- Множество A *почти содержится* во множестве B, если $A \setminus B$ конечно. Обозначение: $A \subset^* B$.
- Семейство множеств $\mathscr{F}$ *центрировано* (*сильно центрировано*), если для любых $F_1, \dots, F_k \in \mathscr{F}$ пересечение $F_1 \cap \dots \cap F_k$ непусто (бесконечно).
- *Псевдопересечением* семейства множеств $\mathscr{F}$ называется бесконечное множество A такое, что $A \subset^* F$ для всех $F \in \mathscr{F}$.
- Семейство $\mathscr{S}$ подмножеств ω называется *расщепляющим*, если для любого бесконечного множества $A \subset \omega$ найдётся $S \in \mathscr{S}$ такое, что $|A \cap S| = |A \setminus S| = \omega$.
- Семейство множеств *почти дизъюнктно*, если все попарные пересечения его элементов конечны.
- Порядок $\leq^*$ на множестве ω^ω функций $\omega \to \omega$ определяется так: $f \leq^* g$, если множество $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ конечно.
- Множество $X \subset \omega^\omega$ *ограничено*, если $\exists g \in \omega^\omega \forall f \in X (f \leq^* g)$.
- Множество $X \subset \omega^\omega$ *доминирующее*, если $\forall f \in \omega^\omega \exists g \in X (f \leq^* g)$.

Определение 33. Семейство всех бесконечных подмножеств ω обозначается $[\omega]^\omega$.

- $\mathfrak{a} = \min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset [\omega]^\omega$ — максимальное бесконечное почти дизъюнктное семейство$\}$
- $\mathfrak{b} = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subset \omega^\omega$ $\leq^*$-неограничено$\}$
- $\mathfrak{d} = \min\{|\mathscr{D}| : \mathscr{D} \subset \omega^\omega$ $\leq^*$-доминирующее$\}$

- $\mathfrak{s} = \min\{|\mathscr{S}| : \mathscr{S} \subset [\omega]^\omega$ — расщепляющее семейство$\}$
- $\mathfrak{p} = \min\{|\mathscr{P}| : \mathscr{P} \subset [\omega]^\omega$ сильно центрировано, но не имеет псевдопересечения$\}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathfrak{a} & & \\ & & & \mathfrak{b} & \leqslant & \mathfrak{d} & \leq & 2^\omega \\ & & \leqslant & & \leqslant & & \\ \omega_1 & \leq & \mathfrak{p} & \leqslant & \mathfrak{s} & & \end{array}$$

Понятно, что в предположении CH все эти кардиналы совпадают и равны 2^ω.

Теорема 24 (Booth). MA $\implies \mathfrak{p} = 2^\omega$.

Доказательство. Пусть $\kappa < 2^\omega$ — бесконечный кардинал и $\mathscr{F} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset [\omega]^\omega$ — сильно центрированное семейство. Пусть $P = \{(s, E) : s \subset \omega$ конечно, $E \subset \kappa$ конечно$\}$, и пусть

$$(s, E) \leq (t, F) \iff (t \subset s) \wedge (F \subset E) \wedge (s \setminus t \subset \bigcap\{X_\alpha \in \mathscr{F} : \alpha \in F\}).$$

P удовлетворяет у.с.ц.: если $A \subset P$ несчётно, то $\exists\, s, E, F$ такие, что $(s, E), (s, F) \in A$ (так как множество конечных подмножеств ω счётно). Имеем $(s, E \cup F) \leq (s, E)$ и $(s, E \cup F) \leq (s, F)$.

Для $\alpha \in \kappa$ и $n \in \omega$ положим

$$D_{\alpha,n} = \{(s, E) \in P : \alpha \in E,\ |s| > n\}.$$

Каждое $D_{\alpha,n}$ плотно: если $(t, F) \in P$, $E = F \cup \{\alpha\}$ и s — это t плюс n точек из $\bigcap_{\alpha \in F} X_\alpha$, то $(s, E) \leq (t, F)$ и $(s, E) \in D_{\alpha,n}$. Положим

$$\mathscr{D} = \{D_{\alpha,n} : \alpha \in \kappa,\ n \in \omega\}.$$

Имеем $|\mathscr{D}| < 2^\omega$. Пусть G — $\mathscr{D}$-генерический фильтр на P и

$$X_G = \bigcup\{s \subset \omega : s \text{ конечно}, \exists E \subset \kappa \text{ такое, что } (s, E) \in G\}.$$

X_G бесконечно. G пересекает все $D_{\alpha,n} \in \mathscr{D} \implies$ для каждого $\alpha \in \kappa$ существует $(s, E) \in G$ такое, что $\alpha \in E$. Элементы G попарно совместимы $\implies$ для любого $(s', E') \in G$ существует $(s'', E'') \in X_G$ такое, что $(s'', E'') \leq (s', E')$ (так что $s'' \supset s'$) и $(s'', E'') \leq (s, E)$ (так что $X_\alpha \supset \bigcap_{\beta \in E} X_\beta \supset s'' \setminus s \supset s' \setminus s$). Значит, $X_G \setminus s \subset X_\alpha$, т.е. $X_G \subset^* X_\alpha$. ■

Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точек топологического пространства X *сходится* к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$ конечно. В случае, когда все точки x_n различны, это означает, что $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset^* U$.

Последовательность *нетривиальна*, если она содержит бесконечное число попарно различных элементов.

Даже счётное пространство может быть недискретным, но не содержать нетривиальных сходящихся последовательсностей.

Определение 34. Точка x топологического пространства X называется *точкой Фреше–Урысона*, если

$$x \text{ является точкой прикосновения множества } A \subset X \iff$$

$$\iff \text{к } x \text{ сходится некоторая последовательность точек из } A.$$

База окрестностей точки $x \in X$ — семейство $\mathscr{U}$ окрестностей x с тем свойством, что в любой окрестности x содержится $U \in \mathscr{U}$.

Ясно, что если точка x обладает счётной базой окрестностей $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, то она является точкой Фреше–Урысона: если $x \in \operatorname{cl} A$, то, выбрав точку $a_n \in A \cap U_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, мы получим последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к x.

Из теоремы Буса вытекает

Следствие 6 (MA). Если точка x в счётном топологическом пространстве X обладает базой окрестностей $\mathscr{U}$ мощности меньше 2^ω, то x является точкой Фреше–Урысона.

Доказательство. Пусть $A \subset X$ и $x \in \operatorname{cl} A$ (т.е. любая окрестность x пересекается с A). Тогда либо пересечение некоторой окрестности x с A конечно (и тогда можно выбрать тривиальную последовательность точек A, сходящуюся к x), либо пересечения $U \cap A$, $U \in \mathscr{U}$, образуют сильно центрированную систему. Точки любого её псевдопересечения составляют последовательность, сходящуюся к x. ■

Определение 35. *Фильтром* на множестве X называется семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ со свойствами

1. $\varnothing \notin \mathscr{F}$;
2. $A, B \in \mathscr{F} \implies A \cap B \in \mathscr{F}$;
3. $A \in \mathscr{F}$, $A \subset B \subset \omega \implies B \in \mathscr{F}$.

Семейство $\mathscr{F}$ — фильтр на $X \iff \mathscr{F}$ является множеством всех проколотых окрестностей точки $*$ в пространстве $X_{\mathscr{F}} = X \cup \{*\}$, в котором $*$ — единственная неизолированная точка.

Определение 36. Максимальный (по включению) фильтр называется *ультрафильтром*.

Фильтр $\mathscr{F}$ на множестве X является ультрафильтром $\iff$ для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

Замечание 8. Пространство $\omega_{\mathscr{U}}$ не содержит нетривиальных сходящихся последовательностей ни для какого ультрафильтра $\mathscr{U}$ на ω.

Действительно, нетривиальная последовательность может сходиться только к $*$. Из существования нетривиальной сходящейся последовательности вытекает существование сходящейся последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, в которой все элементы различны. $\mathscr{U}$ — ультрафильтр $\implies$ либо $U = \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$, либо $V = \omega \setminus \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$. В первом случае $U \cup \{*\}$ — окрестность, которая не содержит бесконечно много элементов последовательности (а именно, всех элементов с нечётными номерами), а во втором — $V \cup \{*\}$.

Ультрафильтр $\mathscr{U}$ называется *главным*, если $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.

На понятии ультрафильтра основана популярная модель нестандартного анализа:

Пусть $\mathscr{U}$ — любой неглавный ультрафильтр на ω. На множестве $\mathbb{R}^\omega$ последовательностей вещественных чисел введём отношение эквивалентности $\sim$:

$$(a_n)_{n\in\omega} \sim (b_n)_{n\in\omega} \iff \{n \in \omega : a_n = b_n\} \in \mathscr{U}.$$

На фактормножестве $\mathbb{R}/\sim$ возникает естественный порядок:

$$[(a_n)_{n\in\omega}]_\sim \leq [(b_n)_{n\in\omega}]_\sim \iff \{n \in \omega : a_n \leq b_n\} \in \mathscr{U}.$$

Классы постоянных последовательностей отождествляются с вещественными числами. Классы последовательностей, сходящихся к 0 (к ∞), трактуются как бесконечно малые (бесконечно большие) величины. Они отличаются по скорости сходимости.

Через $[X]^k$ обозначается k-я *симметрическая степень* множества X — семейство всех k-элементных подмножеств X.

Теорема 25 (Теорема Рамсея). Для любого бесконечного множества X и любой раскраски $\chi\colon [X]^2 \to \{0, 1\}$ существует бесконечное χ-*однородное* множество $H \subset X$, т.е. такое, что $\chi|_{[H]^2} = \text{const}$.

Доказательство. Будем считать без потери общности, что $X = \omega$. Построим три последовательности $(H_n)_{n\in\omega}$, $(c_n)_{n\in\omega}$ и $(h_n)_{n\in\omega}$ такие, что $H_{n+1} \subset H_n \subset \omega$, $c_n \in \{0,1\}$ и $h_n \in \omega$, $h_{n+1} > h_n$, для всех $n \in \omega$.

Положим $h_0 = 0$ и $H_0 = \omega$. Пусть h_n и H_n уже определены. Выберем $c_n \in \{0,1\}$, для которого множество $H_{n+1} = \{k \in H_n \setminus (h_n+1) : \chi(h_n, k) = c_n\}$ бесконечно, и положим h_{n+1} равным наименьшему элементу множества H_{n+1}.

Выберем бесконечное множество $I \subset \omega$ и число $c \in \{0,1\}$ такие, что $c_i = c$ для всех $i \in I$, и положим $H = \{h_i : i \in I\}$. Если $h_i, h_j \in H$ и $h_i < h_j$, то $h_j \in H_{i+1}$, так что $\chi(\{h_i, h_j\}) = c_i = c$. ■

Определение 37. Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на ω называется *рамсеевским*, если для любой раскраски $\chi\colon [\omega]^2 \to \{0,1\}$ существует χ-однородный элемент $\mathscr{U}$ (т.е. $U \in \mathscr{U}$, для которого $\chi|_{[U]^2} = \text{const}$).

Теорема 26. MA $\implies$ $\exists$ неглавный рамсеевский ультрафильтр на ω.

Доказательство. Число возможных раскрасок множества $[\omega]^2$ равно 2^ω. Занумеруем все раскраски: χ_α, $\alpha < 2^\omega$. Построим сильно центрированное семейство χ_α-однородных множеств H_α. Положим H_0 равным любому бесконечному χ_0-однородному множеству. Пусть $\beta < 2^\omega$ и все H_α, $\alpha < \beta$, построены. Поскольку $\mathfrak{p} = 2^\omega$, существует бесконечное псевдопересечение $H \subset \omega$ построенных множеств: $H \subset^* H_\alpha$ для всех $\alpha < \beta$. Полагаем H_β равным любому бесконечному χ_β-однородному подмножеству множества H.

Ясно, что семейство $\mathscr{H} = \{H_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ центрировано. По лемме Цорна существует максимальное центрированное семейство $\mathscr{U} \supset \mathscr{H}$. Это рамсеевский ультрафильтр. ■

Из доказанной теоремы следует, что отрицание аксиомы Мартина совместимо с ZFC, поскольку существуют модели, в которых нет рамсеевских ультрафильтров на ω.

Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на ω рамсеевский

$\Updownarrow$

$\mathscr{U}$ *селективный*, т.е. если $\omega = \bigsqcup_{n\in\omega} A_n$, $A_n \notin \mathscr{U}$, то $\exists U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \le 1$ для всякого $n \in \omega$

$\Updownarrow$

если $(U_n)_{n\in\omega}$ — последовательность элементов $\mathscr{U}$, то в каждом U_n можно выбрать по точке u_n так, что $\{u_n : n \in \omega\} \in \mathscr{U}$

$\Updownarrow$

для любой функции $f\colon \omega \to \omega$ существует либо элемент $U \in \mathscr{U}$, на котором f постоянна, либо элемент $U \in \mathscr{U}$, на котором f взаимно однозначна

Теорема 27 (Solovay). Пусть $\kappa \le 2^\omega$ — бесконечный кардинал, $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset [\omega]^\omega$, $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}| = \kappa$ и пересечение $A \cap B$ любых множеств $A \in \mathscr{A}$ и $B \in \mathscr{B}$ конечно.

MA $\implies$ существует множество $C \subset \omega$ такое, что для каждого $A \in \mathscr{A}$ $C \cap A$ конечно и для каждого $B \in \mathscr{B}$ $C \cap B$ бесконечно.

Доказательство. Пусть $P = \{(s, E) : s \subset \omega$ бесконечно, $E \subset \mathscr{A}$ конечно$\}$ с порядком

$$(s, E) \le (t, F) \iff (t \subset s) \wedge (F \subset E) \wedge ((s \setminus t) \cap \bigcap F = \varnothing);$$

у.с.ц. выполнено. Для $X \in \mathscr{A}$ положим $D_X = \{(s, E) \in P : X \in E\}$. Это множество плотно в P. Для $X \in \mathscr{B}$ и $k \in \mathbb{N}$ положим $D_{X,k} = \{(s, E) \in P : |s \cap X| \ge k\}$. Это множество тоже плотно в P. Пусть

$$\mathscr{D} = \{D_X : X \in \mathscr{A}\} \cup \{D_{X,k} : X \in \mathscr{B},\ k \in \omega\},$$

и пусть G — $\mathscr{D}$-генерический фильтр. Тогда

$$C = \bigcup\{s \subset \omega : s \text{ конечно}, \exists \text{ конечное } E \subset \mathscr{A} \text{ такое, что } (s, E) \in G\},$$

обладает нужными свойствами. ■

Теорема 28. MA $\implies$ $2^\kappa = 2^\omega$ для любого бесконечного кардинала $\kappa < 2^\omega$.

Доказательство. Зафиксируем почти дизъюнктное семейство $\mathscr{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset [\omega]^\omega$. Его можно построить так. Перенумеруем все рациональные числа: $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$. Зафиксируем в $\mathbb{R}$ множество S мощности κ и перенумеруем его элементы тоже: $S = \{s_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Для каждого $\alpha \in \kappa$ выберем последовательность рациональных чисел, сходящуюся к s_α, и возьмём в качестве A_α множество номеров рациональных чисел, попавших в эту последовательность.

Для каждого $X \in \mathscr{P}(\kappa)$ положим

$$\mathscr{A}_X = \{A_\alpha : \alpha \notin X\} \qquad \text{и} \qquad \mathscr{B}_X = \{A_\alpha : \alpha \in X\}.$$

Пользуясь теоремой Соловея, найдём $C_X \subset \omega$, для которого $|C_X \cap A_\alpha| = \omega \iff \alpha \in X$. Ясно, что $C_X \neq C_Y$ для $X \neq Y$. Значит, отображение $\mathscr{P}(\kappa) \to \mathscr{P}(\omega)$, определённое правилом $X \mapsto C_X$, инъективно, так что $2^\kappa \leq 2^\omega$. Обратное неравенство очевидно. ■

Гипотеза Лузина (LH)

$2^\omega = 2^{\omega_1}$

Из доказанной теоремы следует, что MA + ¬CH $\implies$ LH.

Отрицание гипотезы Лузина ($2^\omega < 2^{\omega_1}$) равносильно каждому из утверждений:

- Любой компакт мощности $\leq 2^\omega$ содержит всюду плотное подпространство с первой аксиомой счётности (т.е. такое, что каждая его точка имеет счётную базу окрестностей).
- Любой компакт мощности $\leq 2^\omega$, являющийся непрерывным образом обобщённого канторова дисконтинуума $\{0,1\}^\kappa$ (где κ — любой кардинал), метризуем.
- Во всяком сепарабельном нормальном пространстве любое несчётное множество имеет предельную точку.

Лузинские множества

Гипотеза Бореля

Множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет *строгую меру 0*, если для любой последовательности $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ положительных чисел существует последовательность $(I_n)_{n\in\omega}$ интервалов такая, что $|I_n| < \varepsilon_n$ для каждого n и $\bigcup\limits_{n\in\omega} I_n \supset X$.

Гипотеза Бореля состоит в том, что все множества строгой меры 0 счётны.

Подмножество Y топологического пространства X *нигде не плотно*, если всякое непустое открытое множество $U \subset X$ содержит непустое открытое подмножество, не пересекающее Y. Другими словами, Y нигде не плотно, если $X \setminus Y$ содержит открытое всюду плотное множество.

Определение 38. Подмножество вещественной прямой называется *лузинским множеством*, если его пересечение с каждым нигде не плотным множеством не более чем счётно.

Каждое лузинское множество имеет строгую меру 0.

В 1914 г. Лузин построил несчётное лузинское множество в предположении CH. (Следовательно, если выполняется CH, то гипотеза Бореля неверна.)

В предположении MA + ¬CH не существует лузинских множеств, так как в этом случае всякое подмножество прямой мощности $< 2^{\omega}$ имеет первую категорию. (Однако MA + ¬CH $\Longrightarrow$ всякое множество мощности меньше 2^{ω} имеет строгую меру 0, так что гипотеза Бореля всё равно неверна.)

В 1976 г. Лэйвер построил модель ZFC, в которой всякое множество строгой меры 0 счётно. Таким образом, истинность гипотезы Бореля не зависит от аксиом ZFC.

Лекция 8. Существование несчётных лузинских множеств и несчётных множеств внешней меры нуль

Свойства форсинга Коэна

Существование лузинских множеств в предположении ¬CH

Напомним, что для ординала α *α-коэновское частично упорядоченное множество* — это множество $\mathbb{P}_\alpha = (P_\alpha, \leq, \mathbf{1})$, где

$$P_\alpha = \{p \subset (\alpha \times \omega) \times \{0,1\} : p \text{ — конечная функция}\},$$

упорядоченное обратно включению.

Если M — СТМ и $G \subset P_\alpha$ — генерическое множество, то $g = \bigcup G$ — функция $\alpha \times \omega \to \{0,1\}$ в $M[G]$, которая определяет α новых множеств $S_\beta \subset \omega$ и функций $\chi_\beta = \chi(S_\beta)\colon \omega \to \{0,1\}$ в $M[G]$: для $\beta < \alpha$

$$S_\beta = \{n \in \omega : g(\beta, n) = 1\}, \qquad \chi_\beta(n) = g(\beta, n).$$

Определение 39. Условие $p \in \mathbb{P}_\alpha$ называется *минимально вынуждающим* утверждение φ, если $p \Vdash \varphi$ и никакое $q > p$ не вынуждает φ.

Предложение 10. Для любого утверждения множество минимально вынуждающих его условий не более чем счётно.

Доказательство. Пусть множество M условий, минимально вынуждающих некоторое утверждение φ, несчётно. Лемма о Δ-системе $\implies$ $\exists$ несчётное $M' \subset M$ и конечная частичная функция R из $\alpha \times \omega$ в $\{0,1\}$ такие, что для любых различных $p, q \in M'$ $p \cap q = R$, т.е. $\operatorname{dom} R \subset \operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q$, $p\big((\alpha, n)\big) = q\big((\alpha, n)\big) = R\big((\alpha, n)\big)$ для $(\alpha, n) \in R$ и $p\big((\alpha, n)\big) \neq q\big((\alpha, n)\big)$ для $(\alpha, n) \in \operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q \setminus \operatorname{dom} R$. Имеем $R > p\ \forall p \in M' \setminus \{R\}$. Значит, $R \nVdash \varphi$; $\implies$ $\exists r \leq R$ такое, что $r \Vdash \neg\varphi$ (см. следствие из основной теоремы форсинга, 1). Условие r несовместимо со всеми $p \in M'$ $\implies$ $\forall p \in M'\ \exists (\beta(p), n(p)) \in \operatorname{dom} p$, для которых $(\beta(p), n(p)) \in \operatorname{dom} r$ и $p(\beta(p), n(p)) \neq r(\beta(p), n(p))$. $\operatorname{dom} r$ конечна $\implies$ $\exists\ s, t \in M'$, $s \neq t$, такие, что $(\beta(s), n(s)) = (\beta(t), n(t))$. Пусть для определённости $r(\beta(s), n(s)) = 0$. Тогда $\big((\beta(s), n(s)), 1\big) \in s \cap t = R$ в противоречие с тем, что $\big((\beta(s), n(s)), 0\big) \in r$ и $r \leq R$. ■

Канторово множество

Канторово множество, или *канторов дисконтинуум*, C — это подмножество отрезка $[0,1]$, которое строится по индукции так:

Мы полагаем $C_0 = [0,1]$ и на первом шаге удаляем из отрезка $[0,1]$ среднюю треть, т.е. интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Оставшееся множество (обозначим его C_1) замкнуто и состоит из двух отрезков: $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Из каждого из этих отрезков удалим среднюю треть. Оставшееся множество C_2 замкнуто и состоит уже из четырёх отрезков: $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность замкнутых множеств $C_n \subset [0,1]$, причём для каждого n множество C_n является объединением 2^n отрезков и C_{n+1} получается из C_n удалением средних третей (без концов) из всех отрезков в этом объединении. Семейство $\{C_n : n \in \omega\}$ представляет собой центрированное семейство замкнутых подмножеств компакта $[0,1]$, поэтому оно имеет непустое пересечение. Это пересечение и есть канторово множество: $C = \bigcap_{n \in \omega} C_n$. Оно компактно, будучи замкнутым подмножеством компакта $[0,1]$.

Канторов дисконтинуум — классический пример совершенного (т.е. замкнутого и не содержащего изолированных точек) нигде не плотного подмножества прямой. Он гомеоморфен счётной топологической степени $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ двухточечного дискретного пространства $\{0,1\}$: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\varphi \subset^{\mathbb{N}} \times \{0,1\} : \varphi \text{ — функция}\} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}(x_n \in \{0,1\})\}$.

Топология: всякая окрестность любой функции $\varphi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ содержит каноническую окрестность вида

$$U_n(\varphi) = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : f(k) = \varphi(k)\, \forall k \le n\}.$$

Множество открыто $\iff$ оно является объединением некоторых (канонических) окрестностей своих точек.

Каждое число $x \in C$ допускает троичную запись, не содержащую 1, причём именно такая троичная запись у каждого $x \in C$ единственна. Значит, отображение $f\colon C \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, определённое правилом $f(x) = \big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ для $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^n}$, инъективно (и сюръективно). Легко проверить, что оно непрерывно. Поскольку C — компакт, это гомеоморфизм.

Для конечной частичной функции ψ из ω в $\{0,1\}$ положим

$$V(\psi) = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : f \supset \psi\},$$

т.е.

$$V(\psi) = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : f|_{\operatorname{dom}\psi} = \psi\}.$$

Ясно, что если при этом $\operatorname{dom}\psi = \{1,\dots,n\}$, то для любой функции $\varphi\colon \omega \to \{0,1\}$, совпадающей с ψ на $\{1,\dots,n\}$, имеем $U_n(\varphi) = V(\psi)$.

Таким образом, множество открыто в $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\iff$ оно является объединением некоторого (произвольного) семейства множеств вида $V(\psi)$ для некоторых конечных функций ψ из ω в $\{0,1\}$, т.е. множества вида $V(\psi)$ образуют базу топологии пространства $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Их счётное число.

Теорема 29. Пусть M — СТМ, κ — несчётный кардинал в M и $G \subset P_\kappa$ — генерическое множество. Тогда в модели $M[G]$ пересечение множества $X = \{\chi_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \{0,1\}^\omega$ с любым нигде не плотным подмножеством компакта $C = \{0,1\}^\omega$ не более чем счётно.

Доказательство. Рассуждаем в $M[G]$. Пусть $U \subset C$ открыто и плотно. Тогда U есть объединение счётного семейства подмножеств компакта C, каждое из которых определяется конечной частичной функцией φ_n из ω в $\{0,1\}$:

$$U = \bigcup_{n\in\omega} V(\varphi_n), \qquad \text{где} \quad V(\varphi) = \{f \in \{0,1\}^\omega : f \supset \varphi\}$$

(см. описание топологии $\{0,1\}\mathbb{N} = \{0,1\}^\omega$ перед теоремой). Нам надо доказать, что $\chi_\beta \in U$ для всех, кроме счётного числа, ординалов $\beta \in \kappa$.

Пусть Ω — имя, для которого $U = \Omega_G$, и условие $p \in G$ вынуждает всё сказанное об Ω.

По доказанному предложению для каждой конечной частичной функции $\varphi \in \Phi$ множество M_φ всех условий $p \in P_\kappa$, минимально вынуждающих утверждение «$V(\varphi) \subset \Omega$», не более чем счётно (возможно, пусто). Значит, счётно и множество

$$M = \bigcup\{M_\varphi : \varphi \text{ — конечная функция из } \omega \text{ в } \{0,1\}\}.$$

Рассмотрим

$$\operatorname{Ord}(U) = \{\alpha \in \kappa : (\exists p \in M)(\exists n \in \omega)(\alpha, n) \in \operatorname{dom} p\}.$$

Это счётное множество ординалов. Покажем, что $\chi_\beta \in U$ для $\beta \in \kappa \setminus \operatorname{Ord}(U)$.

Пусть $\beta \in \kappa \setminus \operatorname{Ord}(U)$. Для каждого $q \in P_\kappa$ обозначим через q_β конечную функцию $\omega \to \{0,1\}$ с областью определения $\operatorname{dom} q_\beta = \{n \in \omega : (\beta, n) \in q\}$, определённую правилом $q_\beta(n) = q(\beta, n)$ для $n \in \operatorname{dom} q_\beta$. Без ограничения общности будем считать, что $p_\beta \neq \varnothing$ (иначе заметим, что множество D функций $f \in P_\kappa$, для которых $f_\beta \neq \varnothing$, плотно в P_κ и возьмём вместо p условие $p' \in G \cap D$, $p' \le p$).

Пусть $p \in P_\kappa$, $p' \le p$ (т.е. $p' \supset p$, другими словами, p' продолжает p, откуда $p'_\beta \neq \varnothing$). Поскольку $p' \le p$, условие p' вынуждает всё то, что вынуждает p, в частности, что Ω плотно и открыто в $\{0,1\}^\omega$, а значит, что $\Omega \cap V(p'_\beta)$ непусто и открыто в $\{0,1\}^\omega$, т.е. оно вынуждает существование конечной функции φ из ω в $\{0,1\}$, продолжающей p'_β, для которой $V(\varphi) \subset \Omega$.

В силу следствия из основной теоремы форсинга, пункт 4, существуют конечная функция φ из ω в $\{0,1\}$, продолжающая p'_β, и условие $q \leq p'$ такие, что $q \Vdash (V(\varphi) \subset \Omega)$.

Определим $r \in P_\kappa$ условиями:

- $\operatorname{dom} r = \operatorname{dom} q \cup \{\beta\} \times \operatorname{dom} \varphi$;
- $r(\alpha, n) = q(\alpha, n)$ для всех $(\alpha, n) \in \operatorname{dom} q$, $\alpha \neq \beta$;
- $r(\beta, n) = \varphi(n)$ для всех $n \in \operatorname{dom} \varphi$.

Имеем $r \leq p'$, потому что $r \cap \{\alpha\} \times \omega = q \cap \{\alpha\} \times \omega \supset p' \cap \{\alpha\} \times \omega$ для $\alpha \neq \beta$ и $r_\beta = \varphi \supset p'_\beta$. ■

Кроме того, $r \Vdash (V(\varphi) \subset \Omega)$. Действительно, $q \Vdash (V(\varphi) \subset \Omega)$, а значит, $q \leq t$ для некоторого условия t, минимально вынуждающего утверждение «$V(\varphi) \subset \Omega$». По определению множества M имеем $t \subset (\operatorname{Ord} M \times \omega) \times \{0,1\}$. С другой стороны, $r \cap (\operatorname{Ord} M \times \omega) \times \{0,1\} = q \cap (\operatorname{Ord} M \times \omega) \times \{0,1\} \leq t \cap (\operatorname{Ord} M \times \omega) \times \{0,1\} = t$, так что $r \leq t$, а значит, условие r вынуждает всё то, что вынуждает t.

Вспомним, что $\chi_\beta(n) = g(\beta, n)$ для $n \in \omega$. Пусть τ — имя χ_β. Если G' — любое генерическое множество и $r \in G'$, то $r \subset g$. Значит, в этом случае $g(\beta, n) = \varphi(n)$ для всех $n \in \operatorname{dom} \varphi$, так что $\chi_\beta \in V(\varphi) \subset U$ в $M[G']$. Это означает, что $r \Vdash (\chi_\beta \in \Omega)$.

Мы показали, что для любого условия $p' \leq p$ существует условие $r \leq p'$, вынуждающее утверждение «$\tau \in \Omega$», т.е. множество $E = \{r \in P_\kappa : r \Vdash (\tau \in \Omega)\}$ плотно ниже p (это множество принадлежит исходной модели M, поскольку отношение $\Vdash$ определимо в M по основной теореме форсинга). В силу леммы (1) в начале раздела «Вынуждение» $E \cap G \neq \varnothing$. Значит, некоторое условие $s \in G$ вынуждает утверждение «$\tau \in \Omega$», так что в модели $M[G]$ имеем $\tau_G \in \Omega_G$, т.е. $\chi_\beta \in U$.

Следствие 7. Пусть M — СТМ, κ — несчётный кардинал в M и $G \subset P_\kappa$ — генерическое множество. Тогда в модели $M[G]$ существует лузинское множество мощности κ в отрезке $[0,1]$ и на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение $f\colon C = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, которое каждой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нулей и единиц ставит в соответствие число, имеющее двоичную запись $0, x_1x_2x_3\ldots$, т.е. действует по правилу

$$f\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot 2^{-(n+1)}$$

(«склеивает» концы интервалов, выкинутых при построении C).

Пусть X — лузинское множество в C, $Y = f(X)$ и $N \subset [0,1]$ — нигде не плотное множество в $[0,1]$. Тогда $f^{-1}(N)$ нигде не плотно в C (это легко увидеть, заметив, что $f^{-1}(\operatorname{cl} N)$ замкнуто и не может содержать непустых открытых множеств). Поскольку $X \cap f^{-1}(N)$ счётно, $Y \cap N$ тоже счётно.

Утверждение об $\mathbb{R}$ вытекает из того, что $\mathbb{R} \cong (0,1) \subset [0,1]$. ■

Следствие 8. Пусть M — СТМ, κ — несчётный кардинал в M и $G \subset P_\kappa$ — генерическое множество. Тогда в модели $M[G]$

- любой компакт без изоливанных точек содержит лузинское подмножество мощности κ;
- никакой компакт без изолированных точек не является объединением $< \kappa$ нигде не плотных подмножеств, и любой такой компакт содержит множества второй категории любой несчётной мощности $\leq 2^\omega$.

Следствие 9. С аксиомами ZFC совместимо существование в любом компакте без изолированных точек лузинских подмножеств мощности 2^ω, и при этом 2^ω может быть алефом с любым номером.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 9. Принцип Йенсена

Принцип Йенсена

Определение 40. Пусть κ — кардинал. Множество $X \subset \kappa$ *стационарно*, если оно пересекается с каждым замкнутым (в порядковой = интервальной топологии) неограниченным множеством $A \subset \kappa$.

Для $\kappa = \omega_1$ неограниченность = несчётность.

Теорема 30 (Принцип Йенсена ($\diamondsuit$)). Существуют множества $A_\alpha \subset \alpha$, $\alpha < \omega_1$, такие, что

$$\forall A \subset \omega_1 \text{ множество } \{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\} \text{ стационарно.}$$

Последовательность $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ называется $\diamondsuit$-*последовательностью*.

$\diamondsuit \implies$ CH: если $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ — $\diamondsuit$-последовательность, то $\forall A \subset \omega\, \exists \alpha > \omega (A = A_\alpha)$, откуда $\{A_\alpha : A_\alpha \subset \omega\} = \mathscr{P}(\omega)$.

Из $\diamondsuit$ следует также существование прямой Суслина.

Теорема 31. Пусть M — СТМ,

$$P = \{f \subset \omega_1 \times \{0,1\} : f \text{ — функция, } |f| \le \omega\}^M$$

с порядком, обратным включению, и G — генерическое множество. Тогда $\mathscr{P}(\omega)^{M[G]} = \mathscr{P}(\omega)^M$, $\omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$ и $M[G] \models \diamondsuit$.

Доказательство. Первые два утверждения немедленно вытекают из второй теоремы о сохранении кардиналов и того, что $\mathbb{P}$ ω-замкнуто.

Для доказательства утверждения $M[G] \models \diamondsuit$ вместо ч.у.м. $\mathbb{P}$ мы будем использовать ч.у.м. $\mathbb{Q}$, которое порядково изморфно множеству $\mathbb{P}$ в модели M. Так можно: если $i\colon \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ — изоморфизм (и $i \in M$), то G является $\mathbb{Q}$-генерическим множеством $\iff$ $i^{-1}(G)$ является $\mathbb{P}$-генерическим множеством. Наименьшая модель, содержащая M и G (т.е. $M[G]$), содержит также и изоморфизм i, а значит, и $i^{-1}(G)$, и обратно, наименьшая модель, содержащая M и $i^{-1}(G)$, обязана содержать G.

Положим

$$I = \{(\alpha, \xi) : \xi < \alpha < \omega_1\}, \quad Q = \{f \subset I \times \{0,1\} : \ f \text{ — функция, } |f| \le \omega\}.$$

Как обычно, упорядочим Q обратно включению.

Пусть $A\colon I \to \{0,1\}$. Для $\alpha < \omega_1$ пусть $A_\alpha(\xi) = A(\alpha, \xi)$, $\xi < \alpha$. Если G — $\mathbb{Q}$-генерическое множество, то $g = \bigcup G$ — функция из I в $\{0,1\}$. Мы покажем, что в модели $M[G]$ $(g_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ — $\diamondsuit$-последовательность в ω_1 (мы отождествляем подмножества ω_1 и их характеристические функции). Другими словами, мы покажем, что если $A \in M[G]$ и $A\colon \omega_1 \to \{0,1\}$, то множество $\{\alpha \in \omega_1 : A|_\alpha = g_\alpha\}$ стационарно в $M[G]$.

Предположим, что это не так. Тогда найдутся имя τ (для множества A), имя σ (для замкнутого неограниченного множества) и условие $p \in G$ такие, что

$$p \Vdash \big((\tau \subset \omega_1) \wedge (\sigma \subset \omega_1) \wedge (\sigma \text{ замкнуто и неограничено}) \wedge \forall \alpha \in \sigma (\tau|_\alpha \neq (\textstyle\bigcup \Gamma)|_\alpha)\big)$$

(напомним, что $\Gamma = \{(q, q) : q \in Q\}$ — имя для любого генерического множества в $\mathbb{Q}$).

Рассуждаем в M. Для каждого $q \in \mathbb{Q}$ обозначим через $\operatorname{supt}(q)$ наименьший $\beta \in \omega_1$, для которого $\operatorname{dom} q \subset \{(\alpha, \xi) : \xi < \alpha < \beta\}$. Определим по индукции p_n, β_n, δ_n и a_n, $n \in \omega$, так, что

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1. $p_0 = p$; 2. $\beta_n = \mathrm{supt}(p_n)$; 3. $\delta_n > \beta_n$;
4. $p_{n+1} \le p_n$; 5. $p_{n+1} \Vdash \delta_n \in \sigma$; 6. $\mathrm{supt}(p_{n+1}) = \beta_{n+1} > \delta_n$;
7. $a_n \colon \beta_n \to \{0,1\}$ и $p_{n+1} \Vdash (\tau|_{\beta_n} = a_n)$.

Пусть p_n и β_n уже построены. Поскольку $p_n \le p$ и $p_n \Vdash (\sigma$ неограничено),

$$p_n \Vdash \exists x \in \omega_1 (x > \beta_n \wedge x \in \sigma)).$$

Значит, существуют $q \le p_n$ и $\delta_n < \omega_1$, для которых

$$q \Vdash (\delta_n > \beta_n \wedge \delta_n \in \sigma),$$

т.е. $\delta_n > \beta_n$ и $q \Vdash (\delta_n \in \sigma)$. Пусть r — любое условие такое, что $r \le q$ и $\mathrm{supt}(r) > \delta_n$. Чтобы обеспечить выполнение 7, положим $F = \{0,1\}^{\beta_n}$. Тогда $r \Vdash \tau|_{\beta_n} \in F$ (потому что генерическое расширение с помощью G не добавляет новых функций $\beta_n \to \{0,1\}$, поскольку $\mathbb{Q}$ ω-замкнуто). Значит, существуют $a_n \in F$ и $p_{n+1} \le r$ такие, что $p_{n+1} \Vdash (\tau|_{\beta_n} = a_n)$.

Итак, не покидая M, мы построили $\beta_0 < \delta_0 < \beta_1 < \delta_1 < \dots$. Положим

$$\gamma = \sup\{\beta_n : n \in \omega\} = \sup\{\delta_n : n \in \omega\} \quad \text{и} \quad p_\omega = \bigcup_{n\in\omega} p_n.$$

Имеем $p_\omega \in Q$ и $\mathrm{supt}(p_\omega) = \gamma$. Из того, что $p_\omega \le p_{n+1}$, следует, что $p_\omega \Vdash (\tau|_{\beta_n} = a_n)$ для $n \in \omega$. Таким образом, все функции a_n согласованы, $a_\omega = \bigcup_{n\in\omega} a_n$ — функция $\gamma \to \{0,1\}$ и $p_\omega \Vdash (\tau|_\gamma = a_\omega)$.

Ни одна пара вида (γ, ξ) не принадлежит $\mathrm{dom}\, p_\omega$. Значит, p_ω можно продолжить до функции $s \colon I \to \{0,1\}$ такой, что

$$s(\gamma, \xi) = a_\omega(\xi) \qquad \text{для всех} \quad \xi < \gamma.$$

Имеем $s \Vdash \big((\bigcup \Gamma)_\gamma = a_\omega\big)$, так что $s \Vdash \big(\tau|_\gamma = (\bigcup\Gamma)_\gamma\big)$. Кроме того, $s \Vdash (\gamma \in \sigma)$, потому что $s \Vdash (\sigma$ замкнуто) и $s \Vdash (\delta_n \in \sigma)$ для всех $n \in \omega$. Значит,

$$s \Vdash \big(\exists x \in \sigma (\tau|_x = (\bigcup\Gamma)_x\big).$$

Это противоречит неравенству $s \le p$. ■

Деревья

Определение 41. *Дерево* — это частично упорядоченное множество $(T, \le)$ такое, что для каждого $x \in T$ множество $\{y \in T : y < x\}$ вполне упорядочено.

Для $x \in T$ порядковый тип множества $\{y \in T : y < x\}$ называется *высотой* элемента x в T и обозначается $\mathrm{ht(x, T)}$.

Для ординала α множество $\{x \in T : \mathrm{ht(x, T)} = \alpha\}$ называется *α-м уровнем* дерева T и обозначается $\mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})$.

Высота $\mathrm{ht(T)}$ дерева T — это наименьший ординал α, для которого $\mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T}) = \varnothing$. Он равен $\sup\{\mathrm{ht(x, T)} + 1 : \mathrm{x} \in \mathrm{T}\}$.

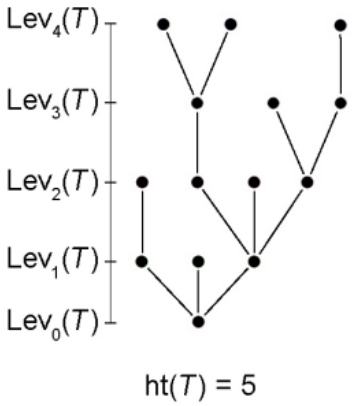
Поддерево T' дерева T — это множество $T' \subset T$ с индуцированным порядком, удовлетворяющее условию

$$(\forall x \in T')(\forall y \in T)\big((y < x) \to (y \in T')\big).$$

Если T' — поддерево дерева T, то $\mathrm{ht(x, T')} = \mathrm{ht(x, T)}$ для всякого $x \in T'$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU



Определение 42. *Цепью* в дереве T называется любое линейно упорядоченное множество $C \subset T$. Максимальные цепи называются *ветвями*, а максимальные элементы — *листьями*.

Антицепь в T — это множество $A \subset T$ такое, что

$$\forall x, y \in A\big((x \neq y) \to ((x \not\leq y) \wedge (y \not\leq x))\big).$$

Пусть α — предельный ординал (т.е. $\alpha \neq \beta + 1$). Его *конфинальность* $\mathrm{cf}(\alpha)$ — это наименьший ординал β, для которого существует функция $f\colon \beta \to \alpha$ со свойством $\alpha = \sup\limits_{\gamma<\beta} f(\gamma)$, т.е. наименьший β такой, что α является объединением β ординалов, строго меньших ординала α.

Кардинал κ называется *регулярным*, если $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

Определение 43. Для регулярного кардинала κ *κ-деревом* называется любое дерево высоты κ, в котором все уровни имеют мощность $< \kappa$.

Определение 44. Для бесконечного кардинала κ *κ-деревом Суслина* называется дерево мощности κ, в котором все цепи и антицепи имеют мощность $< \kappa$.

Для регулярного кардинала κ каждое κ-дерево Сулина T является κ-деревом. Действительно, $\mathrm{Lev}_\kappa(\mathrm{T}) = \varnothing$, так как если $x \in \mathrm{Lev}_\kappa(\mathrm{T})$, то $\{y : y < x\}$ — цепь мощности κ. Значит, $\mathrm{ht}(\mathrm{T}) \leq \kappa$. Все уровни — антицепи $\implies$ их мощности $< \kappa$. $|T| = \kappa$, $T = \bigcup\{\mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T}) : \alpha < \mathrm{ht}(\mathrm{T})\}$ и κ регулярен $\implies \mathrm{ht}(\mathrm{T}) = \kappa$.

Теорема 32. Существование прямой Суслина равносильно существованию ω_1-дерева Суслина.

Схема доказательства. Пусть T — дерево Суслина. Положим

$$L = \{C \subset T : C \text{ — максимальная цепь}\}.$$

Подправив T (если нужно), можно считать, что максимальные цепи не содержат наибольших элементов. Тогда для каждого $C \in L$ существует ординал $h(C)$ такой, что C содержит (ровно один) элемент каждого α-уровня для $\alpha < h(C)$ и ни одного элемента α-уровней для $\alpha \geq h(C)$. T — дерево Суслина $\implies h(C) < \omega_1$. Для $\alpha < h(C)$ пусть $\alpha(C)$ — единственный элемент в $C \cap \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})$.

Упорядочим L. Зафиксируем любой линейный порядок $\preccurlyeq$ на T. Для $C, D \in L$, $C \neq D$, положим $d(C, D) = \min\{\alpha : C(\alpha) \neq D(\alpha)\}$. Имеем $d(C, D) \leq \min\{h(C), h(D)\}$. Положим $C \leq D$, если $C(d(C, D)) \preccurlyeq D(d(C, D))$.

$(L, \leq)$ — прямая Суслина.

L обладает свойством Суслина:

Пусть $\{(C_\xi, D_\xi) : \xi < \omega_1\}$ — семейство непустых попарно непересекающихся интервалов.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Для каждого $\xi < \omega_1$ возьмём $E_\xi \in (C_\xi, D_\xi)$ и выберем α_ξ так, что

$$\max\{d(C_\xi, E_\xi), d(E_\xi, D_\xi)\} < \alpha_\xi < h(E_\xi).$$

$\{E_\xi(\alpha_\xi) : \xi < \omega_1\}$ — несчётная антицепь в T. Противоречие.

Пространство L не сепарабельно:

Достаточно проверить, что для каждого $\gamma < \omega_1$ множество $\{C : h(C) < \gamma\}$ не плотно в L. Подправив T при необходимости, можно считать, что для каждого $t \in T$ множество $\{s \in T : s > t\}$ пересекает все уровни над t. Выберем $x \in \mathrm{Lev}_\gamma(\mathrm{T})$. Множество $\{y \in T : y > x\}$ пересекает все уровни над x и не может быть цепью $\Longrightarrow$ $\exists \delta > \gamma$ такое, что $\mathrm{Lev}_\delta(\mathrm{T})$ содержит разные $y', y'' > x$. Повторив то же рассуждение для y', найдём $\alpha > \delta$ и $y, z \in \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})$ такие, что $y \neq z$ и $y, z > y'$. Возьмём $w \in \mathrm{Lev}_\alpha$, $w > y''$. Ясно, что $w \neq y$ и $w \neq z$. Пусть $D, E, F \in L$, $y \in D$, $z \in E$ и $w \in F$. Предположим для определённости, что $D \leq E \leq F$. Тогда интервал (D, F) непуст , но $x \in D \cap F \Longrightarrow (D, F)$ не содержит элементов $C \in L$, для которых $h(C) < \gamma$.

Обратно, пусть $(L, \leq)$ — прямая Суслина. В разделе о гипотезе Суслина было доказано, что если существует какая-то прямая Суслина, то существует и прямая Суслина, в которой нет непустых сепарабельных открытых множеств. Будем считать, что $(L, \leq)$ такова.

Пусть $(\mathscr{I}, \leq)$ — семейство непустых открытых интервалов в L, упорядоченное обратно включению. По трансфинитной индукции для каждого $\alpha < \omega_1$ построим подсемейство $\mathscr{I}_\alpha \subset \mathscr{I}$ со свойствами

1. элементы $\mathscr{I}_\alpha$ попарно дизъюнктны,
2. $\bigcup \mathscr{I}_\alpha$ плотно в L,
3. если $\beta < \alpha$, $I \in \mathscr{I}_\beta$ и $J \in \mathscr{I}_\alpha$, то либо (а) $I \cap J = \varnothing$, либо (б) $J \subset I$ и $I \backslash \mathrm{cl}\, J \neq \varnothing$ (черта сверху — замыкание).

После этого положим $T = \bigcup \mathscr{I}_\alpha$. В силу 1–3 T — дерево и $\mathscr{I}_\alpha = \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})$ для $\alpha < \omega_1$. Если $A \subset T$ — антицепь, то интервалы-элементы A попарно дизъюнктны, так что $|A| \leq \omega$. Если бы T содержало несчётную цепь $\{I_\xi : \xi < \omega_1\}$ (упорядоченную так, что $I_\xi \leq I_\zeta$ для $\xi < \zeta$) , то в силу 3(б) мы бы имели $I_\xi \backslash \mathrm{cl}\, I_\zeta \neq \varnothing$ для $\xi < \zeta$, так что семейство $\{I_\xi \backslash \mathrm{cl}\, I_{\xi+1} : \xi < \omega_1\}$ противоречило бы свойству Суслина L. Наконец, $|T| = \omega_1$, так как $\mathscr{I}_\alpha \neq \varnothing$ для $\alpha < \omega_1$ в силу 2. ■

Построение дерева Суслина в предположении $\diamondsuit$

Скажем, что дерево $(T, \leq)$ *всегда ветвится*, если $\forall x \in T$ множество $\{y \in T : y > x\}$ не линейно упорядочено.

Лемма 7. Всякое всегда ветвящееся дерево, в котором все максимальные антицепи счётны, является деревом Суслина.

Доказательство. Пусть T — всегда ветвящееся дерево. По лемме Цорна любая антицепь содержится в максимальной $\Longrightarrow$ все антицепи счётны. Пусть C — максимальная несчётная цепь. Тогда C пересекает все уровни (поскольку вместе с каждым элементом содержит всех его предшественников). T всегда ветвится $\Longrightarrow$ $\forall x \in T$ $\exists f(x) > x$ такое, что $f(x) \notin C$. Выберем по индукции $x_\alpha \in C$ для $\alpha < \omega_1$ так, что $\mathrm{ht}(\mathrm{x}_\alpha, \mathrm{T}) > \sup\{\mathrm{ht}(\mathrm{f}(\mathrm{x}_\beta), \mathrm{T}) : \beta < \alpha\}$. Получим несчётную антицепь $\{f(x_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$. Противоречие $\Longrightarrow$ все максимальные цепи счётны $\Longrightarrow$ все цепи счётны. ■

Будем строить дерево Суслина вида $T = (\omega_1, \lhd)$, где $\lhd$ — специальный порядок.

Для дерева T и ординала α положим $T_\alpha = \bigcup\{\mathrm{Lev}_\beta(\mathrm{T}) : \beta < \alpha\}$ (это поддерево).

Лемма 8. Пусть $T = (\omega_1, \lhd)$ — ω_1-дерево. Тогда

1. $\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha\}$ замкнуто и неограничено в ω_1;
2. если $A \subset \omega_1$ — максимальная антицепь в T, то

$$\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha,\ A \cap T_\alpha \text{ — максимальная антицепь в } T_\alpha\}$$

замкнуто и неограничено в ω_1.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Доказательство. 1: Замкнутость очевидна. Докажем неограниченность. Для $\alpha < \omega_1$ положим $f(\alpha) = \mathrm{ht}(\alpha, \mathrm{T})$ и $g(\alpha) = \sup\{\beta : \beta \in \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})\}$. Ясно, что если $f(\beta) < \alpha$ и $g(\beta) < \alpha$ для всех $\beta < \alpha$, то $T_\alpha = \alpha$.

Значит, надо показать, что множество таких α неограничено. Для каждого $\xi < \omega_1$ выберем $\varphi(\xi) > \xi, f(\xi), g(\xi)$. Для любого фиксированного ξ_0 ординал $\alpha = \sup_n \varphi^n(\xi_0)$ (φ^n — n-я итерация φ) обладает нужными свойствами , и $\alpha > \xi_0$.

2: Антицепь A в T максимальна $\iff$ каждый элемент $x \in T \setminus A$ сравним с некоторым элементом A.

Замкнутость очевидна. Проверим неограниченность. Ясно, что $A \cap T_\alpha$ — антицепь в T_α для любого α. Для каждого $\alpha < \omega_1$ выберем элемент $h(\alpha) \in A$, сравнимый с α (для $\alpha \in A$ полагаем $h(\alpha) = \alpha$). В пункте 1 мы определили отображения f и g. Добавим к ним h и для $\xi < \omega_1$ определим $\varphi(\xi)$ так, что $\varphi(\xi) > \xi, f(\xi), g(\xi), h(\xi)$. Для любого фиксированного ξ_0 ординал $\alpha = \sup_n \varphi^n(\xi_0)$ удовлетворяет условиям $f(\beta) < \alpha$ и $g(\beta) < \alpha$ для всех $\beta < \alpha$. Значит, $T_\alpha = \alpha$. Кроме того, $h(\beta) \in \alpha = T_\alpha$ для всех $\beta < \alpha$, так что каждый элемент $\beta \in T_\alpha \setminus A$ сравним с некоторым элементом (а именно, $h(\beta)$) из $A \cap T_\alpha$. Значит, антицепь $A \cap T_\alpha$ максимальна в T_α. При этом ординал α больше произвольно выбранного ξ_0. ■

Лемма 9. Пусть $T = (\omega, \lhd)$ — всегда ветвящееся ω_1-дерево и $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ — $\diamondsuit$-последовательность. Предположим, что для каждого предельного ординала $\alpha < \omega_1$ с тем свойством, что $T_\alpha = \alpha$ и A_α — максимальная антицепь в T_α, выполнено условие

$$\forall x \in \mathrm{Lev}_\alpha(\mathrm{T})\ \exists \mathrm{y} \in \mathrm{A}_\alpha \text{ такой, что } y \lhd x. \qquad (\star)$$

Тогда T — ω_1-дерево Суслина.

Доказательство. Лемма 7 $\implies$ достаточно проверить, что любая максимальная антицепь A в T счётна. Лемма 8 $\implies$ множество

$$C = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ предельный, } T_\alpha = \alpha \text{ и } A \cap T_\alpha \text{ — максимальная антицепь в } T_\alpha\}$$

замкнуто и неограничено в ω_1. Поскольку множество $\{\alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ стационарно, найдётся $\alpha_0 \in C$ такое, что $A \cap \alpha_0 = A_{\alpha_0}$. Из $(\star)$ следует, что если $z \in T$ и $\mathrm{ht(z, T)} \geq \alpha_0$, то для некоторого $y \in A_{\alpha_0} = A \cap \alpha_0$ имеем $y \lhd z$, так что $z \notin A$ (поскольку A — антицепь). Значит, $A = A_{\alpha_0}$. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 10. Фильтр $\mathrm{club}(\kappa)$ и измеримые кардиналы

Теорема 33 ($\diamondsuit$). Существует дерево Суслина.

(Ординалы $\alpha < \omega_1$ записываются в виде $\omega \cdot \beta + n$, и порядок $\lhd$ определяется индукцией по β и n так, чтобы выполнялось $(\star)$.)

Некоторые другие следствия $\diamondsuit$

- Существует пространство Осташевского:

  несчётное регулярное счётно компактное не компактное пространство, в котором всякое замкнутое множество либо не более чем счётно, либо имеет не более чем счётное дополнение. (Несуществование таких пространств совместимо с ZFC + CH.)

- Существует наследственно сепарабельный компакт мощности 2^{2^ω} без сходящихся последовательностей.

- Существует пространство X со следующими свойствами:

  - X локально компактно;
  - X локально счётно;
  - X наследственно сепарабельно;
  - X нормально;
  - $X \times [0,1]$ не нормально.

Фильтр $\mathrm{club}(\kappa)$

Пусть κ — кардинал (или предельный ординал).

Определение 45. Множество $C \subset \kappa$ *замкнуто* в κ, если всякий ординал $\alpha < \kappa$, для которого $\sup(C \cap \alpha) = \alpha \neq 0$, принадлежит C ($\iff$ C замкнуто в порядковой топологии на κ).

Множество $C \subset \kappa$ *неограничено* в κ, если для всякого ординала $\alpha < \kappa$ существует $\beta \in C$ такой, что $\beta > \alpha$.

Множество $C \subset \kappa$, замкнутое и неограниченное в κ, называется *club*ом. Семейство всех множеств, каждое из которых содержит некоторый club в κ, является фильтром (будет доказано). Этот фильтр обозначается $\mathrm{club}(\kappa)$.

Если κ — регулярный кардинал, то множество $C \subset \kappa$ неограничено в $\kappa \iff |C| = \kappa$.

а(Действительно, пусть $C = \{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$, где $\lambda \leq \kappa$ и $c_\alpha < c_\beta$ для $\alpha < \beta$ (а значит, $c_\alpha \geq \alpha$ для всех $\alpha < \lambda$). Имеем $|c_\alpha| < \kappa$ для каждого $\alpha < \lambda$ (так как κ — кардинал). Если C неограничено, т.е. $\sup C = \bigcup_{\alpha<\lambda} c_\alpha = \kappa$, то $|C| = \lambda = \kappa$ в силу регулярности кардинала κ. Обратно, если $\lambda = \kappa$, то $\sup C = \sup_{\alpha<\lambda} c_\alpha \geq \sup_{\alpha<\kappa} \alpha = \kappa$.)

Теорема 34 (κ-полнота фильтра $\mathrm{club}(\kappa)$). Если κ — регулярный несчётный кардинал, то пересечение $< \kappa$ clubов в κ является clubом.

Доказательство. Пусть $\lambda < \kappa$ и C_α, $\alpha < \lambda$, — clubы в κ. Очевидно, пересечение $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ замкнуто в κ. Покажем, что оно неограничено. Возьмём любой ординал $\beta_0 < \kappa$. Пусть $(\beta_{0\alpha})_{\alpha<\lambda}$ — последовательность ординалов со свойствами

- $\beta_{00} > \beta_0$,
- $\beta_{0\alpha} < \beta_{0\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{0\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

Такая последовательность существует, так как все C_α неограничены.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предположим, что $n > 0$ и мы уже построили последовательность $(\beta_{(n-1)\alpha})_{\alpha<\lambda}$ ординалов $< \kappa$. Положим $\beta_n = \sup_{\alpha<\lambda} \beta_{(n-1)\alpha}$. Имеем $\beta_n < \kappa$, так как κ регулярен. Выберем последовательность $(\beta_{n\alpha})_{\alpha<\lambda}$ со свойствами

- $\beta_{n0} > \beta_n$,
- $\beta_{n\alpha} < \beta_{n\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

В результате мы получим последовательности $(\beta_{n\alpha})_{\alpha<\lambda}$ для всех $n < \omega$. Для каждого $\alpha < \lambda$ положим $\beta^*_\alpha = \sup_{n<\omega} \beta_{n\alpha}$. Каждое C_α замкнуто, $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha \implies \beta^*_\alpha \in C_\alpha$. Поскольку $\beta_n < \beta_{n\alpha} < \beta_{n+1}$, имеем $\beta^*_\alpha = \sup_{n<\omega} \beta_n$ для всякого $\alpha < \lambda$. Значит, $\sup_{n<\omega} \beta_n \in \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$, и $\sup_{n<\omega} \beta_n > \beta_0$. ■

Теорема 35 (о диагональном пересечении). Если κ — регулярный несчётный кардинал, то для любой последовательности clubов $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *диагональное пересечение*

$$\underset{\alpha<\kappa}{\triangle} C_\alpha = \{\beta < \kappa : \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\}$$

является clubом.

Доказательство. Заметим, что $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \bigcap_{\alpha<\kappa}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$. Действительно, если $\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$, то тем более $\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$, и при этом $\beta \in [0,\gamma] \subset C_\gamma \cup [0,\gamma]$ для всякого $\gamma \geq \beta$. Значит, $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha \subset \bigcap_{\alpha<\kappa}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$. Обратно, если $\beta \in \bigcap_{\alpha<\kappa}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$, то $\beta \in C_\alpha \cup [0,\alpha]$ для каждого $\alpha < \beta$, и из того, что $\beta \notin \bigcup_{\alpha<\beta}[0,\alpha]$, следует, что $\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$.

Вывод: диагональное пересечение $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Покажем, что оно неограничено. Возьмём $\alpha < \kappa$ и рассмотрим последовательность $(\xi_n)_{n\in\omega}$, где

$$\xi_0 = \alpha \quad \text{и} \quad \xi_{n+1} = \min\Big(\bigcap_{\beta<\xi_n} C_\beta \cap (\xi_n, \kappa)\Big).$$

Положим $\xi = \sup_{n\in\omega} \xi_n$. Для каждого $\beta < \xi$ имеем $\beta < \xi_k$ для некоторого k, поэтому все элементы последовательности $(\xi_n)_{n\in\omega}$, кроме конечного их числа, принадлежат C_β. Все C_β замкнуты $\implies \xi \in C_\beta$ для каждого $\beta < \xi \implies \xi \in \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Ясно, что $\xi > \alpha$. ■

Следствие 10. Семейство всех clubов в регулярном несчётном кардинале κ замкнуто относительно конечных пересечений.

Таким образом, семейство

$$\mathrm{club}(\kappa) = \{\mathrm{A} \subset \kappa : A \text{ содержит некоторый club в } \kappa\}$$

является фильтром. Мы увидим, что он почти никогда не является ультрафильтром (т.е. максимальным по включению фильтром).

Определение 46. Подмножество регулярного несчётного кардинала κ *стационарно*, если оно пересекается со всеми clubами в κ.

Ясно, что все стационарные множества неограничены.

Пусть κ — любой кардинал. Кардинал, непосредственно следующий за ним, обозначается κ^+:

$$\kappa^+ = \min\{\lambda : \lambda \text{ — кардинал, } \kappa < \lambda\}.$$

В частности, $n^+ = n+1$, $\omega^+ = \omega_1$, $\ldots$, $\omega^+_\alpha = \omega_{\alpha^+}$.

Замечание 9. Всякий кардинал вида κ^+ регулярен.

Утверждение, что всякий регулярный кардинал имеет вид κ^+, совместимо с ZFC.

Теорема 36 (Улам). Пусть κ — любой бесконечный кардинал.

Всякое стационарное подмножество кардинала κ^+ можно представить как объединение κ^+ штук попарно непересекающихся стационарных множеств.

Определение 47. Пусть κ — кардинал. Для каждого $\beta < \kappa^+$ зафиксируем инъекцию $f_\beta\colon \beta \to \kappa$. Для $\iota < \kappa$ и $\alpha < \kappa^+$ положим

$$A^\iota_\alpha = \{\beta < \kappa^+ : \alpha < \beta \text{ и } f_\beta(\alpha) = \iota\}.$$

Получившееся семейство множеств A^ι_α, $\iota < \kappa$, $\alpha < \kappa^+$, называется *матрицей Улама* на κ^+.

Свойства матрицы Улама:

1. Если $\iota \neq \eta$, то $A^\iota_\alpha \cap A^\eta_\alpha = \varnothing$ для всякого $\alpha < \kappa^+$.
2. Если $\alpha \neq \gamma$, то $A^\iota_\alpha \cap A^\iota_\gamma = \varnothing$ для всякого $\iota < \kappa$, потому что все f_β инъективны.
3. $\bigcup\limits_{\iota<\kappa} A^\iota_\alpha = \{\beta < \kappa^+ : \alpha < \beta\}$ для каждого $\alpha < \kappa^+$.

Доказательство теоремы Улама. Для $\alpha < \kappa^+$ положим

$$\mathrm{stat}(\alpha) = \{\iota < \kappa : A^\iota_\alpha \text{ стационарно}\}.$$

Множество $\bigcup_{\iota\in\mathrm{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$ содержит club. (Действительно, иначе $\bigcup_{\iota\notin\mathrm{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$ стационарно. Для $\iota \notin \mathrm{stat}(\alpha)$ пусть C_ι — club, не пересекающий A^ι_α. Теорема о κ^+-полноте $\implies C = \bigcap_{\iota\notin\mathrm{stat}(\alpha)} C_\iota$ — club, однако C не пересекает множество $\bigcup_{\iota\notin\mathrm{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$, которое по предположению стационарно.) Значит, для некоторого $\iota < \kappa$ имеем $|\{\alpha : \iota \in \mathrm{stat}(\alpha)\}| = \kappa^+$. ■

Пусть κ — кардинал и $A \subset \kappa$. Скажем, что функция $f\colon A \to \kappa$ *регрессивна*, если $f(\alpha) < \alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Следующая теорема (*лемма Фодора*, или *pressing down lemma*) утверждает, что всякая регрессивная функция на стационарном множестве постоянна на некотором стационарном подмножестве этого множества.

Теорема 37 (Фодора). Пусть κ — регулярный несчётный кардинал, $S \subset \kappa$ — стационарное множество и $f\colon S \to \kappa$ — регрессивная функция. Тогда существуют стационарное множество $S_0 \subset S$ и ординал $\gamma < \kappa$ такие, что $f(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$.

Доказательство. Будем считать, что $0 \notin S$. Предположим, что найдутся стационарное множество $S \subset \kappa$ и регрессивная функция $f\colon S \to \kappa$ такие, что для всякого $\gamma < \kappa$ множество $f^{-1}(\gamma)$ не стационарно, т.е. не пересекается с некоторым clubом C_γ. Положим $C = \Delta_{\gamma<\kappa} C_\gamma$. Для $\alpha \in C$ имеем $\alpha \in C_\beta$ для каждого $\beta < \alpha$, т.е. $\alpha \notin f^{-1}(\beta)$ для каждого $\beta < \alpha$. Значит, $f(\alpha) \geq \alpha$ — противоречие. ■

Теорема 38. Пусть κ — регулярный несчётный кардинал. Тогда для любой функции $f\colon \kappa \to \kappa$ множество

$$A = \{\alpha < \kappa : \forall \beta < \alpha (f(\beta) < \alpha)\}$$

содержит club.

Доказательство. Предположим, что A не содержит club. Тогда $S = \kappa \setminus A$ стационарно. Для каждого $\alpha \in S$ положим

$$\varphi(\alpha) = \min\{\beta < \alpha : f(\beta) \geq \alpha\}.$$

Получили регрессивную функцию $\varphi\colon S \to \kappa$. По лемме Фодора существуют ординал $\gamma < \kappa$ и стационарное множество $S_0 \subset S$ такие, что $\varphi(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$. Получается, что $f(\gamma) \geq \alpha$ для всех $\alpha \in S_0$. Этого не может быть, так как S_0 неограничено. ■

Следствие 11. Если κ — регулярный несчётный кардинал, то множество неподвижных точек любой непрерывной (относительно порядковой топологии) возрастающей функции $\kappa \to \kappa$ содержит club.

Измеримые кардиналы

Недостижимые кардиналы

Недостижимые кардиналы — это кардиналы, которые нельзя получить из меньших кардиналов применением операций кардинальной арифметики.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 48. Несчётный кардинал κ *сильно недостижим*, или просто *недостижим*, если он регулярен и для всякого $\lambda < \kappa$ имеем $2^\lambda < \kappa$.

Определение 49. Кардинал κ называется *предельным*, если у него нет непосредственного предшественника.

Непредельные кардиналы — это в точности все кардиналы вида κ^+. Если выполнена *обобщённая континуум-гипотеза* $2^\kappa = \kappa^+$ для всех кардиналов κ, то всякий регулярный предельный кардинал недостижим.

Несуществование недостижимых кардиналов совместимо с ZFC, тогда как совместимость их существования нельзя доказать в принципе.

Иерархия фон Неймана разбивает класс V всех множества на подклассы V_α, где α пробегает класс всех ординалов. Классы V_α определяются по трансфинитной рекурсии:

- $V_0 = \varnothing$
- если $\alpha = \beta + 1$, то $V_\alpha = \mathscr{P}(V_\beta)$
- если α — предельный ординал, то $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$

Если кардинал κ недостижим, то V_κ — модель теории множеств, в которой нет недостижимых кардиналов, так что несуществование таких кардиналов совместимо с ZFC. Однако если бы существовало доказательство непротиворечивости существования недостижимого кардинала, то оно являлось бы одновременно доказательством непротиворечивости ZFC, которое не может существовать по второй теореме Гёделя о неполноте.

Для множества X положим

$$\mathrm{Def}(X) = \big\{\{y : y \in X \text{ и } (X, \in) \models \varphi(y, z_1, \dots, z_n)\} : \varphi \text{ — формула первого порядка и } z_1, \dots, z_n \in X\big\}.$$

Конструктивный универсум Гёделя L является объединением классов L_α, где α пробегает класс всех ординалов. Классы L_α определяются по трансфинитной рекурсии:

- $L_0 = \varnothing$
- если $\alpha = \beta + 1$, то $L_\alpha = \mathrm{Def}(L_\beta)$
- если α — предельный ординал, то $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$

Предположение $V = L$ совместимо с ZFC. Из него вытекает обобщённая континуум гипотеза , а значит, и недостижимость всякого предельного регулярного несчётного кардинала. Если κ — такой кардинал, то L_κ — модель теории множеств, в которой таких кардиналов нет, так что их несуществование совместимо с ZFC. Однако доказать непротиворечивость существования предельных регулярных несчётных кардиналов невозможно в принципе (по второй теореме Гёделя о неполноте).

Определение 50. *Измеримый кардинал* — это несчётный кардинал такой, что на $\mathscr{P}(\kappa)$ существует κ-аддитивная нетривиальная $\{0,1\}$-значная мера.

Измеримый по Уламу кардинал — это несчётный кардинал такой, что на $\mathscr{P}(\kappa)$ существует σ-аддитивная нетривиальная $\{0,1\}$-значная мера.

При этом $\{0,1\}$-значная мера *κ-аддитивна*, если каковы бы ни были кардинал $\lambda < \kappa$ и семейство попарно непересекающихся множеств $A_\alpha \subset \kappa$, $\alpha < \lambda$, имеем $\mathrm{mes}\bigcup \mathrm{A}_\alpha = \sum_{\alpha<\lambda} \mathrm{mesA}_\alpha$ (это означает, в частности, что mesA_α может равняться 1 не более чем для одного $\alpha < \lambda$). Мера *нетривиальна*, если $\mathrm{mes}\kappa = 1$ и $\mathrm{mes}\{\alpha\} = 0$ для всякого $\alpha \in \kappa$.

Другими словами, несчётный кардинал κ измерим, если на κ существует κ-полный неглавный ультрафильтр.

(Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на κ *неглавный*, если $\bigcap \mathscr{U} = \varnothing$, и *$\kappa$-полный*, если пересечение любого семейства $< \kappa$ его элементов принадлежит $\mathscr{U}$.)

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 11. Проблема существования экстремально несвязных групп

Теорема 39. Любой измеримый кардинал недостижим.

Доказательство. Если на кардинале κ существует нетривиальная κ-аддитивная $\{0,1\}$-значная мера, то любое одноэлементное множество имеет меру $0 \implies$ любое множество мощности $< \kappa$ имеет меру $0 \implies$ объединение $< \kappa$ таких множеств имеет меру $0 \implies \kappa$ регулярен.

Предположим, что существует $\lambda < \kappa$, для которого $2^\lambda \geq \kappa$. Отождествим κ с каким-нибудь множеством $K \subset 2^\lambda$ (посредством биекции). Элементы K (как и всего множества 2^λ) — это функции $\lambda \to \{0,1\}$. Для каждого $\alpha < \lambda$ имеем

$$\mathrm{mes}\{\mathrm{f} \in \mathrm{K} : \mathrm{f}(\alpha) = 0\} = 1 \quad \text{или} \quad \mathrm{mes}\{\mathrm{f} \in \mathrm{K} : \mathrm{f}(\alpha) = 1\} = 1.$$

В первом случае положим $c_\alpha = 0$, во втором — $c_\alpha = 1$. В силу κ-аддитивности меры имеем

$$\mathrm{mes} \bigcap \big\{ \{\mathrm{f} \in \mathrm{K} : \mathrm{f}(\alpha) = \mathrm{c}_\alpha\} : \alpha \in \lambda \big\} = 1,$$

однако это пересечение содержит лишь одну точку — функцию $f\colon \alpha \mapsto c_\alpha$, $\alpha \in \lambda$. ■

Теорема 40. Наименьший измеримый по Уламу кардинал измерим.

Доказательство. Пусть κ — наименьший измеримый по Уламу кардинал и mes — σ-аддитивная $\{0,1\}$-значная мера на $\mathscr{P}(\kappa)$.

Предположим, что эта мера не κ-аддитивна. Пусть $\lambda < \kappa$, $A_\alpha \subset \kappa$ для $\alpha < \lambda$, $\mathrm{mesA}_\alpha = 0$ для $\alpha < \lambda$ и $\mathrm{mes}\big(\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{A}_\alpha\big) = 1$. Можно считать, что $\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \kappa$ — иначе заменим A_0 на $A_0 \cup \big(\kappa \setminus \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha\big)$.

Рассмотрим отображение $f\colon \kappa \to \lambda$, определённое правилом $f(\alpha) = \beta \iff \beta \in A_\alpha$. Определим на $\mathscr{P}(\lambda)$ функцию μ, положив $\mu(X) = \mathrm{mes}(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{X}))$ для $X \subset \lambda$. Функция μ является σ-аддитивной мерой на $\mathscr{P}(\lambda)$, поскольку $\mu(\varnothing) = \mathrm{mes}(\mathrm{f}^{-1}(\varnothing)) = \mathrm{mes}(\varnothing) = 0$ и для любых попарно непересекающихся множеств $X_n \subset \lambda$, $n \in \omega$, имеем $f^{-1}(X_i) \cap f^{-1}(X_j) = \varnothing$ для $i \neq j$, $f^{-1}(\bigcup_{n\in\omega} X_n) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(X_n)$ и

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\omega} X_n\big) = \mathrm{mes}\big(\bigcup_{\mathrm{n}\in\omega} \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{X}_\mathrm{n})\big) = \\ = \sum_{n\in\omega} \mathrm{mes}\big(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{X}_\mathrm{n})\big) = \sum_{\mathrm{n}\in\omega} \mu\big(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{X}_\mathrm{n})\big).$$

Существование μ противоречит минимальности измеримого по Уламу кардинала κ. ■

Кардинал κ называется *рамсеевским*, если для всякой раскраски $\chi\colon [\kappa]^{<\omega} \to \{0,1\}$ существует χ-однородное множество мощности κ (множество $A \subset \kappa$ *χ-однородно*, если $\chi|_{[A]^{<\omega}} = \mathrm{const}$).

Теорема 41. Любой измеримый кардинал является рамсеевским.

Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на κ называется *нормальным*, если он замкнут относительно диагональных пересечений, т.е. для любого семейства $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ элементов $\mathscr{U}$ диагональное пересечение $\Delta_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ принадлежит $\mathscr{U}$.

Теорема 42. Кардинал κ измерим $\iff$ на κ существует неглавный κ-полный нормальный ультрафильтр.

Проблема существования экстремально несвязных групп

Категории

Теория категорий изучает свойства отношений между объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов.

Определение 51. Говорят, что задана *категория* C, если

- задан класс *объектов* Ob_C;
- для каждой пары объектов A, B задано множество *морфизмов* (*стрелок*) $\mathrm{Hom}_\mathsf{C}(A,B)$, причём каждому морфизму соответствуют единственные объекты A и B;
- для пары морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_\mathsf{C}(A,B)$ и $g \in \mathrm{Hom}_\mathsf{C}(A,B)$ определена композиция $g \circ f \in \mathrm{Hom}_\mathsf{C}(A,C)$;

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

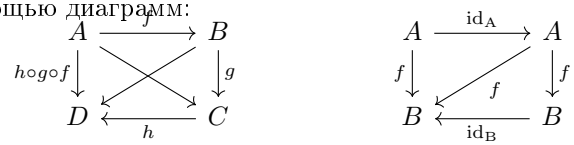
- для каждого объекта A задан тождественный морфизм $\mathrm{id_A} \in \mathrm{Hom_C(A, A)}$,

причём выполняются аксиомы

- операция композиции ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- тождественный морфизм действует тривиально:

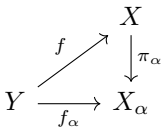
$$f \circ \mathrm{id_A} = \mathrm{id_B} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f} \quad \forall \mathrm{g} \in \mathrm{Hom_C(A, B)}.$$

Стандартный способ описания утверждений теории категорий — коммутативные диаграммы. *Коммутативная диаграмма* — это ориентированный граф, в вершинах которого находятся объекты, а стрелками являются морфизмы, причём результат композиции стрелок не зависит от выбранного пути. Например, аксиомы теории категорий можно записать с помощью диаграмм:



Пример 3.
- `Set` — категория множеств: объекты — множества, морфизмы — отображения множеств
- `Top` — категория топологических пространств: объекты — пространства, морфизмы — непрерывные отображения
- `Grp` — категория групп: объекты — группы, морфизмы — гомоморфизмы
- каждому ч.у.м. соответствует категория, объекты которой — элементы ч.у.м., морфизмы — $\leq$

Как уже упоминалось, в теории категорий произведение объектов X_α, $\alpha \in A$, определяется как объект X вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ (называемых каноническими проекциями) с тем свойством, что для любого объекта Y этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f \colon Y \to X$ такой, что диаграмма



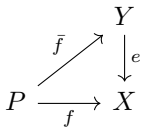
коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В категории `Top` топологических пространств объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения. В этой категории условие из определния произведения означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\underset{\alpha \in A}{\triangle} f_\alpha \colon Y \to \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

Определение 52. Морфизм $f \in \mathrm{Hom_C}(A, B)$ называется

- *изоморфизмом*, если существует морфизм $g \in \mathrm{Hom_C}(B, A)$ такой, что $g \circ f = \mathrm{id_A}$ и $f \circ g = \mathrm{id_B}$;
- *эндоморфизмом*, если $A = B$;
- *автоморфизмом*, если это изоморфизм и эндоморфизм;
- *эпиморфизмом*, если $\forall g_1, g_2 \in \mathrm{Hom_C}(B, X)$ из $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует $g_1 = g_2$;
- *мономорфизмом*, если $\forall g_1, g_2 \in \mathrm{Hom_C}(X, A)$ из $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует $g_1 = g_2$;
- *биморфизмом*, если это мономорфизм и эпиморфизм.

Любой изоморфизм является биморфизмом, но не наоборот.

Определение 53. Объект P в категории $\mathtt{C}$ называется *проективным*, если для любых эпиморфизма $e \colon Y \to X$ и морфизма $f \colon P \to X$ существует морфизм $\bar{f} \colon P \to Y$, для которого диаграмма



коммутативна (т.е. $e \circ \bar{f} = f$).

Пример 4.
- Аксиома выбора $\iff$ все объекты в категории `Set` множеств и отображений проективны.
- В категории (топологических) групп и (непрерывных) гомоморфизмов проективные объекты — свободные (топологические) группы.
- В категории `Comp` компактов и непрерывных отображений проективные объекты — экстремально несвязные компакты.

Булевы алгебры и пространства Стоуна

Определение 54. *Булева алгебра* — это непустое множество B с двумя бинарными операциями $\vee$ (супремум) и $\wedge$ (инфимум), одной унарной операцией $\neg$ (дополнение) и двумя выделенными элементами 0 и 1, удовлетворяющими аксиомам:

для любых $a, b, c \in B$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$
$$a \vee b = b \vee a \qquad a \wedge b = b \wedge a$$
$$a \vee (a \wedge b) = a \qquad a \wedge (a \vee b) = a$$
$$a \vee 0 = a \qquad a \wedge 1 = a$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$a \vee \neg a = 1 \qquad a \wedge \neg a = 0$$

Пример 5.
1. Для множества X семейство $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств X с операциями $\vee = \cup$, $\vee = \cap$, $\neg = X \setminus \bullet$ и выделенными элементами $0 = \varnothing$ и $1 = X$.
2. Для топологического пространства X семейство $\mathrm{CO}(X)$ всех открыто-замкнутых подмножеств X с теми же операциями.
3. Для топологического пространства X семейство $\mathrm{RO}(X)$ всех канонически открытых подмножеств X с операциями
$$U \wedge V = U \cap V, \qquad U \vee V = \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{U} \cup \mathrm{V}}), \qquad \neg \mathrm{U} = \mathrm{X} \setminus \overline{\mathrm{U}}$$
и выделенными элементами $0 = \varnothing$ и $1 = X$.
(Канонически открытые множества = внутренности замкнутых: $U \in \mathrm{RO}(X)$, если $U = \mathrm{Intcl}\, U$.)
4. Булева алгебра $\mathrm{RC}(X)$ канонически замкнутых множеств (замыканий открытых) с $0 = \varnothing$, $1 = X$ и операциями
$$F \wedge G = \overline{\mathrm{Int}(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})}, \qquad F \vee G = F \cup G, \qquad \neg F = X \setminus \mathrm{IntF}.$$

Теорема 43 (Стоуна). Любая булева алгебра B изоморфна булевой алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств некоторого вполне несвязного компакта $S(B)$.

Точки компакта $S(B)$ — *ультрафильтры* на B, т.е. гомоморфизмы в булеву алгебру $\{0, 1\}$. Его топология порождена базой $\{X \in S(B) : b \in X\}$, где $b \in B$.

Соответствие S — отображение из категории булевых алгебр и гомоморфизмов булевых алгебр в категорию `Comp` компактов и непрерывных отображений.

Это соответствие является контравариантным функтором, т.е. любому гомоморфизму булевых алгебр $A \to B$ естественным образом соответствует непрерывное отображение $S(B) \to S(A)$.

Определение 55. Булева алгебра B *полна*, если для любого множества $X \subset B$ определены $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ (считается, что $\bigvee \varnothing = 0$ и $\bigwedge \varnothing = 1$).

Булева алгебра B полна $\iff$ пространство Стоуна $S(B)$ экстремально несвязно.

Экстремально несвязные пространства

Определение 56. Топологическое пространство X *экстремально несвязно*, если замыкание любого открытого множества в нём открыто.

Равносильные условия

- внутренность любого замкнутого множества в X замкнута
- если $U, V \subset X$ открыты и $U \cap V = \varnothing$, то $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$
- любое всюду плотное множество $Y \subset X$ C^*-вложено в X, т.е. всякая непрерывная функция $Y \to [0,1]$ продолжается до непрерывной функции $X \to [0,1]$
- любое открытое множество $U \subset X$ C^*-вложено в X
- стоун-чеховская (максимальная) компактификация βX — проективный объект категории `Comp`
- булева алгебра $\mathrm{CO}(X)$ образует базу топологии X и полна

Теорема 44 (Фролик). Если X — экстремально несвязное пространство и $f\colon X \to X$ — гомеоморфизм, то множество $\operatorname{Fix} f$ неподвижных точек отображения f открыто (и замкнуто) в X.

Следствие 12. Всякое хаусдорфово пространство, квадрат которого экстремально несвязен, дискретно.

Доказательство. Для автогомеоморфизма $f\colon X^2 \to X^2$, определённого правилом $f(x,y) = (y,x)$, множество неподвижных точек — диагональ в X^2. Диагональ в квадрате хаусдорфова пространства открыта $\iff$ это пространство дискретно. ■

Топологическое пространство X *однородно*, если для любых различных $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f\colon X \to X$ такой, что $f(x) = y$.

Всякий однородный экстремально несвязный компакт конечен.

Замечание 10. Пространство $X \cup \{*\}$ с единственной неизолированной точкой $*$ экстремально несвязно $\iff$ фильтр $\mathscr{F}$ проколотых окрестностей точки $*$ является ультрафильтром на X.

Доказательство. Доказательство. $\Leftarrow$ очевидно, докажем $\Rightarrow$. Пусть A — любое подмножество X. Надо показать, что либо A, либо $X \setminus A$ является проколотой окрестностью точки $*$. Множества A и $X \setminus A$ открыты в $X \cup \{*\}$. Значит, $*$ принадлежит замыканию ровно одного из этих множеств. Пусть для определённости $* \in \operatorname{cl} A$. Имеем $\operatorname{cl} A = A \cup \{*\}$ (и $\operatorname{cl} X \setminus A = X \setminus A$) — иначе $\operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} X \setminus A \neq \varnothing$. Значит, множество $A \cup \{*\}$ открыто и A — проколотая окрестность точки $*$. ■

Экстремальная несвязность наследуется открытыми, всюду плотными и счётными подпространствами и сохраняется открытыми непрерывными отображениями.

Экстремально несвязные группы

Топологическая группа — это группа с топологией, относительно которой обе групповые операции $(x,y) \mapsto x \cdot y$ и $x \mapsto x^{-1}$ непрерывны.

Если топологическая группа G удовлетворяет аксиоме отделимости T_0, то она вполне регулярна. В этом случае говорят, что G отделима.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

В противном случае пересечение H всех окрестностей единицы является открыто-замкнутой подгруппой группы G, и топологическая факторгруппа G/H отделима, а в остальном обладает теми же топологическими свойствами, что и группа G. В дальнейшем будем предполагать все рассматриваемые топологические группы отделимыми.

Проблема 1 (Архангельский, 1967). Существует ли в ZFC недискретная экстремально несвязная топологическая группа?

Теорема 45 (СирОта, ≈ 1967). CH $\implies$ существует недискретная счётная экстремально несвязная группа

Определение 57. Группа G с единицей 1 называется *булевой*, если в ней выполнено тождество $x^2 = 1$ для всех $x \in G$.

- Любая булева группа абелева.
- Любая булева группа является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$. В частности, у неё есть базис, который её свободно порождает.
- Булева группа $B(X)$ с базисом X — не что иное как множество $[X]^{<\omega}$ всех конечных подмножеств X с операцией симметрической разности: для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B(X)$ $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \triangle \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} \cup \boldsymbol{y}) \setminus (\boldsymbol{x} \cap \boldsymbol{y})$. Ноль — пустое множество.

Пример 6. Канторов дисконтинуум $C \cong \{0,1\}^\omega$ — компактная булева топологическая группа. Она содержит счётную группу

$$B(\omega) = [\omega]^{<\omega} = \{f \in \{0,1\}^\omega : |f^{-1}(1)| < \omega\}$$

в качестве подгруппы.

Теорема 46 (Малыхин). Любая экстремально несвязная группа содержит открытую булеву подгруппу.

Доказательство. Пусть G — экстремально несвязная группа. Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi\colon G \to G, \varphi(g) = g^{-1}$. По теореме Фролика $\operatorname{Fix}\varphi$ открыто в G. Это открытая окрестность единицы. Пусть U — открытая окрестность единицы, для которой $U \cdot U \subset \operatorname{Fix}\varphi$ (её существование вытекает из равенства $1 \cdot 1 = 1$ и непрерывности умножения в точке $(1,1) \in G \times G$). Пусть H — подгруппа, порождённая множеством U. Она открыта: для $h \in H$ имеем $h \cdot U \subset h \cdot H \subset H$, и $h \cdot U$ — открытая окрестность точки h в силу непрерывности умножения.

Покажем, что подгруппа H булева. Для любых $u, v \in U$ имеем $u \cdot v \in \operatorname{Fix}\varphi$, откуда

$$v \cdot u = v \cdot u \cdot (u \cdot v \cdot u \cdot v) = (v \cdot (u \cdot u) \cdot v) \cdot u \cdot v = u \cdot v.$$

Любой элемент $h \in H$ есть произведение $u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$, где $u_i \in U$. Значит, $h^2 = u_1^2 \cdot \ldots \cdot u_n^2 = 0$. ■

Следствие 13. Если существует недискретная экстремально несвязная группа, то существует и булева недискретная экстремально несвязная группа.

Пример Сироты

Напомним: если $\mathscr{F}$ — фильтр на ω, то $\omega_{\mathscr{F}}$ — пространство $\omega \cup \{*\}$ с единственной неизолированной точкой $*$, в котором проколотые окрестности $*$ — элементы $\mathscr{F}$.

Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на ω, и пусть $B_{\mathscr{F}}(\omega)$ — булева группа $B(\omega) = [\omega]^{<\omega}$ с топологией, в которой базу окрестностей нуля составляют подгруппы $\langle F \rangle$, порождённые множествами $F \in \mathscr{F}$. СирОта

- ввёл определение рамсеевского (селективного) ультрафильтра на ω в эквивалентной форме;
- доказал, что из CH следует существование рамсеевского ультрафильтра;
- доказал, что если $\mathscr{U}$ — рамсеевский ультрафильтр на ω, то топологическая группа $B_{\mathscr{U}}(\omega)$ экстремально несвязна.

Незамкнутые дискретные множества в группах

В группе Сироты $B_{\mathscr{U}}(\omega)$ есть счётное незамкнутое дискретное множество ω с единственной предельной точкой 0. В экстремально несвязном пространстве два таких множества не могут иметь общую предельную точку, поскольку экстремальная несвязность наследуется счётными подпространствами. Естественные вопросы:

- Существует ли модель ZFC, в которой всякая недискретная булева топологическая группа содержит непересекающиеся дискретные множества с общей единственной предельной точкой?
- Верно ли, что во всякой (счётной) недискретной топологической группе имеется дискретное подмножество с ровно одной предельной точкой?
- Существует ли недискретная счётная группа, в которой все дискретные подмножества замкнуты?

Определение 58. Скажем, что множество M в группе G *жирное*, если $1 \in M$ и $\exists m \in \mathbb{N}$ (*жирность* M) такое, что для любого m-элементного множества $F \subset G$ существуют различные $x, y \in F$ с тем свойством, что $x^{-1} \cdot y \in M$ и $y^{-1} \cdot x \in M$.

Пример 7.
- Любая подгруппа конечного индекса — жирное множество.
- Если $W \subset G$ и $W \cap W^{-1} \cdot W = \varnothing$, то $G \setminus W$ — жирное множество (и $m = 4$).

Теорема 47. В любой группе G семейство жирных множеств является фильтром на G.

Определение 59. Фильтр $\mathscr{F}$ на ω — называется *Q-фильтром*, если каково бы ни было разбиение $\omega = \sqcup F_n$, где все F_n конечны, существует $A \in \mathscr{F}$ со свойством $|A \cap F_n| \leq 1$ для всех $n \in \omega$.

Определение 60. Фильтр $\mathscr{F}$ на ω называется *быстрым* (или *слабым Q-фильтром*), если для любой функции $f\colon \omega \to \omega$ найдётся $A = \{a_0 < a_1 < \dots\} \in \mathscr{F}$ со свойством $a_n > f(n)$ для всех n.

Предложение 11. Фильтр $\mathscr{F}$ быстрый $\iff$ каково бы ни было разбиение $\omega = \sqcup F_n$, где все F_n конечны, существует $A \in \mathscr{F}$ со свойством $|A \cap F_n| < n$ для всех $n \in \omega$.

Замечание 11. Фильтр $\mathscr{F}$ на ω небыстрый $\iff$ для любой последовательности натуральных чисел $(m_n)_{n\in\omega}$ существует разбиение $\omega = \sqcup F_n$, где все F_n конечны, такое, что для всякого $A \in \mathscr{F}$ имеем $|A \cap F_n| > m_n$ при некотором n.

Теорема 48. Пусть G — счётная группа, $\mathscr{F}$ — небыстрый свободный фильтр на G и $(M_n)_{n\in\omega}$ — последовательность жирных множеств. Тогда существует множество $S \subset G \setminus \{1\}$ со свойствами

1. $S \setminus M_n$ конечно для всех n;
2. во всяком $A \in \mathscr{F}$ найдутся различные $a, b \in A$ такие, что $a^{-1} \cdot b \in S$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $M_{n+1} \subset M_n$ и $M_n^{-1} = M_n$. Пусть m_n — жирность M_n. Фильтр $\mathscr{F}$ небыстрый $\implies$ $\exists$ последовательность $(F_n)_{n\in\omega}$ конечных подмножеств G с тем свойством, что для всякого $A \in \mathscr{F}$ имеем $|A \cap F_n| > m_n$ при некотором n. Положим

$$S_n = \{g^{-1} \cdot h : g, h \in F_n, g \neq h, g^{-1} \cdot h \in M_n\} \quad \text{и} \quad S = \bigcup S_n.$$

Проверим 1: множества S_k конечны, $S_k \subset M_k$, $M_{k+1} \subset M_k$ $\implies$ $S \setminus M_n \subset \bigcup_{k<n} S_k$ конечно для каждого n.

Проверим 2: Пусть $A \in \mathscr{F}$. Имеем $|A \cap F_n| > m_n$ для некоторого n. Множество M_n жирное, m_n — его жирность $\implies$ $\exists$ различные $a, b \in A \cap F_n$, для которых $a^{-1} \cdot b \in M_n$. По определению $a^{-1} \cdot b \in S_n$. ■

Следствие 14. Любая счётная недискретная топологическая группа G, в которой фильтр $\mathscr{F}$ проколотых окрестностей единицы небыстрый, содержит незамкнутое дискретное множество с единственной предельной точкой 1.

Доказательство. Пусть $G = \{1, g_0, g_1, \dots, g_n, \dots\}$. Для каждого $n \in \omega$ возьмём окрестность единицы U_n такую, что $g_n \notin U_n$. Пусть V_n — открытая окрестность единицы, $V_n^{-1} \cdot V_n \cdot V_n^{-1} \subset U_n$. Тогда $g \cdot V_n \cap V_n^{-1} \cdot V_n = \varnothing$. Значит, множество $M_n = G \setminus (g_n \cdot V_n)$ жирное (и замкнутое), причём $\bigcap M_n = \{1\}$. Возьмем S как в теореме. Каждая точка $g \in G \setminus \{1\}$ не принадлежит некоторому M_n $\implies$ $G \setminus M_n$ — её открытая окрестность, содержащая лишь конечное число точек из S $\implies$ множество S дискретно , и точки $g \neq 1$ не являются предельными для S. Для любой окрестности 1 U существует окрестность 1 V такая, что $V^{-1} \cdot V \subset U$, и любая окрестность содержит проколотую окрестность. Значит, любая окрестность 1 содержит $A^{-1} \cdot A$ для некоторого $A \in \mathscr{F}$ $\implies$ пересекает S. ■

Существует модель ZFC, в которой нет быстрых фильтров.

Следствие 15. С ZFC совместимо утверждение: любая счётная недискретная топологическая группа содержит незамкнутое дискретное множество, единственной предельной точкой которого является единица группы.

Теорема 49. Предположим, что не существует быстрых фильтров. Тогда в любой счётной недискретной булевой топологической группе содержатся два непересекающихся дискретных множества, единственной предельной точкой каждого из которых является 0.

Следствие 16. Несуществование счётных недискретных экстремально несвязных групп совместимо с ZFC.

Несчётные экстремально несвязные группы

Теорема 50. Пусть κ — любой кардинал и $\mathscr{U}$ — рамсеевский ультрафильтр на κ. Тогда булева топологическая группа $B_{\mathscr{U}}(\kappa) = [\kappa]^{<\omega}$, в которой базу окрестностей нуля составляют подгруппы $\langle A\rangle$, $A \in \mathscr{U}$, экстремально несвязна.

Если ультрафильтр $\mathscr{U}$ неглавный, то группа $B_{\mathscr{U}}(\kappa)$ недискретна.

Рамсеевский ультрафильтр $\mathscr{U}$ на κ неглавный и равномерный (все его элементы имеют мощность κ) $\iff$ $\mathscr{U}$ нормален (замкнут относительно диагональных пересечений) и κ-полон. Следовательно, на κ существует неглавный рамсеевский ультрафильтр, все элементы которого несчётны, $\iff$ κ измерим.

Следствие 17. Если существует измеримый кардинал, то существует и недискретная экстремально несвязная группа.

На прямое обобщение теоремы о несуществовании недискретных счётных экстремально несвязных групп на регулярные несчётные кардиналы рассчитывать не приходится:

Предложение 12. Пусть κ — несчётный регулярный кардинал и $f\colon \kappa \to \kappa$ — функция с тем свойством, что прообраз $f^{-1}(\alpha)$ каждой точки $\alpha \in \kappa$ не стационарен. Тогда существует club C, сужение функции f на который инъективно.

Доказательство. Предположим, что множество $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ стационарно. Тогда по лемме Фодора существует стационарное множество $S \subset \kappa$, для которого $f|_S = \text{const}$, а это противоречит условию. Значит, $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ нестационарно, так что множество $A = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \geq \alpha\}$ содержит club. Множество $B = \{\alpha \in \kappa : f(\beta) < \alpha \text{ для всех } \beta < \alpha\}$ тоже содержит club по доказанной раньше теореме. Пусть C — club, $C \subset A \cap B$. Если $\alpha, \beta \in C$, $\alpha < \beta$, то $\beta \in B \implies f(\alpha) < \beta$ и $\beta \in A \implies f(\beta) \geq \beta$. ■

Можно придумать несколько естественных обобщений понятия Q-фильтра на несчётные кардиналы. Самое сильное: скажем, что фильтр $\mathscr{F}$ на κ является κ-Q-фильтром, если каково бы ни было разбиение $\kappa = \sqcup F_\alpha$, $\alpha \in \kappa$, где $|F_\alpha| < \kappa$ для всех α, существует $A \in \mathscr{F}$ со свойством $|A \cap F_\alpha| \leq 1$ для всех $\alpha \in \kappa$. Всякий κ-Q-фильтр является κ-быстрым фильтром (какое бы обобщение быстроты ни рассматривалось).

Все стационарные подмножества регулярного кардинала κ имеют мощность κ $\implies$

Следствие 18. Любой фильтр $\mathscr{F}$ на регулярном несчётном кардинале κ, содержащий club(κ), является неглавным κ-Q-фильтром.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 12. Итерированный форсинг. Теорема Истона. Булевозначные модели

Итерированный форсинг

Определение 61. Пусть $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q, \mathbf{1}_Q)$ и $\mathbb{R} = (P, \leq_R, \mathbf{1}_R)$ — частично упорядоченные множества. *Прямым произведением* $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ называется частично упорядоченное множество $\mathbb{P} = (P, \leq_P, \mathbf{1})$, где $P = Q \times R$, $\mathbf{1} = (\mathbf{1}_Q, \mathbf{1}_R)$ а частичный порядок определяется так: $(q, r) \leq_P (q', r')$, если $q \leq_Q q'$ и $r \leq_R r'$. Наибольшим элементом множества $\mathbb{P}$ является $\mathbf{1} = (\mathbf{1}_Q, \mathbf{1}_R)$.

Теорема 51 (Первая теорема о произведении). *Пусть M — СТМ, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ — частично упорядоченные множества, $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ и G — $\mathbb{P}$-генерическое множество над M. Пусть*

$$H = \{q \in Q : \exists r \in R((q, r) \in G)\},$$

$$K = \{r \in R : \exists q \in Q((q, r) \in G)\}.$$

Тогда H — $\mathbb{Q}$-генерическое множество над M, K — $\mathbb{R}$-генерическое множество над $M[H]$ и $G = H \times K$.

Доказательство. Если $(q, r) \in G$, то $(\mathbf{1}_Q, r), (q, \mathbf{1}_Q) \in G$ (так как они больше (q, r)). Значит,

$$H = \{q \in Q : (q, \mathbf{1}_R) \in G\} \quad \text{и} \quad K = \{r \in R : (\mathbf{1}_Q, r) \in G\}.$$

Докажем, что H $\mathbb{Q}$-генерическое над M. Пусть $D \in M$ плотно в $\mathbb{Q}$. Тогда $D \times R$ плотно в $\mathbb{P}$. Значит, $\exists (q, r) \in (D \times R) \cap G$. Имеем $q \in D \cap H$.

Докажем, что K $\mathbb{R}$-генерическое над $M[G]$. Пусть $D \in M[G]$ плотно в $\mathbb{R}$, и пусть τ — $\mathbb{Q}$-имя, для которого $D = \tau_H$. Некоторое условие $q_0 \in P$ вынуждает, что τ плотно. Положим

$$E = \{(q, r) : (q \leq_Q q_0) \wedge (q \Vdash r \in \tau)\}$$

($E \in M$ по теореме об определимости). Покажем, что E плотно ниже $(q_0, \mathbf{1}_R)$ в $\mathbb{P}$.

Если $(q, r) \leq (q_0, \mathbf{1}_R)$, то $q \Vdash (\tau$ плотно в $\mathbb{R})$, откуда

$$q \Vdash \exists x \in R((\text{УПОР.ПАРА}(x, r) \in \leq_R) \wedge (x \in \tau))$$

(здесь УПОР.ПАРА(имя, имя) — имя, которое всегда интерпретируется как упорядоченная пара интерпретаций имён в скобках).

Значит, существуют $q' \leq_Q q$ и $\sigma \in \operatorname{dom} R$ такие, что

$$q' \Vdash ((\text{УПОР.ПАРА}(r', r) \in \leq_R) \wedge (\sigma \in \tau))$$

$\Longrightarrow$ существуют $q' \leq_Q q$ и $r' \in R$, для которых

$$q' \Vdash \text{УПОР.ПАРА}(r', r) \in \leq_R \quad \text{и} \quad q' \Vdash r' \in \tau,$$

т.е. $r' \leq_R r$ и $q' \Vdash r' \in \tau$, откуда $(q', r') \leq_P (q, r)$ и $(q', r') \in E$.

Лемма (1) 2 $\Longrightarrow$ $\exists (q, r) \in E \cap G$. Имеем $r \in K$, а поскольку $q \Vdash r \in \tau$, имеем также $r \in D$. Значит, $K \cap D \neq \varnothing$. Мы доказали, что K — $\mathbb{R}$-генерическое множество.

Покажем, что $H \times K = G$. Если $q \in H$ и $r \in K$, то $p_0 = (q, \mathbf{1}_R)$ и $p_1 = (\mathbf{1}_Q, r)$ принадлежат G, так что $\exists p' = (q', r') \in G$ такое, что $p' \leq_P p_0, p_1$. Ясно, что $(q, r) \geq_P p'$. Значит, $(q, r) \in G$. ■

Верна и обратная теорема: если H — $\mathbb{Q}$-генерическое множество над M и K — $\mathbb{R}$-генерическое множество над $M[H]$, то $H \times K$ — $\mathbb{P}$-генерическое множество над M.

Эти теоремы позволяют сводить однократное генерическое расширение к двукратному и наоборот в случае, когда $\mathbb{R} \in M$. Они применимы и к бесконечнократным расширениям.

В случае $\mathbb{R} \in M[H] \setminus M$ верна модификация первой теоремы о произведении, но она доказывается значительно сложнее.

В применении итерированного форсинга ключевую роль играет следующая лемма. В ней λ-замкнутость означает, что любая убывающая последовательность длины $\leq \lambda$ имеет нижнюю грань, а κ-условие антицепей — отсутствие антицепей (множеств попарно несовместимых элементов) мощности $\geq \kappa$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лемма 10 (О сохранении кардиналов при двукратном расширении). Пусть частично упорядоченные множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ принадлежат СТМ M, $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ и κ — кардинал в M. Предположим, что

$$M \models (\kappa \text{ регулярен} \wedge \forall \lambda < \kappa (\mathbb{Q} \ \lambda - \text{замкнуто}) \wedge \mathbb{R} \text{ удовлетворяет } \kappa\text{-условию антицепей})$$

Тогда $\mathbf{1}_P \models (\kappa$ — кардинал) (т.е. κ остаётся кардиналом в любом $\mathbb{P}$-генерическом расширении M).

Теорема 52 (Об обратном неравенстве). Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м. и κ, λ, μ и ν — кардиналы в M. Предположим, что

$$M \models ((\nu = \kappa^{\lambda\mu}) \wedge (|P| = \kappa) \wedge (\mathbb{P} \text{ уд-ет } \lambda^+\text{-условию антицепей})).$$

Тогда $\mathbf{1}_P \models 2^\mu \leq \nu$.

Теорема 53 (Истона). Существует СТМ, в которой $2^{\omega_n} = \omega_{n+2}$ для всех $n \in \omega$.

Доказательство. Для каждого $n \in \omega$ рассмотрим множество

$$P_n = \{p : p \text{ — функция} \wedge \operatorname{dom} p \subset \omega_{n+2} \times \omega_n \wedge \operatorname{ran} p \subset \{0,1\} \wedge |\operatorname{dom} p| < \omega_n\},$$

упорядоченное обратно включению. Положим

$$Q_n = \{(p_0, p_1, \dots, p_n) : p_i \in P_i \text{ для } i \leq n\},$$

$$Q^n = \{(p_{n+1}, p_{n+2}, \dots) : p_i \in P_i \text{ для } i > n\}.$$

Упорядочим множества Q_n и Q^n покомпонентно: $(p_0, \dots, p_n) \leq (p'_0, \dots, p'_n)$ в Q_n, если $p_i \leq p'_i$ в P_i для всех $i \leq n$, и аналогично для Q^n.

Если верна GCH ($2^\lambda = \lambda^+$ для всех кардиналов λ), то каждое $\mathbb{Q}_n$ удовлетворяет ω_{n+1}-условию антицепей (это доказывается так же, как то, что коэновское множество удовлетворяет у.с.ц., с использованием общей леммы о Δ-системы) , а каждое множество $\mathbb{Q}^n$ ω_n-замкнуто (очевидно). Ясно, что множества $\mathbb{Q}_n \otimes \mathbb{Q}^n$ и $\mathbb{Q}_m \otimes Q^m$ порядково изоморфны для всех n и m. Множество $\mathbb{Q}_0 \otimes \mathbb{Q}^0$ называется *частично упорядоченным множеством Истона.*

Пусть M — СТМ, $M \models$ GCH, $\mathbb{P}$ — ч.у.м. Истона и G — генерическое множество. Поскольку ч.у.м. Истона изоморфно всем $\mathbb{Q}_n \otimes \mathbb{Q}^n$, лемма о сохранении кардиналов при двукратном расширении $\Longrightarrow$ все кардиналы модели M сохраняются в $M[G]$. Нетрудно показать, что множество $\{q \in P_n : q$ — n-я компонента некоторого $p \in G\}$ порождает семейство мощности ω_{n+2} подмножеств ω_n (по аналогии с доказательством $\neg$CH в коэновской модели).

Таким образом, $M[G] \models 2^{\omega_n} \geq \omega_{n+2}$ для всех $n \in \omega$. Покажем, что имеет место равенство. Возьмём $n \in \omega$. Положим $\lambda = \omega_n^M$ и $\kappa = \omega_{n+2}^M$. Это кардиналы в $M[G]$.

Представим модель $M[G]$ в виде $M[G^n][G_n]$, где

$$G_n = \{(p_0, p_1, \dots, p_n) : (p_0, p_1, \dots) \in G\},$$

$$G^n = \{(p_{n+1}, p_{n+2}, \dots) : (p_0, p_1, \dots) \in G\}.$$

Поскольку $\mathbb{Q}^n$ λ-замкнуто в M, из общей второй теоремы о сохранении кардиналов (которая формулируется и доказывается для всех кардиналов точно так же, как для ω) следует, что каждое множество $X \subset \kappa$, которое принадлежит модели $M[G^n]$ и имеет мощность λ в $M[G^n]$, принадлежит исходной модели M и имеет в ней мощность λ.

Вывод 1: Если $\mathbb{Q}' \in M[G^n]$ таково, что $M[G^n] \models (\mathbb{Q}'$ — ч.у.м. Истона) и $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'_n \otimes \mathbb{Q}'^n$ внутри $M[G^n]$, то $\mathbb{Q}'_n = \mathbb{Q}_n$. Следовательно, ч.у.м. $\mathbb{Q}_n$ удовлетворяет λ^+-условию антицепей в $M[G^n]$ (и при этом $\lambda^+ = \omega_{n+1}^M = \omega_{n+1}^{M[G]}$).

Вывод 2: $(\kappa^\lambda)^{M[G]} = (\kappa^\lambda)^M = \kappa$.

Следовательно, к модели $M[G^n]$ и ч.у.м. $\mathbb{Q}_n \in M[G^n]$ применима теорема об обратном неравенстве с $\nu = \kappa$ и $\mu = \lambda$. Она даёт

$$M[G^n][G_n] \models 2^\lambda \leq \kappa,$$

что и требовалось. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Булевозначные модели

Рассмотрим *все возможные утверждения* языка теории множеств, а потом решим, какие из них для нас желательны. Выбор должен подчиняться естественным ограничениям: например, если φ и ψ выполняются, то $\varphi \wedge \psi$ тоже должно выполняться и т.п. Естественный инструмент для их отслеживания — булева алгебра.

Определение 62. *Булева алгебра* — это непустое множество B с двумя бинарными операциями $\vee$ (супремум) и $\wedge$ (инфимум), одной унарной операцией $\neg$ (дополнение) и двумя выделенными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, удовлетворяющими аксиомам: $\forall a, b, c \in B$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

$$a \vee b = b \vee a \qquad a \wedge b = b \wedge a \qquad a \vee (a \wedge b) = a \qquad a \wedge (a \vee b) = a$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \vee \mathbf{0} = a \qquad a \wedge \mathbf{1} = a \qquad a \vee \neg a = \mathbf{1} \qquad a \wedge \neg a = \mathbf{0}$$

На любой булевой алгебре имеется естественный частичный порядок: $a \leq b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.

Построение булевозначной модели $M^{\mathbb{B}}$

Имеется естественное соответствие между операциями $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ в булевой алгебре и логике, а также между элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ булевой алгебры и значениями И («истина») и Л («ложь») истинностных оценок высказываний.

Предположим, что мы хотим, чтобы некоторые высказывания были истинны и не уверены насчёт других. Зафиксируем наше частичное знание выбором подходящей булевой алгебры $\mathbb{B}$ и отображением каждого высказывания φ в некоторый элемент $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}$. Если φ совершенно точно истинно (например, это аксиома ZFC), полагаем $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$, а если совершенно точно ложно — полагаем

Ясно, что отображение $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$ должно удовлетворять условиям

1. $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]$
2. $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]$
3. $[\![\neg\varphi]\!] = \neg[\![\varphi]\!]$

(отсюда вытекает, что $[\![\varphi \to \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]$).

В теории множеств атомными формулами являются $[\![x = y]\!]$ и $[\![x \in y]\!]$ $\implies$ придётся рассматривать «нечёткие множества».

Обычное множество можно отождествить с функцией, принимающей значения в тривиальной булевой алгебре $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, которая отображает элементы множества (которые тоже являются множествами) в $\mathbf{1}$, а не элементы — в $\mathbf{0}$. В случае произвольной $\mathbb{B}$ «нечёткое множество» x состоит из «потенциальных элементов» (которые тоже являются «нечёткими множествами») и отождествляется с функцией, которая переводит каждый «потенциальный элемент» y в элемент булевой алгебры $\mathbb{B}$, соответствующий «степени принадлежности» элемента y множеству x. Таким образом, будем рассматривать *$\mathbb{B}$-значные множества* — функции из множества $\mathbb{B}$-значных множеств в $\mathbb{B}$.

Начнём с модели ZFC M. Зафиксируем соответствие $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$ (удовлетворяющее условиям типа 1–3 и переводящее аксиомы ZFC в $\mathbf{1}$) и обозначим множество всех $\mathbb{B}$-значных множеств в M через $M^{\mathbb{B}}$. Получившаяся структура называется *булевозначной моделью ZFC*. Чтобы превратить её в настоящую модель, нужно будет избавиться от нечёткости. Это достигается факторизацией $M^{\mathbb{B}}$ по ультрафильтру.

Чтобы полностью определить соответствие $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]$, нужно определить его для атомных формул и понять, что происходит при соединении атомов в более сложные формулы с помощью логических связок и кванторов $\exists$ и $\forall$ (у которых нет прямых аналогов в формализме булевых алгебр). Объединение при помощи связок подчиняется условиям 1–3. Рассмотрим $\exists$.

Существование x, для которого имеет место $\varphi(x)$, можно выразить так: «либо $\varphi(a)$, либо $\varphi(b)$, либо $\varphi()$, . . . » (надо перечислить все элементы вселенной). Таким образом, следует положить

4. $[\![\exists x \varphi(x)]\!] = \bigvee\limits_{a \in M^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(a)]\!]$

и, аналогично,

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

5. $[\![\forall x \varphi(x)]\!] = \bigwedge\limits_{a \in M^{\mathbb{B}}} [\![\varphi(a)]\!]$.

Чтобы эти определения имели смысл, нужно потребовать, чтобы булева алгебра $\mathbb{B}$ была *полной*, т.е. чтобы для любого (настоящего) множества $X \subset B$ были определены $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ (считается, что $\bigvee \varnothing = \mathbf{0}$ и $\bigwedge \varnothing = \mathbf{1}$).

Осталось позаботиться об атомах $[\![x \in y]\!]$ и $[\![x = y]\!]$.

Во-первых, мы хотим, чтобы выполнялась аксиома объёмности, т.е.

$$[\![x = y]\!] = [\![\forall z((z \in x) \to (z \in y)) \wedge \forall z((z \in y) \to (z \in x))]\!].$$

Другая разумная формула —

$$[\![x \in y]\!] = [\![\exists z((z \in y) \wedge (z = x))]\!].$$

Естественно также потребовать, чтобы выражение $[\![\exists z((z \in x) \wedge \varphi(z))]\!]$ зависело от значений $[\![\varphi(z)]\!]$ только для тех z, которые и в самом деле принадлежат области определения $\operatorname{dom} x$ $\mathbb{B}$-значного множества x, причём значение $[\![z \in x]\!] \in \mathbb{B}$ должно быть тесно связано со значением $x(z) \in \mathbb{B}$ (напомним, что x — $\mathbb{B}$-значная функция от $\mathbb{B}$-значных функций). Приходим к требованиям

$$[\![\exists z((z \in x) \wedge (\varphi(z))]\!] = \bigvee_{z \in \operatorname{dom} x} \big(x(z) \wedge [\![\varphi(z)]\!]\big)$$

и

$$[\![\forall z((z \in x) \to (\varphi(z))]\!] = \bigwedge_{z \in \operatorname{dom} x} \big(x(z) \to [\![\varphi(z)]\!]\big).$$

Все эти выражения приводят к определениям

6. $[\![x \in y]\!] = \bigvee\limits_{z \in \operatorname{dom} y} \big(y(z) \wedge [\![x = z]\!]\big)$

7. $[\![x = y]\!] = \bigwedge\limits_{z \in \operatorname{dom} y} \big(x(z) \to [\![z \in y]\!]\big) \wedge \bigwedge\limits_{z \in \operatorname{dom} x} \big(y(z) \to [\![z \in x]\!]\big)$

Это индуктивные определения по аналогу ранга для булевозначных множеств.

Требование выполнения аксиом ZFC в $M^{\mathbb{B}}$ накладывает дополнительные ограничения на $\mathbb{B}$. В качестве примера рассмотрим аксиому множества подмножеств. Для данного «нечёткого множества» x в $M^{\mathbb{B}}$ естественно определить «множество» y всех его подмножеств в $M^{\mathbb{B}}$, полагая

$$\operatorname{dom} y = \mathbb{B}^{\operatorname{dom} x}$$

т.е. определяя «потенциальные элементы» y как отображения $\operatorname{dom} x \to \mathbb{B}$. При этом для каждого $z \in \operatorname{dom} y$ должно выполняться условие $[\![z \subset x]\!]$. Однако если алгебра $\mathbb{B}$ не принадлежит модели M, то отображения из $\operatorname{dom} x$ в $\mathbb{B}$ не обязательно являются $\mathbb{B}$-значными множествами. Поэтому будем требовать, чтобы $\mathbb{B}$ принадлежала M. Вместо полноты алгебры $\mathbb{B}$ достаточно требовать, чтобы она была полна в M, т.е. чтобы $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ существовали для $X \subset B$ из M.

Определение 63. Пусть M — модель ZFC. Предположим, что $\mathbb{B} \in M$ — полная (в M) булева алгебра и $[\![\cdot]\!]$ — отображение из множества всех формул языка теории множеств в $\mathbb{B}$, удовлетворяющее условиям 1–7. Множество $M^{\mathbb{B}}$ всех $\mathbb{B}$-значных множеств в M вместе с соответствием $[\![\cdot]\!]$ называется *булевозначной моделью* теории множеств.

Осталось проверить, что в $M^{\mathbb{B}}$ выполнены аксиомы ZFC (т.е. для всякой аксиомы φ имеем $[\![\varphi]\!] = \mathbf{1}$), и что правила логического вывода работают в $M^{\mathbb{B}}$ должным образом (т.е. что если $[\![\varphi]\!] = \mathbf{1}$ и ψ — логическое следствие формулы φ, то $[\![\psi]\!] = \mathbf{1}$). Проверка несложная, хотя в некоторых случаях требует длинных выкладок. Она подробно проведена в книге

John L. Bell, *Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2005).

Факторизация по ультрафильтру

Булевозначная модель $M^{\mathbb{B}}$ превращается в обычную модель ZFC с помощью факторизации.

Выберем множество $U \subset B$ (возможно, $U \notin M$), которое содержит образы $[\![\varphi]\!]$ тех утверждений, истинности которых мы добиваемся; оно будет играть роль истинностной оценки, так что для произвольного φ U должно содержать либо $[\![\varphi]\!]$, либо $\neg[\![\varphi]\!]$.

Другими словами, для любого $x \in B$ должно быть либо $x \in U$, либо $\neg x \in U$ ($\neg$ в смысле $\mathbb{B}$). Кроме того, поскольку мы хотим трактовать принадлежность множеству U как истинность, должны выполняться условия:

1. $\mathbf{1} \in U$
2. $\mathbf{0} \notin U$
3. если $x \in U$ и $y \in U$, то $x \wedge y \in U$
4. если $x \in U$ и $x \leq y$ (т.е. $x \wedge y = x$), то $y \in U$
5. для каждого $x \in B$ либо $x \in U$, либо $\neg x \in U$

Подмножество булевой алгебры (и любого ч.у.м.) с этими свойствами называется *ультрафильтром* (а со свойствами 1–4 — *фильтром*; всякий фильтр содержится в ультрафильтре).

После того как выбран ультрафильтр U, строится *факторомодель* $M^{\mathbb{B}}/U$. Её элементы — классы эквивалентности элементов $M^{\mathbb{B}}$ относительно отношения эквивалентности

$$x \sim_U y \iff [\![x = y]\!] \in U.$$

Класс эквивалентности элемента $x \in M^{\mathbb{B}}$ будем обозначать x^U. На $M^{\mathbb{B}}/U$ возникает предикат $\in_U$:

$$x^U \in_U y^U \iff [\![x \in y]\!] \in U.$$

$M^{\mathbb{B}}/U$ с этим предикатом — модель ZFC.

Модель $M^{\mathbb{B}}/U$ не обязана быть стандартной (роль отношения принадлежности играет $\in_U$). Чтобы получить СТМ, нужно начать с СТМ M и в качестве U взять *генерический* ультрафильтр, т.е. ультрафильтр, являющийся генерическим множеством в B. Модель $M^{\mathbb{B}}/U$, которая получается в результате, обычно обозначается $M[U]$.

Имеется стандартная процедура пополнения любого ч.у.м. до полной булевой алгебры. Таким образом, чтобы построить СТМ, в которой нарушается CH, достаточно взять счётную СТМ M, коэновское ч.у.м. $\mathbb{P} \in M$, пополнить $\mathbb{P}$ до полной (в M) булевой алгебры $\mathbb{B} \in M$ и факторизовать $M^{\mathbb{B}}$ по генерическому ультрафильтру $U \subset B$ ($U \notin M$).

Причём тут вынуждение

Заметим, что ультрафильтр U выполняет сразу две функции: это генерическое множество, добавляемое к M, и список высказываний, истинных в $M[U]$. По определению ультрафильтра если $p \leq [\![\varphi]\!]$, то высказывание φ должно быть истинным в $M[U]$ для любого ультрафильтра $U \ni p$, так что отношение $p \Vdash \varphi$ можно формально определить так:

$$p \Vdash \varphi, \quad \text{если} \quad p \leq [\![\varphi]\!].$$

Таким образом, при булевозначном подходе можно обойтись вообще без символа $\Vdash$.

Булевозначный и коэновский подходы более или менее равноценны. Имена и интерпретиации в коэновском подходе — аналог «нечётких множеств» и факторизации. Определение отношения $\Vdash^*$ соответствует определению соответствия $[\![\cdot]\!]$ формулами 1–7. Эти формулы проще формул в определении $\Vdash$, зато в коэновском подходе можно иметь дело непосредственно с частично упорядоченными множествами и генерическими фильтрами, не пополняя их до булевых алгебр и ультрафильтров.