Глава 1.
Векторы. Аффинная система координат.

§1. Равенство направленных отрезков. Векторы.

Семейство множеств называется направленным, если в пересечении любых двух его элементов лежит третий (возможно, совпадающий с одним из пересекаемых).

Два луча прямой называются *сонаправленными*, если один из них лежит в другом.

В этом случае их пересечение является меньшим их этих двух лучей. Если лучи не сонаправлены, то их пересечение либо пусто, либо является отрезком, либо состоит из одной точки, являющейся их общим концом. В этом случае мы говорим, что лучи направлены *противоположно*.

Зафиксируем какой-то луч l_0 на прямой. Пусть M_0 — его начальная точка.

Каждая точка M прямой делит прямую на два луча. Из них один сонаправлен с l. Обозначим его $l(M)$. Если точка $M \neq M_0$ не лежит на луче l_0, то $l \subset l(M)$. Если точка $M \neq M_0$ лежит на луче l_0, то $l(M) \subset l$.

Все лучи вида $l(M)$ сонаправлены. Поэтому отобранные лучи составляют направленное семейство. Назовем лучи этого семейства *положительно направленными*.

Все прочие лучи прямой сонаправлены между собой. Они тоже составляют направленное семейство, но другое. Назовем лучи этого семейства *отрицательно направленными*.

Названия “положительно направленные лучи” и “отрицательно направленные лучи” условны. Если при нашем описании ситуации вместо луча l_0 взять смежный к нему, то названия поменяются местами. То есть, мы имеем два класса сонаправленных лучей. Выбор одного из них есть выбор направления на прямой.

Если P — какое-то свойство, которым может обладать или не обладать точка прямой, то, сделав выбор направления на прямой, мы делаем содержательным высказывание, что “точки прямой обладают свойство P начиная с некоторого места”. Это означает, что найдется такой луч выбранного семейства, что все точки этого луча обладают этим свойством. Например, если на прямой задана некоторая действительная функция $f(M)$, то мы можем говорить, что она с некоторого места положительна.

На плоскости

описанная конструкция дает следующее.

Зафиксируем какую-нибудь прямую s_0 нашей плоскости. Прямая s_0 делит плоскость на две полуплоскости. Выберем одну из них и обозначим ее p_0.

Каждая прямая s, параллельная прямой s_0 делит плоскость на две полуплоскости. Одна из них либо лежит в p_0, либо содержит p_0. Обозначим ее $p(s)$. Если $s \subseteq p_0$, то $p(s) \subset p_0$. Если $s \not\subseteq p_0$, то $p_0 \subset p(s)$.

Если мы возьмем не полуплоскость $p(s)$ из семейства, а смежную, то ее пересечение с любой полуплоскостью указанного семейства либо пусто, либо является полосой с граничными прямыми, параллельными прямой s_0, либо является их общей границей, то есть, прямой, параллельной прямой s_0.

Если есть две прямые s_1 и s_2, параллельные прямой s_0, то либо $p(s_1) \subset p(s_2)$, либо $p(s_2) \subset p(s_1)$.

Это означает, что наше семейство A полуплоскостей $p(s)$ направлено.

Пусть прямая l_0 не параллельна прямой s_0. Тогда каждая полуплоскость p семейства A высекает на прямой l_0 луч $\alpha_{l_0}(p)$. При этом полуплоскость p_1 тогда и только тогда лежит в полуплоскости p_2 когда луч $\alpha_{l_0}(p_1)$ лежит в луче $\alpha_{l_0}(p_2)$.

То есть, направленное семейство A порождает некоторое направленное семейство лучей на прямой l_0, выбирает на l_0 некоторое направление.

Указанную конструкцию можно повторить для любой прямой l, параллельной l_0. То есть, каждая полуплоскость p семейства A высекает на прямой l луч $\alpha_l(p)$. При этом полуплоскость p_1 тогда и только тогда лежит в полуплоскости p_2 когда луч $\alpha_l(p_1)$

лежит в луче $\alpha_l(p_2)$. Тем самым, на каждой такой прямой l мы выбираем некоторое направление.

Будем говорить, что лучи, лежащие на прямых l_1 и l_2, параллельных l_0, *сонаправлены*, если они имеют вид $\alpha_{l_1}(p_1)$ и $\alpha_{l_2}(p_2)$, соответственно. Если прямые l_1 и l_2 совпадают, $l_1 = l_2$, то их сонаправленность в смысле этого определения совпадает с сонаправленностью в смысле исходного определения сонаправленности лучей на прямой в силу замечания предыдущего абзаца.

Наше определение сонаправленности лучей на параллельных прямых зависит от выбора прямой s_0. Чтобы показать, что ничего не меняется при замене в определении прямой s_0 на другую прямую, не параллельную прямым l_1 и l_2, достаточно указать свойство присущее сонаправленным лучам и и неприсущее противоположно направленным лучам и не зависящее от прямой l_0. Таким свойством может быть следующее свойство: луч l' имеет вид $\alpha_{l_2}(p_2)$ тогда и только тогда, когда расстояние от текущей точки M луча l' до луча $\alpha_{l_1}(p_1)$, начиная с некоторого места, постоянно.

Если лучи, лежащие на параллельных прямых, не сонаправлены, то мы говорим, что они *направлены противоположно*. Лучи, направленные противоположно к некоторому лучу l_0, также составляют класс сонаправленности.

В пространстве

ситуация аналогична плоской.

Зафиксируем какую-нибудь плоскость π_0. Плоскость π_0 делит пространство на два полупространства. Выберем одно из них и обозначим его p_0.

Каждая плоскость π, параллельная плоскости π_0 делит пространство на два полупространства. Одно из них либо лежит в p_0, либо содержит p_0. Обозначим его $p(\pi)$. Если $\pi \subseteq p_0$, то $p(\pi) \subset p_0$. Если $\pi \nsubseteq p_0$, то $p_0 \subset p(\pi)$.

Если мы возьмем не полупространство $p(\pi)$ из указанного семейства, а смежное, то его пересечение с любым полупространством указанного семейства либо пусто, либо является слоем с граничными плоскостями, параллельными плоскости π_0, либо является их общей границей, то есть, плоскостью, параллельной плоскости π_0.

Если есть две плоскости π_1 и π_2, параллельные плоскости π_0, то либо $p(\pi_1) \subset p(\pi_2)$, либо $p(\pi_2) \subset p(\pi_1)$.

Это означает, что наше семейство A полупространств $p(\pi)$ направлено.

Пусть прямая l_0 не параллельна плоскости π_0. Тогда каждое полупространство p семейства A высекает на прямой l_0 луч $\alpha_{l_0}(p)$. При этом полупространство p_1 тогда и только тогда лежит в полупространстве p_2 когда луч $\alpha_{l_0}(p_1)$ лежит в луче $\alpha_{l_0}(p_2)$.

То есть, направленное семейство A порождает некоторое направленное семейство лучей на прямой l_0, выбирает на l_0 некоторое направление.

Указанную конструкцию можно повторить для любой прямой l, параллельной l_0. То есть, каждое полупространство p семейства A высекает на прямой l луч $\alpha_l(p)$. При этом полупространство p_1 тогда и только тогда лежит в полупространстве p_2 когда луч $\alpha_l(p_1)$ лежит в луче $\alpha_l(p_2)$. Тем самым, на каждой такой прямой l мы выбираем некоторое направление.

Будем говорить, что лучи, лежащие на прямых l_1 и l_2, параллельных l_0, *сонаправлены*, если они имеют вид $\alpha_{l_1}(p_1)$ и $\alpha_{l_2}(p_2)$, соответственно. Если прямые l_1 и l_2 совпадают, $l_1 = l_2$, то их сонаправленность в смысле этого определения совпадает с сонаправленностью в смысле исходного определения сонаправленности лучей на прямой в силу замечания предыдущего абзаца.

Наше определение сонаправленности лучей на параллельных прямых зависит от выбора плоскости π_0. Чтобы показать, что ничего не меняется при замене в определении плоскости π_0 на другую плоскость, не параллельную прямым l_1 и l_2, достаточно указать свойство присущее сонаправленным лучам и и неприсущее противоположно направленным лучам и не зависящее от плоскости π_0. Таким свойством, как и в плоском случае, может быть следующее свойство: луч l' имеет вид $\alpha_{l_2}(p_2)$ тогда и только тогда, когда расстояние от текущей точки M луча l' до луча $\alpha_{l_1}(p_1)$, начиная с некоторого места, постоянно.

Таким образом, и в случае плоскости, и в случае пространства лучи l и l' сонаправлены тогда и только тогда, когда они параллельны и расстояние от текущей точки M луча l' до луча l, начиная с некоторого места, постоянно.

Как и в плоском случае, если лучи, лежащие на параллельных прямых, не сонаправлены, то мы говорим, что они *направлены противоположно.* Лучи, направленные противоположно к некоторому лучу l_0, также составляют класс сонаправленности.

Понятие сонаправленности распространяется на отрезки. Отрезок AB становится направленным, когда одну из его концевых точек называют *началом* (вторая, соответственно, получает название *конца*). Символ $\overrightarrow{AB}$ обозначает *направленный отрезок* с началом A и концом B.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ определяет луч, параллельный прямой AB, начинающийся в точке A и содержащий точку B, за исключением того случая, когда $A = B$ (*нулевой направленный отрезок*). Этот луч мы будем называть "лучом AB".

Мы говорим, что *ненулевые* направленные отрезки сонаправлены, если сонаправлены лучи, ими определенные.

Мы говорим, что два ненулевых направленных отрезка *равны*, если они сонаправлены и равны их длины. *Все нулевые направленные отрезки считаем равными.*

Отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности, то есть,

1) направленный отрезок равен себе,

2) если направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{A_2B_2}$, то направленный отрезок $\overrightarrow{A_2B_2}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{A_1B_1}$,

3) если направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{A_2B_2}$, а направленный отрезок $\overrightarrow{A_2B_2}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{A_3B_3}$, то направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{A_3B_3}$.

Поэтому все направленные отрезки разбиваются на классы эквивалентности. Отрезки попадают в один класс тогда и только тогда, когда они равны. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами.*

Для любого вектора u и любой точки A прямой, плоскости или пространства существует единственный направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, представляющий класс u равных направленных отрезков, и начинающийся в точке A: надо провести через A луч соответствующего направления и отложить на нем от точки A отрезок длиной, равной длине векторов, входящих в u. Если u — нулевой вектор, то ситуация еще проще.

Определяя вектор u как класс равных направленных отрезков, мы должны обозначать принадлежность направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ этому классу формулой $\overrightarrow{AB} \in u$. Но отражение этого же факта формулой $\overrightarrow{AB} = u$ не считается большой ошибкой.

Класс нулевых направленных отрезков обозначается $\vec{0}$.

§2. Ось.

Осью называется прямая, на которой зафиксирован масштаб и выбрано положительное направление.

Если в объемлющем пространстве или на объемлющей плоскости масштаб уже выбран и расстояния "измерены", то для описания оси остается только зафиксировать положительное направление.

Определим *алгебраическое значение* $\left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle$ направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на оси как длину отрезка AB, взятую со знаком плюс, если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ направлен положительно, и со знаком минус, если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ направлен отрицательно.

В силу наших определений *направленные отрезки на оси равны тогда и только тогда когда равны их алгебраические значения.*

Имеем: $\left\langle \overrightarrow{BA} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle$.

Если точка M лежит на положительно направленном отрезке $\overrightarrow{AB}$, то, очевидно, $\left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AM} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{MB} \right\rangle$.

Если точка M лежит на оси в положительном направлении за точкой B, то точка B лежит на положительно направленном отрезке $\overrightarrow{AM}$ и по сказанному выше $\left\langle \overrightarrow{AM} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{BM} \right\rangle$, $\left\langle \overrightarrow{AM} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{MB} \right\rangle$ и опять $\left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AM} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{MB} \right\rangle$.

Если точка M лежит на оси в отрицательном направлении за точкой A, то точка A лежит на положительно направленном отрезке $\overrightarrow{MB}$ и по сказанному выше $\left\langle\overrightarrow{MB}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{MA}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{AB}\right\rangle$, $\left\langle\overrightarrow{MB}\right\rangle = -\left\langle\overrightarrow{AM}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{AB}\right\rangle$ и опять $\left\langle\overrightarrow{AB}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{AM}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{MB}\right\rangle$.

Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ отрицательно направлен, то отрезок $\overrightarrow{BA}$ направлен положительно и по сказанному выше $\left\langle\overrightarrow{BA}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{BM}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{MA}\right\rangle$, $-\left\langle\overrightarrow{AB}\right\rangle = -\left\langle\overrightarrow{MB}\right\rangle - \left\langle\overrightarrow{AM}\right\rangle$ и опять $\left\langle\overrightarrow{AB}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{AM}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{MB}\right\rangle$.

То есть, равенство $\left\langle\overrightarrow{AB}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{AM}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{MB}\right\rangle$ верно при любом расположении точек A, B и M на оси.

Переходя к векторам, получаем:

Лемма 2.1. *$\langle u+v\rangle = \langle u\rangle + \langle v\rangle$ для любых векторов u и v, параллельных оси.*

§3. Сдвиг.

Лемма 3.1. *Пусть направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ равны. Тогда направленные отрезки $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ тоже равны.*

Доказательство. I. Если точка A_2 лежит на прямой A_1B_1, то все точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат этой прямой. Зафиксировав направление делаем прямую осью. В силу замечаний предыдущего параграфа

$$\left\langle\overrightarrow{A_1A_2}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{A_2B_2}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{A_1B_1}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{B_1B_2}\right\rangle,$$

$$\left\langle\overrightarrow{A_1A_2}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{B_1B_2}\right\rangle,$$

что и дает требуемое.

II. Если точка A_2 не лежит на прямой A_1B_1, то мы имеем параллелограмм $A_1B_1B_2A_1$. Длины его сторон A_1A_2 и B_1B_2 равны. Отрезки $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ лежат В плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и B_1 по одну сторону прямой A_1B_1 и по замечаниям §1 сонаправлены. Мы имеем требуемое и в этом случае. Лемма доказана.

Отображение φ прямой, плоскости или пространства в себя называется *сдвигом*, если любой направленный отрезок переходит в равный ему направленный отрезок.

В силу леммы 3.1 все направленные отрезки вида $\overrightarrow{A\varphi(A)}$, где A пробегает область определения сдвига φ, равны между собой, то есть, составляют некоторый вектор u, а сам сдвиг устроен следующим образом.

Каждой точке A сопоставляется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, представляющий вектор u, и образом точки A назначается точка B. С другой стороны, если отображение задается этим описанием, то в силу леммы 3.1 направленный отрезок переходит в равный ему направленный отрезок, то есть, является сдвигом в смысле данного выше определения.

Лемма 3.2. *При сдвиге прямая переходит в параллельную ей прямую.*

Доказательство. Пусть точка M лежит на прямой AB, точка A переходит в точку A_1, точка B переходит в точку B_1, точка M переходит в точку M_1. Вектор $\overrightarrow{A_1M_1}$ параллелен вектору $\overrightarrow{AM}$ по определению сдвига. Вектор $\overrightarrow{AM}$ параллелен вектору AB, потому, что точка M лежит на прямой AB. Вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен вектору A_1B_1 по определению сдвига. Поэтому прямые AB и A_1B_1 параллельны, а вектор $\overrightarrow{A_1M_1}$ параллелен вектору A_1B_1. Поэтому точка M_1 лежит на прямой A_1B_1, что и требовалось.

Лемма 3.3. *При сдвиге плоскость переходит в параллельную ей плоскость.*

Доказательство. Пусть две пересекающиеся прямые l и p и точка M лежат в плоскости P. прямая l переходит в прямую l_1, прямая p переходит в прямую p_1, точка M переходит в точку M_1. Существует единственная плоскость P_1, содержащая пересекающиеся прямые l_1 и p_2.

Через точку M проведем любую прямую не параллельную прямым l и p. Она пересечет прямую l в какой-то точке A и прямую p в какой-то точке B. Пусть точка A переходит в точку A_1, лежащую на прямой l_1, точка B переходит в точку B_1, лежащую на прямой p_1.

По лемме 3.2 прямая AB переходит в прямую A_1B_1. Точка M_1 лежит на прямой A_1B_1, лежащей в плоскости P_1, что и требовалось.

§4. Линейные операции. Пространство векторов.

Сумма векторов определяется следующим образом. Пусть имеются векторы u и v. Возьмем любую точку O (прямой, плоскости или пространства). Отметим точку M так, чтобы $\overrightarrow{OM} = u$. Отметим точку N так, чтобы $\overrightarrow{MN} = v$. Суммой $u + v$ назовем вектор $\overrightarrow{ON}$.

В этом определении сумма зависит от выбора точки O. Возьмем в качестве начальной точки какую-то другую точку O_1. Отметим точку M_1 так, чтобы $\overrightarrow{O_1M_1} = u$. Отметим точку N_1 так, чтобы $\overrightarrow{M_1N_1} = v$. Рассмотрим сдвиг φ на вектор $\overrightarrow{OO_1}$. Так как $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O_1M_1}$, то $\varphi(M) = M_1$. Так как $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_1N_1}$ и $\varphi(M) = M_1$, то $\varphi(N) = N_1$. Так как $\varphi(O) = O_1$ и $\varphi(N) = N_1$, то $u + v = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{O_1N_1}$, что и означает независимость определения суммы векторов от выбора точки O.

Введенная операция обладает следующими свойствами. Так как $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN} = \overrightarrow{MN}$, то

1. $u + \vec{0} = u$ для любого вектора u.

Так как $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM}$, то

2. Для любого вектора u найдется такой вектор v, что $u+v = \vec{0}$.

Пусть $u = \overrightarrow{M_1N_1}$, $v = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{N_1N_2}$. По лемме 3.1 $\overrightarrow{M_2N_2} = u$, поэтому $u+v = \overrightarrow{M_1N_1}+\overrightarrow{N_1N_2} = \overrightarrow{M_1N_2} = \overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2N_2} = v+u$, то есть,

3. $u + v = v + u$ для любых векторов u и v.

Пусть $u = \overrightarrow{M_1M_2}$, $v = \overrightarrow{M_2M_3}$ $w = \overrightarrow{M_3M_4}$. Тогда $(u+v)+w = (\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3}) + \overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{M_1M_3} + \overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_4} = \overrightarrow{M_1M_2} + (\overrightarrow{M_2M_3}) + \overrightarrow{M_3M_4}) = v + (u + w)$, то есть, для любых векторов u, v и w.

4. $(u + v) + w = v + (u + w)$ для любых векторов u, v и w.

Лемма 4.1. *Пусть* $u + v_1 = w$ *и* $u + v_2 = w$. *Тогда* $v_1 = v_2$.

Доказательство. В соответствии с 2 существует такой вектор u_1, что $u + u_1 = \vec{0}$. Прибавляя к правым и к левым частям равенств $u + v_1 = w$ и $u + v_2 = w$ вектор u_1, получаем

$$u + v_1 + u_1 = w + u_1, \quad u + v_2 + u_1 = w + u_1,$$

$$(u + u_1) + v_1 = w + u_1, \quad (u + u_1) + v_2 = w + u_1,$$

$$\vec{0} + v_1 = w + u_1, \quad \vec{0} + v_2 = w + u_1,$$

$$v_1 = w + u_1 = w + u_1 = v_2,$$

что и утверждалось.

Произведение λu вектора u на число λ определяется следующим образом.

Если $u = \vec{0}$, полагаем $\lambda u = \vec{0}$.

Пусть вектор $u = \overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$ имеет длину $d > 0$.

При $\lambda \geqslant 0$ на луче MN отметим точку P так, чтобы длина отрезка MP равнялась λd. Произведение λu определим как вектор $\overrightarrow{MP}$.

Если $\lambda = 0$, это определение дает нулевой вектор $\vec{0}$.

Если $\lambda \neq 0$, возникает вопрос о корректности этого определения, то есть, вопрос о том, изменится ли результат, если вместо точки M мы возьмем какую-то другую точку M_1. По описанной процедуре на луче M_1N_1 (точка N_1 определяется условием $\overrightarrow{M_1N_1} = u$) мы отмечаем точку P_1 так, что длина отрезка M_1P_1 равняется λd. Отрезок $\overrightarrow{M_1P_1}$ сонаправлен с отрезком $\overrightarrow{M_1N_1}$ по определению точки P_1, отрезок $\overrightarrow{M_1N_1}$ сонаправлен с отрезком $\overrightarrow{MN}$ в силу равенства $\overrightarrow{M_1N_1} = u = \overrightarrow{MN}$, отрезок $\overrightarrow{MP}$ сонаправлен с отрезком $\overrightarrow{MN}$ по определению точки P. Таким образом, отрезки $\overrightarrow{M_1P_1}$ и $\overrightarrow{MP}$ сонаправлены. Их длины равны λd. Поэтому $\overrightarrow{M_1P_1} = \overrightarrow{MP}$, что и требовалось.

При $\lambda \leqslant 0$ на луче прямой MN, смежном с лучом MN отметим точку P так, чтобы длина отрезка MP равнялась λd. Произведение λu определим как вектор $\overrightarrow{MP}$.

Если $\lambda = 0$, это определение дает нулевой вектор $\vec{0}$, что совпадает с определением такого произведения данным выше.

Если $\lambda = -1$, это определение дает вектор, равный $\overrightarrow{NM}$, то есть, такой вектор v, что $u + v = \vec{0}$. По лемме 4.1 такой вектор v определен однозначно. Следовательно, наше определение произведения $(-1)u$ не зависит от выбора точки M.

В общем случае при $\lambda \neq 0$ мы имеем представление $\lambda u = (-1)(|\lambda|u)$, в котором однозначность определения вектора $v = |\lambda|u$ показана выше (ибо $|\lambda| > 0$), а однозначность определения вектора $(-1)v$ установлена в предыдущем абзаце.

В соответствии с нашими определениями, если вектор u параллелен некоторой оси l, то вектор λu тоже параллелен оси l и $\langle \lambda u \rangle = \lambda \langle u \rangle$.

Вектор $(-1)u$ обозначают обычно $-u$, выражение $+(-u)$ обычно сокращают до $-u$. В этих обозначениях решение уравнения $u + x = v$ имеет вид $x = v - u$.

Для дальнейшего важны следующие свойства введенных операций.

Проведем ось, параллельную вектору u. Тогда $\langle \lambda u \rangle = \lambda \langle u \rangle$. Так как векторы на оси равны тогда и только тогда, когда равны их алгебраические значения, то из равенства $\langle \lambda(\mu u) \rangle = \lambda \langle \mu u \rangle = \lambda\mu \langle u \rangle$ вытекает равенство

5. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ для любого вектора u и любых чисел λ и μ.

Аналогично, по лемме 2.1 $\langle (\lambda + \mu)u \rangle = \langle \lambda u + \mu u \rangle = \langle \lambda u \rangle + \langle \mu u \rangle = \lambda \langle u \rangle + \mu \langle u \rangle = (\lambda + \mu\,) < u \rangle$, из чего вытекает равенство

6. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ для любого вектора u и любых чисел λ и μ.

Возьмем любые векторы u и v и любое число $\lambda > 0$. Зафиксировав начало O, отложим от него векторы $u = \overrightarrow{OM}$, $v = \overrightarrow{ON}$, $\lambda u = \overrightarrow{OM_1}$, $\lambda v = \overrightarrow{ON_1}$.

Имеем: треугольники OMN и OM_1N_1 подобны с коэффициентом подобия λ. Отрезки $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M_1N_1}$ параллельны и лежат по одну сторону от прямой MM_1, поэтому, учитывая соотношение их длин, известное из подобия треугольников, $\overrightarrow{M_1N_1} = \lambda\overrightarrow{MN}$. То есть,

$$\lambda v - \lambda u = \lambda(v - u).$$

При $\lambda = 0$

$$\lambda v - \lambda u = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} = \lambda(v - u).$$

Сохраним наши векторы u и v и начало O. Отложим от O векторы $u = \overrightarrow{OM}$, $v = \overrightarrow{ON}$, $-u = \overrightarrow{OM_1}$, $-v = \overrightarrow{ON_1}$.

Имеем: треугольники OMN и OM_1N_1 равны. Отрезки $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M_1N_1}$ параллельны и лежат по разные стороны от прямой MM_1, поэтому, учитывая равенство их длин, вытекающее из равенства треугольников, $\overrightarrow{M_1N_1} = -\overrightarrow{MN}$. То есть,

$$(-v) - (-u) = -(v - u).$$

То есть, и при $\lambda = -1$

$$\lambda v - \lambda u = \lambda(v - u).$$

При $\lambda < 0$

$$\lambda v - \lambda u = (-(|\lambda| v)) - (-|\lambda| u) = -((|\lambda| v) - (|\lambda| u)) =$$

$$= -(|\lambda|(v - u)) = -|\lambda|(v - u) = \lambda(v - u).$$

Таким образом, для любых векторов u и v и любого числа λ

$$\lambda v - \lambda u = \lambda(v - u).$$

Поэтому

$$\lambda(u + v) = \lambda(u - (-v)) = \lambda u - \lambda(-v) = \lambda u - \lambda(-1)v = \lambda u + \lambda v,$$

то есть,

7. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ для любых векторов u и v и любого числа λ

Наконец, очевидно,

8. $1 \cdot u = u$ для любого вектора u.

Множество L, элементы которого называются векторами и на котором заданы операции сложения и умножения на числа, удовлетворяющие условиям 1-8, называется *векторным* или *линейным пространством.*

В соответствии с нашими рассмотрениями векторное пространство составляют

1) векторы, параллельные некоторой прямой,

2) векторы, параллельные некоторой плоскости,

3) все векторы пространства.

Но кроме них векторные пространства встречаются и других ситуациях.

Например, множество действительных чисел является векторным пространством.

Например, множество действительных функций с фиксированной областью определения является векторным пространством.

Рассмотрим частный случай последнего примера, множество действительных функций, определенных на начальном отрезке $\{1, 2, \ldots, n\}$ множества натуральных чисел. Опишем такую функцию, сопоставив номеру i число x_i. Сведем это задание функции в строку-таблицу $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Складываются такие строки по каждой позиции независимо. То есть, сумма строк $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $x = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ есть строка $x+y = \{x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n\}$. Произведение строки $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ на число λ есть строка $\lambda x = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\}$. Соответствующее векторное пространство называется *арифметическим n-мерным пространством* и имеет стандартное обозначение $\mathbb{R}^n$.

Сумма векторов и произведение вектора на число называются *линейными операциями.*

§5. Проекция.

Проекция плоскости на прямую параллельно прямой.

Пусть на плоскости π даны две непараллельные прямые p и q. *Проекция* φ плоскости π на прямую p параллельно прямой q

определяется следующим образом. Через произвольную точку M плоскости π проходит единственная прямая $l(M)$, параллельная прямой q. Прямая $l(M)$ параллельна прямой q и поэтому не параллельна прямой p. Поэтому прямая $l(M)$ имеет единственную общую точку $\varphi(M)$ с прямой p_1.

Проекция пространства на плоскость параллельно прямой.

Пусть в пространстве дана плоскость p и непараллельная ей прямая q. *Проекция* φ пространства на плоскость p параллельно прямой q определяется следующим образом. Через произвольную точку M пространства проходит единственная прямая $l(M)$, параллельная прямой q. Прямая $l(M)$ параллельна прямой q и поэтому не параллельна плоскости p. Поэтому прямая $l(M)$ имеет единственную общую точку $\varphi(M)$ с плоскостью p.

Проекция пространства на прямую параллельно плоскости.

Пусть в пространстве дана плоскость q и непараллельная ей прямая p. *Проекция* φ пространства на прямую p параллельно плоскости q определяется следующим образом. Через произвольную точку M пространства проходит единственная плоскость $l(M)$, параллельная плоскости q. Плоскость $l(M)$ параллельна плоскости q и поэтому не параллельна прямой p. Поэтому плоскость $l(M)$ имеет единственную общую точку $\varphi(M)$ с прямой p.

Во всех трех случаях, определив образы точек, мы можем задать образ $\varphi_*(\overrightarrow{AB})$ направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ как $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$.

Для нас важны следующие свойства проекций.

Лемма 5.1. *Проекция направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ равна $\vec{0}$ тогда и только тогда, когда направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ параллелен q.*

Доказательство очевидно.

Лемма 5.2. *Пусть направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ равны. В этом случае $l(A) = l(A_1)$ тогда и только тогда, когда $l(B) = l(B_1)$.*

Доказательство. I. Равенство $l(A) = l(A_1)$ означает совпадение проекций точек A и A_1. В силу леммы 5.1 это равносильно параллельности q направленного отрезка $\overrightarrow{AA_1}$.

Равенство $l(B) = l(B_1)$ означает совпадение проекций точек B и B_1. В силу леммы 5.1 это равносильно параллельности направленного отрезка $\overrightarrow{BB_1}$ q.

II. В силу леммы 3.1 направленные отрезки $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ равны. Поэтому они одновременно либо параллельны q, либо не параллельны q. В силу I отсюда следует требуемое. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Проекции равных направленных отрезков равны.*

Доказательство. Пусть направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ равны.

Пусть $\overrightarrow{A_1'B_1'}$ и $\overrightarrow{A_2'B_2'}$ — проекции направленных отрезков $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$, соответственно.

При сдвиге на вектор $\overrightarrow{A_1'A_2'}$ направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ переходит в равный ему направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, прямая (плоскость) $l(A_1) = l(A_1')$ переходит в параллельную ей прямую (плоскость) $l(A) = l(A_2') = l(A_2)$, прямая (плоскость) $l(B_1) = l(B_1')$ переходит в параллельную ей прямую (плоскость) $l(B)$.

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ равны, $l(A) = l(A_2)$. По лемме 5.2 $l(B) = l(B_2) = l(B_2')$. Поэтому при сдвиге на вектор $\overrightarrow{A_1'A_2'}$ точка B_1' переходит в точку B_2'. направленный отрезок $\overrightarrow{A_1'B_1'}$ переходит в направленный отрезок $\overrightarrow{A_2'B_2'}$, что и дает требуемое.

В силу леммы 5.3 можно говорить уже не об образе отдельного направленного отрезка, но и определить образ $\varphi_*(u)$ вектора u (класса равных направленных отрезков) как класс образа любого направленного отрезка, представляющего вектор u.

Лемма 5.4. $\varphi_*(u + v) = \varphi_*(u) + \varphi_*(v)$ *для любых векторов u и v.*

Доказательство. Отметим точки A, B и C так, чтобы $\overrightarrow{AB} = u$ и $\overrightarrow{BC} = v$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = u + v$,

$$\varphi_*(u + v) = \varphi_*(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(C)} =$$

$$= \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} + \overrightarrow{\varphi(B)\varphi(C)} =$$

$$= \varphi_*(\overrightarrow{AB}) + \varphi_*(\overrightarrow{BC}) = \varphi_*(u) + \varphi_*(v),$$

Что и требовалось.

Лемма 5.5. *$\varphi_*(\lambda u) = \lambda\varphi_*(u)$ для любого числа λ и любого вектора u.*

Доказательство. I. Если $u = \vec{0}$ или $\lambda = 0$, то доказываемое очевидно.

II. Пусть $\lambda > 0$. Отметим точки $A \in p$, B и C так, чтобы $\overrightarrow{AB} = u$ и $\overrightarrow{AC} = \lambda u$.

Тогда прямые $B\varphi(B)$ и $C\varphi(C)$ параллельны, треугольники $AB\varphi(B)$ и $AC\varphi(C)$ подобны с коэффициентом подобия λ. Отрезки $A\varphi(B)$ и $A\varphi(C)$ лежат по одну сторону от точки A, поэтому, учитывая соотношение их длин, известное из подобия треугольников, $\overrightarrow{A\varphi(C)} = \lambda\overrightarrow{A\varphi(B)}$. То есть,

$$\varphi_*(\lambda u) = \lambda\varphi_*(u).$$

III. Пусть $\lambda = -1$. Отметим точки A и B так, чтобы $\overrightarrow{AB} = u$.

Тогда $\overrightarrow{BA} = -u$,

$$\varphi_*(-u) = \varphi_*(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{\varphi(B)\varphi(A)} = -\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = -\varphi_*(\overrightarrow{AB}) = -\varphi_*(u),$$

То есть, формула

$$\varphi_*(\lambda u) = \lambda\varphi_*(u).$$

верна и для $\lambda = -1$.

IV. Пусть $\lambda < 0$. Тогда

$$\varphi_*(\lambda u) = \varphi_*(-|\lambda|u) = \varphi_*(-(|\lambda|u)) = (-1)\varphi_*(|\lambda|u) = (-1)|\lambda|\varphi_*(u) = \lambda\varphi_*(u),$$

что дает требуемое в этом случае. Лемма доказана.

Отображение f одного пространства векторов в другое пространства векторов называется *линейным*, если $f(u + v) = f(u) + f(v)$ и $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ для любых векторов u и v и любого числа λ.

В леммах 5.4 и 5.5 мы убедились, что отображение соответствующих пространств векторов, порожденное любой их этих проекций, является линейным.

§6. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Коллинеарные и компланарные векторы.

Пусть даны векторы u_1, u_2, $\ldots$, u_k и числа λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k. Выражение $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$ называется *линейной комбинацией* векторов u_1, u_2, $\ldots$, u_k.

Линейная комбинация $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$, все коэффициенты которой равны нулю, то есть, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, называется *тривиальной*. Любая другая называется *нетривиальной*. То есть, линейная комбинация $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$, является *нетривиальной* тогда и только тогда, когда по крайней мере один из коэффициентов λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k отличен от нуля.

Тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору $\vec{0}$. Векторы u_1, u_2, $\ldots$, u_k называются *линейно независимыми*, если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов отлична от $\vec{0}$.

Очевидно, *система, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима.*

Лемма 6.1. *Если один из векторов u_1, u_2, $\ldots$, u_k равен линейной комбинации остальных, то система u_1, u_2, $\ldots$, u_k линейно зависима.*

Доказательство. Положим для определенности, вектор u_1 равен линейной комбинации векторов $u_2, \ldots, u_k$, то есть, существуют такие числа λ_2, $\ldots$, λ_k, что $u_1 = \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$. Тогда $(-1)u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \vec{0}$. Линейная комбинация $(-1)u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \vec{0}$ нетривиальна, так как коэффициент при u_1 отличен от нуля. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Пусть система векторов u_1, u_2, $\ldots$, u_k линейно независима, а система векторов v, u_1, u_2, $\ldots$, u_k линейно зависима. Тогда вектор v равен линейной комбинации векторов u_1, u_2, $\ldots$, u_k.*

Доказательство. Так как система векторов v, u_1, u_2, $\ldots$, u_k линейно зависима, то существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_0 v + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$, равная $\vec{0}$.

Если $\lambda_0 = 0$, то в силу нетривиальности этой линейной комбинации один из коэффициентов λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k отличен от нуля и мы имеем нетривиальную линейную комбинацию $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$, векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$, равную $\vec{0}$, что противоречит первоначальному предположению о линейной независимости векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$ и $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} u_2 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} u_k$, что и утверждалось.

Следствие. *Пусть система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$ линейно зависима. Тогда либо $u_1 = \vec{0}$, либо при каком-то $i = 1, 2, \ldots, k$ вектор u_i равен линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$.*

В самом деле, если $u_1 \neq \vec{0}$, рассмотрим множество A тех индексов j, для которых система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_j$ линейно зависима. Множество A непусто, так как ему принадлежит индекс k. В силу условия $u_1 \neq \vec{0}$ число 1 не принадлежит A, поэтому наименьший элемент i множества A больше 1. Поэтому система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$ непуста и линейно независима, а система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_i$ линейно зависима и лемма 6.2 дает требуемое.

Лемма 6.3. *Пусть система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$ линейно зависима. Тогда любая система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l$, расширяющая систему $u_1, u_2, \ldots, u_k$ тоже линейно зависима.*

Доказательство. В силу линейной зависимости системы $u_1, u_2, \ldots, u_k$ найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, из которых по крайней мере одно отлично от нуля, что $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \vec{0}$. Тогда $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k + 0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 0 v_l$ — нетривиальная линейная комбинация, равная $\vec{0}$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Всякая (непустая) подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.*

Система, состоящая из одного нулевого вектора $\vec{0}$, линейно зависима: $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$, поэтому из леммы 6.3 вытекает

Следствие 2. *Система векторов включающая нулевой вектор $\vec{0}$ линейно зависима.*

Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_k$ называются *коллинеарными*, если они параллельны какой-то одной прямой, то есть, если мы представим их направленными отрезками с одним общим началом, то все все эти направленные отрезки окажутся лежащими на одной прямой.

Теорема 6.1. *Пусть векторы u и v коллинеарны и $u \neq \vec{0}$. Тогда найдется такое число λ, что $v = \lambda u$.*

Доказательство. Определим число λ как отношение длины вектора v к длине вектора u, взятое со знаком $+$, если векторы сонаправлены, и со знаком $-$, если векторы направлены противоположно. Остальное следует из определения произведения вектора на число. Теорема доказана.

Следствие. *Система коллинеарных векторов, содержащая два или более элементов, линейно зависима.*

В самом деле, если в систему входит нулевой вектор, получаем требуемое из следствия леммы 6.3. Если все векторы системы ненулевые, по теореме 6.1 и лемме 6.1 она содержит линейно зависимую подсистему из двух векторов. Теперь получаем требуемое из леммы 6.3.

С другой стороны, пусть векторы u и v линейно зависимы. Если они нулевые, то они параллельны любой прямой и, следовательно, коллинеарны. Пусть вектор u — ненулевой. Он составляет линейно независимую систему. По лемме 6.2 $v = \lambda u$. Коллинеарность векторов u и v следует теперь из определения умножения вектора на число. Нами доказана

Теорема 6.2. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_k$ называются *компланарными*, если они параллельны какой-то одной плоскости, то есть, если мы представим их направленными отрезками с одним общим началом, то все все эти направленные отрезки окажутся лежащими в одной плоскости. Очевидно, всякая коллинеарная система векторов является компланарной.

Теорема 6.3. *Пусть векторы u, v неколлинеарны, а векторы u, v, w компланарны. Тогда найдутся такие числа λ и μ, что $w = \lambda u + \mu v$.*

Доказательство. Векторы u, v неколлинеарны, поэтому они линейно независимы и, следовательно, оба они ненулевые, а будучи приложенными к одной точке O, они определят пару пересекающихся прямых $l(u)$ и $l(v)$, соответственно. Через эти прямые проходит единственная плоскость π.

Представим вектор w направленным отрезком $\overrightarrow{OM}$ с началом в точке O. В силу компланарности векторов u, v, w и единственности плоскости π точка M лежит в π.

Пусть M_1 — проекция точки M в плоскости π на прямую $l(u)$ параллельно прямой $l(v)$. Тогда вектор $\overrightarrow{OM_1}$ параллелен прямой $l(u)$. По лемме 5.1 вектор $\overrightarrow{M_1M}$ параллелен прямой $l(v)$. Имеем: $w = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$.

Векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и u коллинеарны, $u \neq \vec{0}$, поэтому в силу леммы 6.4 существует такое число λ, что $\overrightarrow{OM_1} = \lambda u$.

Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и v коллинеарны, $v \neq \vec{0}$, поэтому в силу леммы 6.4 существует такое число μ, что $\overrightarrow{M_1M} = \mu v$.

Таким образом, $w = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \lambda u + \mu v$. Теорема доказана.

Следствие. *Система компланарных векторов, содержащая не менее трех элементов, линейно зависима.*

В самом деле, если в систему входит нулевой вектор, получаем требуемое из следствия леммы 6.3.

Если все векторы системы ненулевые, возьмем один из них u_1 и зафиксируем прямую l, параллельную вектору u_1.

Если все векторы системы параллельны l, то наша система коллинеарна и мы имеем требуемое.

Если в системе найдется вектор u_2, не параллельный l, то пара векторов u_1 и u_2 неколлинеарна и то по теореме 6.3 любой третий вектор системы представляется в виде линейной комбинации u_1 и u_2 и мы имеем требуемое из лемм 6.1 и 6.3.

С другой стороны, пусть векторы u, v и w линейно зависимы. Из следствия леммы 6.2 вытекает, что один из них равен линейной комбинации остальных. Пусть $w = \lambda u + \mu v$. Два вектора всегда компланарны. Пусть векторы u и v параллельны плоскости π. Сложение векторов и умножение вектора на число не выводит нас за пределы множества векторов, параллельных плоскости π. Поэтому вектор w тоже параллелен плоскости π. Нами доказана

Теорема 6.4. *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Теорема 6.5. *Пусть векторы u, v и w некомпланарны. Тогда* *для любого вектора x найдутся такие числа λ, μ и ν, что $x = \lambda u + \mu v + \nu w$.*

Доказательство. Векторы u, v линейно независимы и, следовательно, оба они ненулевые, а будучи приложенными к одной точке O, они определят пару пересекающихся прямых $l(u)$ и $l(v)$, соответственно. Через эти прямые проходит единственная плоскость π.

Прямая $l(w)$, проходящая через точку O параллельно вектору w, не параллельна плоскости π (ибо векторы u, v и w некомпланарны).

Представим вектор x направленным отрезком $\overrightarrow{OM}$ с началом в точке O.

Пусть M_1 — проекция точки M на плоскость π параллельно прямой $l(w)$. Тогда вектор $\overrightarrow{OM_1}$ параллелен плоскости π. По лемме 5.1 вектор $\overrightarrow{M_1M}$ параллелен прямой $l(w)$. Имеем: $w = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$.

По теореме 6.3 существуют такие числа λ и μ, что $\overrightarrow{OM_1} = \lambda u + \mu v$.

Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и w коллинеарны, $v \neq \vec{0}$, поэтому в силу леммы 6.4 существует такое число ν, что $\overrightarrow{M_1M} = \nu w$.

Таким образом, $w = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \lambda u + \mu v + \nu w$. Теорема доказана.

§7. Базис. Координаты векторов.

Лемма 7.1. *Пусть дана линейно независимая система векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$, вектор v представим в виде линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Тогда представление вектора v в виде линейной комбинации векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$ единственно.*

Доказательство. Пусть $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$ и $v = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_k u_k$. Наша цель — доказать, что $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_k = \mu_k$.

Вычитая из равенства $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$ равенство $v = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_k u_k$, получаем: $\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)u_1 + (\lambda_2 - \mu_2)u_2 + \cdots + (\lambda_k - \mu_k)u_k$.

Но система векторов u_1, u_2, $\ldots$, u_k, линейно независима, поэтому коэффициенты в линейной комбинации $(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + (\lambda_2 -$

$\mu_2)u_2 + \dots + (\lambda_k - \mu_k)u_k$ равны нулю: $\lambda_1 - \mu_1 = 0$, $\lambda_2 - \mu_2 = 0$, $\dots$, $\lambda_k - \mu_k = 0$, что и дает требуемое. Лемма доказана.

Систему векторов на прямой, на плоскости или в пространстве назовем *базисом*, если она линейно независима, а любая система векторов, содержащая ее в качестве собственной части, уже линейно зависима.

В силу леммы 6.2 Если на прямой, плоскости или в пространстве зафиксирован некоторый базис, то любой вектор (этой прямой, плоскости или, соответственно, пространства) представляется в виде линейной комбинации векторов базиса.

Коэффициенты этой линейной комбинации называются *координатами* вектора (в данном базисе).

В силу леммы 7.1 координаты вектора определены однозначно.

Когда базис $u_1, u_2, \dots, u_k$ фиксирован, равенство $v = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ означает представление вектора v в виде линейной комбинации $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$.

Иногда координаты вектора выписываются в столбец:

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

В силу теорем 6.1 и 6.2 базис на прямой составляет любой параллельный ей ненулевой вектор $\mathbf{e}$. У каждого вектора прямой одна координата.

Пусть $u = \{x\}$, то есть $u = x\mathbf{e}$. Тогда $\langle u \rangle = \langle x\mathbf{e} \rangle = x \langle \mathbf{e} \rangle$.

Координата вектора $\mathbf{e}$ равна 1. Он называется также *направляющим вектором* прямой.

В силу теорем 6.2 и 6.3 базис на плоскости составляет любая пара $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ неколлинеарных векторов, параллельных этой плоскости. У каждого вектора плоскости две координаты.

В силу теорем 6.4 и 6.5 базис в пространстве составляет любая тройка $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ некомпланарных векторов. У каждого вектора пространства три координаты.

§8. Линейные операции в координатах.

Пусть дана система векторов $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ и $v_1 = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$ и $v_2 = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n$.

Тогда $v_1 + v_2 = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n + y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_ku_k = (x_1 + y_1)u_1 + (x_2 + y_2)u_2 + \cdots + (x_n + y_n)u_n$.

Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ составляют базис, то полученное равенство означает, что координаты суммы векторов $v_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $v_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ равны $\{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}$, то есть, *сумме векторов соответствует сумма строк координат.*

При записи наборов координат в столбцы это выглядит так: если

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \text{ и } v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}, \text{ то } v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_k + y_k \end{pmatrix}.$$

Пусть λ — любое число. Тогда $\lambda v_1 = \lambda x_1u_1 + \lambda x_2u_2 + \cdots + \lambda x_nu_n$, то есть, *произведению вектора* $v_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *на число* λ *соответствует строка* $\{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\}$ *из произведений соответствующих координат на это число.*

При записи наборов координат в столбцы это выглядит так:

$$\lambda v_1 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_k \end{pmatrix}.$$

И строку $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, и столбец

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

можем считать формой записи табличного задания действительной функции, определенной на начальном отрезке $\{1, 2, \ldots, k\}$ множества натуральных чисел, см. §4. Как было сказано, такие функции составляют линейное пространство $\mathbb{R}^k$. Складываются такие строки и столбцы по каждой позиции независимо. То есть, сумма строк $a_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $a_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ есть строка $a_1 + a_2 = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k\}$. Произведение строки $a_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ на число λ есть строка $\lambda a_1 = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k\}$. Соответственно, для столбцов: если

$$a_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \text{ и } a_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix},$$

то

$$a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_k + y_k \end{pmatrix}.$$

и

$$\lambda a_1 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_k \end{pmatrix}.$$

Совпадение этих формул с координатной записью суммы векторов и произведения вектора на число означает, что соответствие f, сопоставляющее вектору строку (или столбец) его координат, является линейным отображением: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ и $f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1)$. Но в нашем случае мы имеем больше. Наше отображение f является к тому же взаимно однозначным.

Взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства L_1 на векторное пространство L_2 называется *изоморфизмом.* Как и для любого взаимно однозначного отображения для изоморфизма f определено обратное отображение $g : L_2 \to L_1$.

Лемма 8.1. *Отображение $g : L_2 \to L_1$. обратное к изоморфизму $f : L_1 \to L_2$ векторного пространства L_1 на векторное пространство L_2, является линейным.*

Доказательство. I. Пусть v_1, v_2 — элементы пространства L_2, u_1 и u_2 — их прообразы при отображении f, то есть, $u_1 = f^{-1}(v_1) = g(v_1)$ и $u_2 = f^{-1}(v_2) = g(v_2)$. Тогда $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2$. Поэтому $g(v_1 + v_2) = f^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = g(v_1) + g(v_2)$.

II. Пусть в дополнение к I λ — любое действительное число. Тогда $f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1) = \lambda v_1$. Поэтому $g(\lambda v_1) = f^{-1}(\lambda v_1) = \lambda u_1 = \lambda g(v_1)$. Лемма доказана.

То есть, отображение, обратное к изоморфизму, тоже является изоморфизмом.

Для любого линейного отображения $f : L_1 \to L_2$ $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$. Для любого линейного отображения $f : L_1 \to L_2$ и любой линейной комбинации $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$ элементов пространства L_1 имеем:

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_k f(u_k).$$

Поэтому, если векторы u_1, u_2, $\ldots$, u_k линейно зависимы, то линейно зависимы и векторы $f(u_1)$, $f(u_2)$, $\ldots$, $f(u_k)$. Если наше отображение f является изоморфизмом, то в силу сказанного выше, если векторы $f(u_1)$, $f(u_2)$, $\ldots$, $f(u_k)$ линейно зависимы, то линейно зависимы и векторы u_1, u_2, $\ldots$, u_k. То есть,

Лемме 8.2 *При изоморфизме* $f : L_1 \to L_2$ *векторы* u_1, u_2, $\ldots$, $u_k \in L_1$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы векторы* $f(u_1)$, $f(u_2)$, $\ldots$, $f(u_k) \in L_2$.

Следствие. *Система векторов прямой, плоскости или пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависимы строки (= столбцы) их координат.*

§9. Аффинная система координат.

Введение *аффинной системы координат* на прямой, на плоскости, в пространстве состоит в фиксировании начальной точки, или *начала* O и базиса. Начало и базис составляют *репер*.

При фиксировании начала O мы получаем возможность сопоставить каждой точке M (прямой, плоскости, пространства) ее *радиус-вектор* $r_M = \overrightarrow{OM}$. Он не зависит от выбора базиса. После выбора базиса мы получаем возможность говорить о координатах. *Координатами точки* называются координаты ее радиуса-вектора.

Для любых двух точек M и N $r_N = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = r_M + \overrightarrow{MN}$, поэтому $\overrightarrow{MN} = r_N - r_M$. В координатах: *координаты направленного отрезка равны разности соответствующих координат конца и начала.*

На прямой.

Для точек $M(x_1)$ и $N(x_2)$ имеем: $\overrightarrow{MN} = \{x_2 - x_1\}$.

На плоскости.

Репер на плоскости состоит из начала O и пары базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Прямая, проходящая через начало O параллельно вектору $\mathbf{e}_1$, называется *осью абсцисс*. Прямая, проходящая через начало O параллельно вектору $\mathbf{e}_2$, называется *осью ординат*. Первая координата точки или вектора называется абсциссой этой точки или этого вектора, а вторая координата называется ординатой этой точки или этого вектора.

Стандартным (но не обязательным) является обозначение первой координаты буквой x, второй координаты — буквой y. В соответствии с этим первая ось координат называется также осью Ox, вторая — осью Oy.

Для точек $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ имеем: $\overrightarrow{MN} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$.

В пространстве.

Репер в пространстве состоит из начала O и тройки базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Как и в случае плоскости прямая, проходящая через начало O параллельно вектору $\mathbf{e}_1$, называется *осью абсцисс*, а прямая, проходящая через начало O параллельно вектору $\mathbf{e}_2$, называется *осью ординат*. Прямая, проходящая через начало O параллельно вектору $\mathbf{e}_3$, называется *осью аппликат*.

Первая координата точки или вектора называется абсциссой этой точки или этого вектора, вторая координата называется ординатой этой точки или этого вектора, третья координата называется аппликатой этой точки или этого вектора.

Стандартным (но не обязательным) является обозначение первой координаты буквой x, второй координаты буквой — y, третьей координаты буквой — z. В соответствии с этим первая ось координат называется также осью Ox, вторая — осью Oy, третья — осью Oz. Плоскость, проходящая через координатные оси Ox и Oy имеет стандартное обозначение Oxy. Плоскость, проходящая через координатные оси Ox и Oz имеет стандартное обозначение Oxz. Плоскость, проходящая через координатные оси Oy и Oz имеет стандартное обозначение Oyz.

Для точек $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ имеем: $\overrightarrow{MN} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

§10. Переход к новой аффинной системе координат на прямой и параметрические уравнения прямой на плоскости и в пространстве.

Переход к новой аффинной системе координат на прямой

Аффинная система координат на прямой задается указанием начала O и направляющего вектора $\mathbf{e}$.

Новую аффинную систему координат мы задаем описанием нового репера в старой системе координат, то есть, мы указываем новое начало O_1, задавая его координату в старом репере $O_1(x_0)$, и новый направляющий вектор $\mathbf{f}$, задавая его координату в старом базисе: $\mathbf{f} = \{c\}$.

Теперь мы должны ответить на вопрос, как связана координата x текущей точки M прямой в старом репере O, $\mathbf{e}$ с с координатой t этой же точки M в новом репере O_1, $\mathbf{f}$.

Для направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ имеем: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$,

$$x\mathbf{e} = x_0\mathbf{e} + t\mathbf{f} = x\mathbf{e} = x_0\mathbf{e} + ct\mathbf{e} = x\mathbf{e} = (x_0 + ct)\mathbf{e}.$$

В силу единственности разложения вектора по линейно независимой системе $x = x_0 + ct$. Мы установили закон преобразования координат.

Параметрические уравнения прямой на плоскости

Пусть аффинная система координат на плоскости задана указанием начала O и базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Пусть аффинная система координат на лежащей в этой плоскости прямой задана указанием начала $O_1(x_0, y_0)$, и направляющего вектора $\mathbf{f} = \{\alpha, \beta\}$ их координатами в репере A плоскости, состоящего из O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Теперь свяжем координаты x, y текущей точки M прямой в репере A с координатой t этой же точки M в репере O_1, $\mathbf{f}$ на прямой.

Для направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ имеем: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$,

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + t\mathbf{f} = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + t(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) = (x_0 + \alpha t)\mathbf{e}_1 + (y_0 + \beta t)\mathbf{e}_2,$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

Эти уравнения и называются *параметрическими уравнениями прямой на плоскости.*

Параметрические уравнения прямой в пространстве.

Пусть аффинная система координат в пространстве задана указанием начала O и базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Пусть аффинная система координат на прямой задана указанием начала $O_1(x_0, y_0, z_0)$, и направляющего вектора $\mathbf{f} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ их координатами в репере A пространства, состоящего из O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Теперь свяжем координаты x, y, z текущей точки M прямой в репере A с координатой t этой же точки M в репере O_1, $\mathbf{f}$ на прямой.

Для направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ имеем: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$,

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3 + t\mathbf{f} =$$

$$= x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3 + t(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3) =$$

$$= (x_0 + \alpha t)\mathbf{e}_1 + (y_0 + \beta t)\mathbf{e}_2 + (z_0 + \gamma t)\mathbf{e}_3.$$

В силу единственности разложения вектора по линейно независимой системе

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

Эти уравнения и называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве.*

§11. Переход к новой аффинной системе координат на плоскости и параметрические уравнения плоскости в пространстве.

Переход к новой аффинной системе координат на плоскости.

Аффинная система координат на плоскости задается указанием репера A, состоящего из начала O и базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Новую аффинную систему координат мы задаем описанием нового репера B в старой системе координат, то есть, мы указываем новое начало O_1, задавая его координаты в старом репере A: $O_1(x_0, y_0)$, и новый базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, задавая координаты составляющих его векторов в старом базисе A: $\mathbf{f}_1 = \{c_{11}, c_{21}\}$, $\mathbf{f}_2 = \{c_{12}, c_{22}\}$.

Теперь мы должны ответить на вопрос, как связана координаты x, y текущей точки M плоскости в репере A с координатами s, t этой же точки M в новом репере B.

Для направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ имеем: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$,

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_1 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + s\mathbf{f}_1 + t\mathbf{f}_2 =$$

$$= x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + c_{11}s\mathbf{e}_1 + c_{21}s\mathbf{e}_2 + c_{12}t\mathbf{e}_1 + c_{22}t\mathbf{e}_2 =$$

$$= (x_0 + c_{11}s + c_{12}t)\mathbf{e}_1 + (y_0 + c_{21}s + c_{22}t)\mathbf{e}_2.$$

В силу единственности разложения вектора по линейно независимой системе

$$\begin{cases} x = x_0 + c_{11}s + c_{12}t \\ y = y_0 + c_{21}s + c_{22}t. \end{cases}$$

Эти уравнения и называются *уравнениями преобразования координат* при переходе от A к B.

Эту систему можно записать в виде матричного равенства $U = CV + U_0$, где

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

а произведение CV матрицы C на столбец V есть столбец

$$\begin{pmatrix} c_{11}s + c_{12}t \\ c_{21}s + c_{22}t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}.$$

Параметрические уравнения плоскости в пространстве.

Пусть аффинная система координат в пространстве задана указанием репера A, состоящего из начала O и базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Пусть аффинная система координат на плоскости задана указанием начала $O_1(x_0, y_0, z_0)$, и базисных векторов $\mathbf{f}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\mathbf{f}_2 = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ их координатами в репере A.

Теперь свяжем координаты x, y, z текущей точки M прямой в репере A с координатой t этой же точки M в репере O_1, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$.

Для направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ имеем: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$,

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3 + s\mathbf{f}_1 + t\mathbf{f}_2 =$$

$$= x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3 + s(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta_1\mathbf{e}_2 + \gamma_1\mathbf{e}_3) + t(\alpha_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \gamma_2\mathbf{e}_3) =$$

$$= (x_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 t)\mathbf{e}_1 + (y_0 + \beta_1 s + \beta_2 t)\mathbf{e}_2 + (z_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 t)\mathbf{e}_3.$$

В силу единственности разложения вектора по линейно независимой системе

$$
\begin{cases}
x = x_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 t \\
y = y_0 + \beta_1 s + \beta_2 t \\
z = z_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 t
\end{cases}
$$

Эти уравнения и называются *параметрическими уравнениями плоскости в пространстве.*

§12. Переход к новой аффинной системе координат в пространстве.

Аффинная система координат в пространстве задается указанием репера A, состоящего из начала O и базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Новую аффинную систему координат мы задаем описанием нового репера B в старой системе координат, то есть, мы указываем новое начало O_1, задавая его координаты в старом репере A: $O_1(x_0, y_0, z_0)$, и новый базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, задавая координаты составляющих его векторов в старом базисе A: $\mathbf{f}_1 = \{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}$, $\mathbf{f}_2 = \{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}$, $\mathbf{f}_2 = \{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}$.

Теперь мы должны ответить на вопрос, как связана координаты x, y, z текущей точки M плоскости в репере A с координатами r, s, t этой же точки M в новом репере B.

Для направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ имеем: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$,

$$
x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3 + r\mathbf{f}_1 + s\mathbf{f}_2 + t\mathbf{f}_3 =
$$

$$
= x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3 + c_{11}r\mathbf{e}_1 + c_{21}r\mathbf{e}_2 + c_{31}r\mathbf{e}_3 +
$$

$$
+ c_{12}s\mathbf{e}_1 + c_{22}s\mathbf{e}_2 + c_{32}s\mathbf{e}_3 + c_{13}t\mathbf{e}_1 + c_{23}t\mathbf{e}_2 + c_{33}t\mathbf{e}_3 =
$$

$$
= (x_0 + c_{11}r + c_{12}s + c_{13}t)\mathbf{e}_1 + (y_0 + c_{21}r + c_{22}s + c_{23}t)\mathbf{e}_2 + (z_0 + c_{31}r + c_{32}s + c_{33}t)\mathbf{e}_3.
$$

В силу единственности разложения вектора по линейно независимой системе

$$
\begin{cases}
x = x_0 + c_{11}r + c_{12}s + c_{13}t \\
y = y_0 + c_{21}r + c_{22}s + c_{23}t \\
z = z_0 + c_{31}r + c_{32}s + c_{33}t
\end{cases}
$$

Эти уравнения и называются *уравнениями преобразования координат* при переходе от A к B. Эту систему можно записать в виде матричного равенства $U = CV + U_0$, где

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

а произведение CV матрицы C на столбец V есть столбец

$$\begin{pmatrix} c_{11}r + c_{12}s + c_{13}t \\ c_{21}r + c_{22}s + c_{23}t \\ c_{31}r + c_{32}s + c_{33}t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix}.$$

§13. Формулы преобразования координат.

Обсудим формулы преобразования координат.

В плоском случае эта система имеет вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}s + c_{12}t + x_0 \\ y = c_{21}s + c_{22}t + y_0. \end{cases}$$

В случае пространства эта система имеет вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}r + c_{12}s + c_{13}t + x_0 \\ y = c_{21}r + c_{22}s + c_{23}t + y_0 \\ z = c_{31}r + c_{32}s + c_{33}t + z_0 \end{cases}$$

Обе системы можно записать в виде матричного равенства $U = CV + U_0$, где

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

для случая плоскости и

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

для случая пространства.

Такой же вид имеет уравнение преобразования координат и в случае прямой. В этом случае матрица C является квадратной матрицей порядка 1 и состоит из одного элемента, столбцы имеют длину 1 и тоже состоят из одного элемента. То есть матричное равенство $(x) = (c)(t) + (x_0)$ практически не отличается от скалярного $x = ct + x_0$.

В этих системах столбец свободных членов — это столбец координат нового начала, столбец коэффициентов при координате соответствующего номера — это столбец координат соответствующего вектора нового базиса.

Из последнего замечания, в частности, следует, что столбцы матрицы C линейно независимы (= определитель матрицы C отличен от нуля). В обратную сторону, если у нас есть система указанного вида с матрицей C столбцы которой линейно независимы (= определитель матрицы C отличен от нуля), то взяв в качестве нового начала точку, координаты которой составляют столбец свободных членов, а в качестве i-того базисного вектора — вектор, координаты которого составляют i-тый столбец матрицы C, мы получим новый репер, переход к которому задается нашей системой.

Две такие системы, в чем-то различные, не могут задавать переход к одному и тому же новому базису. В самом деле, все новые координаты нового начала равны нулю. Подставляя их в систему, получаем, что старые координаты нового начала составляют столбец свободных членов.

Посмотрим, как связаны формулы преобразования координат точек с формулами преобразования координат векторов. Пусть мы имеем направленный отрезок $\overrightarrow{MN}$ Пусть старые координаты точки M составляют столбец U_M старые координаты точки N составляют столбец U_N, новые координаты точки M составляют столбец M_N, новые координаты точки N составляют столбец V_N. Тогда $U_M = CV_M + U_0$ и $U_N = CV_N + U_0$. Вычитая из второго равенства первое, получаем $U_N - U_M = C(V_N - V_M)$, но здесь $U_N - U_M$ — это столбец старых координат направленного отрезка $\overrightarrow{MN}$, $V_N - V_M$ — это столбец новых координат направленного отрезка $\overrightarrow{MN}$.

Таким образом, если $U = CV + U_0$ — векторная запись системы преобразования координат точек при переходе к новому реперу, то система преобразования координат векторов при этом переходе имеет вид: $U = CV$, то есть система преобразования координат векторов получается из системы преобразования координат точек отбрасыванием свободных членов уравнений.

В плоском случае эта система преобразования координат точек при переходе к новому реперу имеет вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}s + c_{12}t + x_0 \\ y = c_{21}s + c_{22}t + y_0. \end{cases}$$

Соответствующая система преобразования координат векторов имеет вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}s + c_{12}t \\ y = c_{21}s + c_{22}t. \end{cases}$$

В случае пространства система преобразования координат точек при переходе к новому реперу имеет вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}r + c_{12}s + c_{13}t + x_0 \\ y = c_{21}r + c_{22}s + c_{23}t + y_0 \\ z = c_{31}r + c_{32}s + c_{33}t + z_0. \end{cases}$$

Соответствующая система преобразования координат векторов имеет вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}r + c_{12}s + c_{13}t \\ y = c_{21}r + c_{22}s + c_{23}t \\ z = c_{31}r + c_{32}s + c_{33}t. \end{cases}$$

На i-том месте в столбце координат i-того базисного вектора стоит единица, на остальных местах — нули. Подставляя такие новые координаты новых базисных векторов в наши уравнения, получаем, что i-тый столбец матрицы C — это столбец старых координат i-того базисного вектора нового базиса.

Начало остается на месте тогда и только тогда, когда столбец U_0 является нулевым. Это имеет место тогда и только тогда, когда система преобразования координат точек совпадает с системой преобразования координат векторов. Для случая плоскости обе системы имеют вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}s + c_{12}t \\ y = c_{21}s + c_{22}t. \end{cases}$$

Для случая пространства обе системы имеют вид:

$$\begin{cases} x = c_{11}r + c_{12}s + c_{13}t \\ y = c_{21}r + c_{22}s + c_{23}t \\ z = c_{31}r + c_{32}s + c_{33}t. \end{cases}$$

Базис не меняется месте тогда и только тогда, когда матрица C является единичной. Это имеет место тогда и только тогда, когда система преобразования координат точек в матричной форме имеет вид $U = V + U_0$. Для случая плоскости в развернутой записи система имеет вид:

$$\begin{cases} x = s + x_0 \\ y = t + y_0. \end{cases}$$

Для случая пространства в развернутой записи система имеет вид:

$$\begin{cases} x = r + x_0 \\ y = s + y_0 \\ z = t + z_0. \end{cases}$$

Глава 2.
Скалярное произведение. Векторное произведение. Ориентированная площадь. Ориентированный объем.

§1. Скалярное произведение.

Удобно обсуждать свойства вводимого понятия, представляя векторы направленными отрезками с общим началом. Зафиксируем такое начало O. Переход к другому началу O_1 осуществляется сдвигом на вектор $\overrightarrow{OO_1}$.

Пусть нам даны два вектора $u = \overrightarrow{OM}$ и $v = \overrightarrow{ON}$.

Если один из векторов u и v равен $\vec{0}$, то скалярным произведением (u, v) называется число 0.

Это определение не зависит от выбора начала O, так как при сдвиге длины векторов сохраняются.

В противном случае скалярным произведением (u, v) векторов u и v называется число, равное произведению $|u| \cdot |v| \cos\varphi$ длин векторов и косинуса угла между ними.

Это определение не зависит от выбора начала O в силу теоремы косинусов, так как при сдвиге длины векторов сохраняются и

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{ON}|^2 - 2|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cos\varphi,$$

то есть,

$$|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cos\varphi = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{ON}|^2 - |\overrightarrow{MN}|^2),$$

где φ — как раз угол между направленными отрезками $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$.

В этих определениях векторы u и v равноправны. Если их поменять местами, то значение определенного таким образом скалярного произведения не изменится, поэтому

1. $(u, v) = (v, u)$ для любых векторов u и v (*Скалярное произведение симметрично*).

Пусть вектор v — ненулевой, l — ось, сонаправленная с вектором v и проходящая через точку O. Символом u' обозначим ортогональную проекцию вектора u на ось l. Символом M' обозначим проекцию точки M на ось l. Ортогональная проекция плоскости на ось l это проекция плоскости на l параллельно прямой, перпендикулярной l. Ортогональная проекция пространства на ось l это проекция пространства на l параллельно плоскости, перпендикулярной l.

Лемма 1.1. *Пусть векторы u и v — ненулевые. Тогда $\langle u' \rangle = |u| \cos\varphi$.*

Доказательство достаточно провести для плоского случая, так как любая пара векторов (в данном случае u и v) компланарна (и вектор u' лежит лежит в той же плоскости).

Здесь $\langle u' \rangle$ обозначает алгебраическое значение вектора u' на оси l, $\cos\varphi$ угол между векторами u и v.

В прямоугольном треугольнике OMM' имеем: $|OM'| = |OM| \cdot |\cos\varphi|$.

Если угол φ острый, то $\cos\varphi > 0$, а векторы OM' и v сонаправлены. Из сонаправленности векторов OM' и v следует, что алгебраическое значение вектора OM' на оси l положительно, что и дает требуемое равенство $\langle u' \rangle = |u| \cos\varphi$ в этом случае.

Если угол φ прямой, то $\cos\varphi = 0$, $M = O'$, то есть, $u' = \vec{0}$, что и дает требуемое равенство $\langle u' \rangle = 0 = |u| \cos\varphi$ в этом случае.

Если угол φ тупой, то $\cos\varphi < 0$, а векторы OM' и v направлены противоположно. Из этого следует, что алгебраическое значение вектора OM' на оси l отрицательно, что и дает требуемое равенство $\langle u' \rangle = |u| \cos\varphi$ в этом случае. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть v — ненулевой вектор. Тогда $(u, v) = \langle u' \rangle \, |v|$ для любого вектора u.*

Доказательство. Если вектор u — ненулевой, то доказываемое вытекает из леммы 1.1 и определения скалярного произведения.

Если вектор u — нулевой, то по определению скалярного произведения слева стоит нуль. Справа $u' = \vec{0}$ и поэтому $\langle u' \rangle = 0$. Лемма доказана.

Но и проекция, и алгебраическое значение вектора на оси линейно зависят от своих аргументов, поэтому если вектор v — ненулевой и $u = u_1 + u_2$, то $u' = u_1' + u_2'$, $\langle u' \rangle = \langle u_1' \rangle + \langle u_2' \rangle$, $(u, v) = \langle u' \rangle |v| = \langle u_1' + u_2' \rangle |v| = \langle u_1' \rangle |v| + \langle u_2' \rangle |v| = (u_1, v) + (u_2, v)$, то есть, $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$. Мы доказали это равенство в предположении, что $v \neq \vec{0}$. Если $v = \vec{0}$, то $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) = (u_2, v) = 0$ по определению скалярного произведения и равенство $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$ опять справедливо. Таким образом,

2. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$ для любых векторов u_1, u_2 и v.

Воспользовавшись еще раз линейностью проекции и алгебраического значения вектора на оси, получаем, что если вектор v — ненулевой, то для любого вектора u и любого числа λ

$$(\lambda u, v) = \langle (\lambda u)' \rangle |v| = \langle \lambda u' \rangle |v| = \lambda \langle u' \rangle |v| = \lambda(\langle u' \rangle |v|) = \lambda(u, v).$$

Мы доказали это равенство в предположении, что $v \neq \vec{0}$. Если $v = \vec{0}$, то $(\lambda u, v) = \lambda(u, v) = 0$ по определению скалярного произведения и равенство $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ опять справедливо. Таким образом,

3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ для любых векторов u и v и любого числа λ.

Свойства 2 и 3 означают *линейность* скалярного произведения по первому аргументу.

Далее,

2$'$. $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ для любых векторов u, v_1 и v_2,

ибо

$$(u, v_1 + v_2) = (v_1 + v_2, u) = (v_1, u) + (v_2, u) = (u, v_1) + (u, v_2).$$

$3'$. $(u, \lambda v) = \lambda(u, v)$ для любых векторов u и v и любого числа λ,

ибо

$$(u, \lambda v) = (\lambda v, u) = \lambda(v, u) = \lambda(u, v).$$

Свойства $2'$ и $3'$ означают *линейность* скалярного произведения по второму аргументу.

Мы определили скалярное произведение через характеристики векторов. Посмотрим, как выглядят эти связи в обратном направлении, как эти характеристики выражаются через скалярное произведение.

Длина вектора.

$(u, u) = |u|^2$, поэтому $|u| = \sqrt{(u, u)}$ для любого вектора u.

Угол между векторами.

$(u, v) = |u| \cdot |v| \cos \varphi$, поэтому $\cos \varphi = \frac{(u,v)}{|u| \cdot |v|}$ для любых ненулевых векторов u и v.

В частности, два ненулевых вектора u и v перпендикулярны тогда и только тогда, когда $(u, v) = 0$.

§2. Матрица скалярного произведения. Прямоугольная система координат.

На плоскости.

Пусть векторы u и v даны своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$: $u = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2$ и $v = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$. Тогда

$$(u, v) = (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2, v) = x_1(\mathbf{e}_1, v) + y_1(\mathbf{e}_2, v) =$$

$$= x_1(\mathbf{e}_1, x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) + y_1(\mathbf{e}_2, x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) =$$

$$= x_1x_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + y_1x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + y_1y_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$

Обозначая $a_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, получаем:

$$(u, v) = a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}y_1x_2 + a_{22}y_1y_2.$$

Учитывая равенство $a_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = a_{ji}$, получаем:

$$(u, v) = a_{11}x_1x_2 + a_{12}(x_1y_2 + y_1x_2) + a_{22}y_1y_2.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей скалярного произведения* в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. С ее помощью многочлен в правой части равенства $(u, v) = a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_1y_2 + a_{12}y_1x_2 + a_{22}y_1y_2$ сворачивается в матричное произведение:

$$(u, v) = a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_1y_2 + a_{12}y_1x_2 + a_{22}y_1y_2 =$$

$$= x_1(a_{11}x_2 + a_{12}y_2) + y_1(a_{12}x_2 + a_{22}y_2) =$$

$$= (x_1, y_1) \begin{pmatrix} a_{11}x_2 + a_{12}y_2 \\ a_{12}x_2 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} = (x_1, y_1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = u_s A v_c,$$

где u_s — строка из координат вектора u, v_c — столбец из координат вектора v.

В пространстве.

Пусть векторы u и v даны своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$: $u = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3$ и $v = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3$. Тогда

$$(u, v) = (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, v) = x_1(\mathbf{e}_1, v) + y_1(\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, v) =$$

$$= x_1(\mathbf{e}_1, x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3) + y_1(\mathbf{e}_2, x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3) =$$

$$= x_1x_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + x_1z_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + y_1x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) +$$

$$+ y_1y_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + y_1z_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + z_1x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + z_1y_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + z_1z_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3).$$

Обозначая $a_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, получаем:

$$(u, v) = a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1z_2+$$

$$+a_{21}y_1x_2 + a_{22}y_1y_2 + a_{23}y_1z_2 + a_{31}z_1x_2 + a_{32}z_1y_2 + a_{33}z_1z_2.$$

Учитывая равенство $a_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = a_{ji}$, получаем:

$$(u, v) = a_{11}x_1x_2 + a_{22}y_1y_2 + a_{33}z_1z_2+$$

$$+a_{12}(x_1y_2 + y_1x_2) + a_{13}(x_1z_2 + z_1x_2) + a_{22}(y_1z_2 + z_1y_2).$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей скалярного произведения* в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Как и в плоском случае с ее помощью многочлен в правой части равенства

$$(u, v) = a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1z_2 + a_{12}y_1x_2+$$

$$+a_{22}y_1y_2 + a_{23}y_1z_2 + a_{13}z_1x_2 + a_{23}z_1y_2 + a_{33}z_1z_2$$

сворачивается в матричное произведение:

$$(u, v) = a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1z_2 + a_{12}y_1x_2+$$

$$+a_{22}y_1y_2 + a_{23}y_1z_2 + a_{13}z_1x_2 + a_{23}z_1y_2 + a_{33}z_1z_2 =$$

$$= x_1(a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2)+y_1(a_{12}x_2+a_{22}y_2+a_{23}z_2)+z_1(a_{13}x_2+a_{23}y_2+a_{33}z_2) =$$

$$= (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}z_2 \\ a_{12}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}z_2 \\ a_{13}x_2 + a_{23}y_2 + a_{33}z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = u_s A v_c,$$

где u_s — строка из координат вектора u, v_c — столбец из координат вектора v.

И в случае плоскости, и в случае пространства матрица A в представлении $(u, v) = u_s A v_c$ определяется единственным образом: если $(u, v) = u_s B v_c$, то подставляя $u = \mathbf{e}_i$, $v = \mathbf{e}_j$, в качестве значения произведения в правой части получаем элемент b_{ij} матрицы B, поэтому $b_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ и матрица B совпадает с матрицей A.

Прямоугольная система координат.

Базис называется *ортонормированным*, если входящие в него векторы имеют единичную длину и попарно перпендикулярны.

Аффинная система координат называется *прямоугольной*, если ее базис является ортонормированным.

Равенство длины базисных векторов единице на языке скалярного произведения выглядит как условие $a_{ii} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$.

Попарная перпендикулярность базисных векторов единице на языке скалярного произведения выглядит как условие $a_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ для $i \neq j$.

Но это означает, что в прямоугольной системе координат матрица скалярного произведения является единичной матрицей, а соответствующий многочлен имеет вид $(u, v) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ для случая плоскости и $(u, v) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ для случая пространства.

Соответствующий вид принимают и указанные выше формулы, выражающие длину вектора и угол между векторами через скалярное произведение.

Длина вектора

на плоскости в прямоугольной системе координат: $|u| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{x^2 + y^2}$ для вектора $u = \{x, y\}$.

В пространстве в прямоугольной системе координат: $|u| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ для вектора $u = \{x,y,z\}$.

Угол между векторами.

на плоскости в прямоугольной системе координат:

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{|u|\cdot|v|} == \frac{x_1x_2+y_1y_2)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

для любых ненулевых векторов $u = \{x_1,y_1\}$ и $v = \{x_2,y_2\}$.

В пространстве в прямоугольной системе координат:

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{|u|\cdot|v|} == \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

для любых ненулевых векторов $u = \{x_1,y_1,z_1\}$ и $v = \{x_2,y_2,z_2\}$.

Направляющие косинусы. Координаты вектора в прямоугольной системе координат.

i-тым направляющим косинусом вектора u называется косинус угла α_i между этим вектором и i-тым вектором $\mathbf{e}_i$ (ортонормированного) базиса. Тогда $|u|\cos\alpha_i = (u,\mathbf{e}_i)$ совпадает с i-той координатой вектора u. Строка из направляющих косинусов является строкой координат единичного вектора, сонаправленного с вектором u.

На плоскости $u = \{x,y\}$,

$$|u|\cos\alpha_1 = (u,\mathbf{e}_1) = x{\cdot}1+y{\cdot}0 = x, \quad |u|\cos\alpha_2 = (u,\mathbf{e}_2) = x{\cdot}0+y{\cdot}1 = y.$$

Пусть вместе с вектором u дан единичный вектор $\mathbf{e} = \{\cos\beta_1,\cos\beta_2\}$. Тогда $(u,\mathbf{e}) = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2$.

В пространстве $u = \{x,y,z\}$,

$$|u|\cos\alpha_1 = (u,\mathbf{e}_1) = x\cdot 1 + y\cdot 0 + z\cdot 0 = x,$$

$$|u|\cos\alpha_2 = (u,\mathbf{e}_2) = x\cdot 0 + y\cdot 1 + z\cdot 0 = y,$$

$$|u|\cos\alpha_3 = (u, \mathbf{e}_3) = x\cdot 0 + y\cdot 0 + z\cdot 1 = z.$$

Пусть вместе с вектором u дан единичный вектор $\mathbf{e} = \{\cos\beta_1, \cos\beta_2, \cos\beta_3\}$. Тогда $(u, \mathbf{e}) = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3$.

§3. Переход к новой прямоугольной системе координат.

В i-том столбце матрицы C преобразования координат при переходе от ортонормированного базиса A_1 к базису A_2 находятся координаты i-того вектора $\mathbf{f}_i$ базиса A_2 относительно базиса A_1.

В j-той строке матрицы C^T находятся координаты j-того вектора $\mathbf{f}_j$ базиса A_2 относительно базиса A_1.

Следовательно, в клетке a_{ij} матрицы C^TC находится сумма попарных произведений соответствующих координат вектора $\mathbf{f}_j$ и вектора $\mathbf{f}_i$. Так как базис A_1 ортонормирован, то эта сумма равна скалярному произведению $(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i)$. Таким образом, базис A_2 является ортонормированным тогда и только тогда, когда $a_{ij} = (\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i) = 0$ при $i \neq j$ и $a_{ii} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i) = 1$, то есть, базис A_2 является ортонормированным тогда и только тогда, когда $C^TC = E$.

Квадратные матрицы, удовлетворяющие условию $C^TC = E$, называются *ортогональными*.

Заметим, что для ортогональной матрицы C имеем: $(\det C)^2 = \det C \cdot \det C = \det \cdot C^T \det C = \det C^T \cdot C = \det E = 1$, поэтому $\det C = \pm 1$.

На плоскости

Пусть на плоскости задан ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Мы переходим к новому базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, задавая координаты составляющих его векторов в старом базисе: $\mathbf{f}_1 = \{c_{11}, c_{21}\}$, $\mathbf{f}_2 = \{c_{12}, c_{22}\}$.

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Длина вектора $\mathbf{f}_1$ равна единице, поэтому при некотором φ $c_{11} = \cos\varphi$, $c_{21} = \sin\varphi$.

Длина вектора $\mathbf{f}_2$ тоже равна единице и он перпендикулярен вектору $\mathbf{f}_1$. Таких векторов на плоскости всего два. Это $\{-\sin\varphi, \cos\varphi\}$ и $\{\sin\varphi, -\cos\varphi\}$. Координаты одного из этих двух векторов и составляют второй столбец матрицы C. Таким образом, матрица C имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

либо вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix} = -1.$$

§4. Ориентация.

Отправной точкой нашего рассмотрения будет формула преобразования координат векторов при переходе к новой аффинной системе координат, которая в матричной записи имеет вид: $U = CV$, где C — матрица системы преобразования координат, V — столбец координат вектора в новом базисе A_2, U — столбец координат того же вектора в старом базисе A_1.

Обратим внимание, что положение начала координат не влияет на вид этой формулы и она зависит только от координат векторов нового базиса относительно старого, столбцы которых являются соответствующими столбцами матрицы C, поэтому дальше мы будем обсуждать переход от базиса к базису, забыв о начале координат.

Определитель матрицы C отличен от нуля.

Если кроме первых двух базисов A_1 и A_2 есть еще третий A_3 и формула преобразования координат векторов при переходе от

A_2 к A_3 имеет вид $V = C'W$, то подстановка в первое равенство дает связь между координатами вектора в A_1 и A_3: $U = CV = CC'W$. То есть, если $U = DW$ — формула преобразования координат векторов при переходе A_1 к A_3, то $D = CC'$.

Будем говорить, что базис A_2 *одинаково ориентирован* с базисом A_1, если $\det C > 0$.

Отношение одинаковой ориентированности двух базисов является отношением эквивалентности, то есть,

1) любой базис одинаково ориентирован с собой,

ибо в этом случае матрица преобразования координат является единичной матрицей E и ее определитель равен 1,

2) если базис A_2 одинаково ориентирован с базисом A_1, то базис A_1 одинаково ориентирован с базисом A_2,

ибо если C — матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_2, C' — матрица преобразования координат при переходе от A_2 к A_1, то CC' — матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_1 и поэтому $CC' = E$, $\det C \det C' = \det E = 1$ — отсюда следует совпадение знаков $\det C$ и $\det C'$,

3) если базис A_2 одинаково ориентирован с базисом A_1 и базис A_3 одинаково ориентирован с базисом A_2, то базис A_3 одинаково ориентирован с базисом A_1,

ибо если C — матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_2, C' — матрица преобразования координат при переходе от A_2 к A_3, то CC' — матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_3 и $\det CC' = \det C \det C' > 0$.

Поэтому все базисы разбиваются на классы эквивалентности. Два базиса попадают в один класс тогда и только тогда, когда они одинаково ориентированы.

Интересно также свойство

$3'$) если базис A_2 не ориентирован одинаково с базисом A_1 и базис A_3 не ориентирован одинаково с базисом A_2, то базис A_3 ориентирован одинаково с базисом A_1,

ибо если C — матрица преобразования координат при переходе от A_1 к A_2, C' — матрица преобразования координат при переходе от A_2 к A_3, то $\det C < 0$. $\det C' < 0$. $\det CC' = \det C \det C' > 0$.

Поэтому классов одинаково ориентированных базисов только два. *Выбор ориентации* состоит в присваивании одному из них названия класса *положительно ориентированных базисов.* Тогда другой класс получает название класса *отрицательно ориентированных базисов.* Или, если названия не фиксируются, то просто говорят, что базисы из разных классов *ориентированы противоположно.*

На плоскости

Базис на плоскости составляет любая пара неколлинеарных векторов. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — пара неколлинеарных векторов.

Сравним ее с парой $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2$. Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен -1. Пары $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ ориентированы противоположно.

Сравним пару $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ с парой $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1$. Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен -1. Пары $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ ориентированы противоположно.

Сравним пару $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ с парой $\mathbf{f}_1 = \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = \nu\mathbf{e}_2$, где $\lambda, \nu \neq 0$. Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \nu \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен $\lambda\nu$. Пары $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда знаки λ и ν совпадают.

В прямоугольной системе координат на плоскости.

Сравним пару $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ с парой $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 \sin\varphi - \mathbf{e}_2 \cos\varphi$. Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен -1. Пары $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{e}_2$ ориентированы противоположно.

Сравним пару $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ с парой $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi$, $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi$. Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 1. Пары $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{e}_2$ ориентированы одинаково.

Будем считать ориентацию пары $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ положительной. Вектор $\mathbf{f}(\varphi) = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$ получается из вектора $\mathbf{e}_1$ поворотом на угол φ. Введением параметра φ мы фиксируем положительное направление на единичной окружности. В этих обозначениях $\mathbf{f}(0) = \{1, 0\} = \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{f}(\frac{\pi}{2}) = \{0, 1\} = \mathbf{e}_2$. То есть, положительное направление совпадает с направлением, в котором надо повернуть вектор $\mathbf{e}_1$ на $\frac{\pi}{2}$, чтобы он совместился с вектором $\mathbf{e}_2$.

Пусть теперь базис состоит из векторов $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\varphi_0)$ и $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(\varphi_0 + \varphi)$. Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & \cos(\varphi_0 + \varphi) \\ \sin\varphi_0 & \sin(\varphi_0 + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен

$$\cos\varphi_0 \sin(\varphi_0 + \varphi) - \sin\varphi_0 \cos(\varphi_0 + \varphi) = \sin((\varphi_0 + \varphi) - \varphi_0) = \sin\varphi.$$

Ограничиваясь значениями $-\pi < \varphi < \pi$, заключаем: пара $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\varphi_0)$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(\varphi_0 + \varphi)$ ориентирована положительно тогда и только тогда, когда $\varphi > 0$.

Угол от вектора до вектора на плоскости.

В этих рассуждениях мы связали положительное направление поворота с ориентацией. Меняем ориентацию — меняется положительное направление поворота. Это соответствует такой ситуации. Нарисуем на прозрачной стене систему координат, как мы ее привыкли видеть: ось абсцисс смотрит вправо, ось ординат — вверх. Зайдем за стену и посмотрим на нашу картинку. Направление оси ординат сохранилось, направление оси абсцисс поменялось на противоположное. Ориентация пары поменялась на противоположную. Если в первоначальном положении мы отметим направление поворота против часовой стрелки, то при взгляде с противоположной стороны стены этот поворот окажется уже по часовой стрелке. Направление положительного поворота меняется вместе с ориентацией.

Углом от вектора $u_1 = \{x_1, y_1\}$ *до вектора* $u_2 = \{x_2, y_2\}$ в плоскости назовем направленный угол φ, на который надо повернуть вектор u до совмещения его направления с направлением вектора v.

Единичные векторы, сонаправленные с векторами u_1 и u_2, соответственно, имеют вид $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\varphi_0)$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(\varphi_0 + \varphi)$ и $\cos\varphi_0 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$, $\sin\varphi_0 = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$, $\cos(\varphi_0 + \varphi) = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$, $\sin(\varphi_0 + \varphi) = \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$,

$$\sin\varphi = \sin((\varphi_0+\varphi)-\varphi_0) = \sin(\varphi_0+\varphi)\cos\varphi_0 - \cos(\varphi_0+\varphi)\sin\varphi_0 =$$
$$= \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} - \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} =$$
$$= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{|u_1|\cdot|u_2|}.$$

В качестве значения угла от вектора u_1 до вектора u_2 мы берем угол φ, найденный по значению $\cos\varphi$, со знаком $+$, если $\sin\varphi > 0$ и со знаком $-$, если $\sin\varphi < 0$.

Если мы ограничиваемся значениями $-\pi < \varphi < \pi$, то условие $\sin\varphi > 0$ оказывается равносильным условию $\varphi > 0$, а условие $\sin\varphi < 0$ — условию $\varphi < 0$.

На языке ориентации условие $\sin\varphi > 0$ равносильным условию положительной ориентированности пары u_1, u_2, а условие $\sin\varphi < 0$ — условию отрицательной ориентированности пары u_1, u_2.

В пространстве

Базис в пространстве составляет любая тройка некомпланарных векторов. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — тройка некомпланарных векторов.

Сравним ее с тройкой $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{e}_1$ $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$. Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен -1. Тройки $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_3$ ориентированы противоположно.

Сравним тройку $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с тройкой $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_2$ $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$. Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен -1. Тройки $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_3$ ориентированы противоположно.

Сравним тройку $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с тройкой $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_2$ с парой $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 + \mu\mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 + \nu\mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$. Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \mu & \nu & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 1. Тройки $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_3$ ориентированы одинаково.

Определители матриц

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

равны определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

То есть, если переход к новому базису в пространстве происходит в плоскости двух из трех базисных векторов, не затрагивая третий вектор, то ориентация тройки сохраняется тогда и только тогда, когда сохраняется ориентация пары базисных векторов, в плоскости которых происходят изменения.

§5. Ориентированная площадь.

Ориентированной площадью $\langle u_1, u_2\rangle$ параллелограмма, натянутого на векторы u_1 и u_2 называется число, равное площади S этого параллелограмма, взятая со знаком $+$, если пара u_1, u_2 ориентирована положительно, и со знаком $-$, если если пара u_1, u_2 ориентирована отрицательно.

Это определение имеет смысл, если векторы u_1 и u_2 неколлинеарны (то есть, линейно независимы). Если векторы u_1 и u_2 коллинеарны (то есть, линейно зависимы), полагаем $\langle u_1, u_2\rangle = 0$.

Перейдем к прямоугольной системе координат. Пусть в ней $u_1 = \{x_1, y_1\}$ и $u_2 = \{x_2, y_2\}$.

Площадь (неориентированная) S параллелограмма, натянутого на векторы u_1 и u_2, вычисляется по формуле $S = |u_1||u_2|\sin\varphi$, где $\varphi \geqslant 0$ — ненаправленный угол между векторами u_1 и u_2.

Если пара u_1, u_2 ориентирована положительно, то значение синуса направленного угла от вектора u_1 до вектора u_2 положительно. Если пара u_1, u_2 ориентирована отрицательно, то значение синуса направленного угла от вектора u_1 до вектора u_2 отрицательно.

Поэтому ориентированная площадь вычисляется по формуле $\langle u_1, u_2\rangle = |u_1||u_2|\sin\varphi$, где φ — направленный угол от вектора u_1 до вектора u_2.

Эта формула верна и для коллинеарных векторов u_1 и u_2. В этом случае $\sin\varphi = 0$.

Формула для вычисления ориентированной площади в прямоугольной системе координат.

По сказанному выше

$$\langle u_1, u_2 \rangle = |u_1||u_2| \sin\varphi = |u_1||u_2| \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{|u_1| \cdot |u_2|} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Свойства ориентированной площади.

Полученная выше формула для вычисления ориентированной площади верна в прямоугольной системе координат. Но из нее можно вывести свойства ориентированной площади, не привязанные к системе координат. перестановке аргументов в $\langle u_1, u_2 \rangle$ соответствует перестановка строк в матрице

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

При перестановке строк в матрице ее определитель умножается на -1. Поэтому

1. $\langle u, v \rangle = - \langle v, u \rangle$ для любых векторов u и v (ориентированная площадь *кососимметрична*),
(впрочем, это следует и непосредственно из определения: перестановка векторов меняет ориентацию пары на противоположную),

2. $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ для любых векторов u_1, u_2 и v,
ибо сумме строк соответствует сумма определителей,

3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ для любых векторов u и v и любого числа λ,
ибо общий множитель выносится из строки определителя.

Свойства 2 и 3 означают, что ориентированный объем линеен по первому аргументу.

Аналогично,

$2'$. $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$ для любых векторов u, v_1 и v_2,

$3'$. $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ для любых векторов u и v и любого числа λ.

Свойства $2'$ и $3'$ означают, что ориентированный объем линеен по второму аргументу.

Из первого свойства следует:

$1'$. $\langle u, u\rangle = 0$ для любого вектора u.

Формула для вычисления ориентированной площади в аффинной системе координат.

Опираясь на отмеченные выше свойства ориентированной площади, получим аналог формулы

$$\langle u_1, u_2\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

для произвольной аффинной системы координат.

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — базис аффинной системы координат. Пусть в этой аффинной системе координат $u_1 = \{x_1, y_1\}$ и $u_2 = \{x_2, y_2\}$.

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2\rangle - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle .$$

Она тоже кососимметрична ($\varphi(u_2, u_1) = -\varphi(u_1, u_2)$) и линейна по каждому аргументу.

Покажем, что функция φ тождественно равна нулю.

I.

$$\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = 0.$$

II. Вычислим $\varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2})$.

Если $i_1 = 1$ и $i_2 = 2$, то по I $\varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}) = 0$.

Если $i_1 = 2$ и $i_2 = 1$, то

$$\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\rangle - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = -\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle - (-1)\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = 0.$$

Если $i_1 = i_2$, то по $1'$ $\varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}) = 0$.

III.

$$\varphi(u_1,\mathbf{e}_{i_2}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_{i_2}) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_{i_2})+y_1\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_{i_2}) = 0+0 = 0.$$

IV.

$$\varphi(u_1,u_2) = \varphi(u_1,x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2) = x_2\varphi(u_1,\mathbf{e}_1)+y_2\varphi(u_1,\mathbf{e}_2) = 0+0 = 0.$$

Таким образом, для любых векторов u_1 и u_2 имеем: $\varphi(u_1,u_2) = 0$ и

$$\langle u_1,u_2\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle\,,$$

что и есть обещанная формула.

§6. Векторное произведение и ориентированный объем.

Для понимания происходящего удобно представлять упоминаемые здесь векторы направленными отрезками с общим началам O.

Если мы берем другое начало O_1, то две картинки связаны друг с другом сдвигом на вектор OO_1, сохраняющем все используемые характеристики.

Пусть в пространстве даны два вектора u и v. Их *векторным произведением* называется вектор n, определяемый следующим образом.

Если векторы u и v коллинеарны, полагаем $n = \vec{0}$.

Если векторы u и v неколлинеарны, то для любой точки O существует единственная плоскость π_O, проходящая через O и параллельная векторам u и v, а площадь S лежащего в плоскости π_O натянутого на них параллелограмма отлична от нуля.

Вектор n однозначно определяется условиями:

1) он перпендикулярен плоскости π_O,

2) тройка u, v, n положительно ориентирована,

3) $|n| = S$.

Векторное произведение векторов u и v обозначается $[u,v]$.

Векторное произведение зависит от выбора ориентации пространства. Если мы меняем ориентацию пространства, направление векторного произведения меняется на противоположное.

Пусть в пространстве даны три вектора u, v и w. *Ориентированным объемом* $\langle u, v, w\rangle$ натянутого на них параллелепипеда называется число, определяемое следующим образом.

Если векторы u, v и w компланарны, полагаем $\langle u, v, w\rangle = 0$.

Если векторы u и v некомпланарны, то обычный, неориентированный объем V натянутого на них параллелепипеда отличен от нуля. Полагаем ориентированный объем $\langle u, v, w\rangle$ равным V, если тройка u, v, w положительно ориентирована, и равным $-V$, если тройка u, v, w ориентирована отрицательно.

Ориентированный объем зависит от выбора ориентации пространства. Если мы меняем ориентацию пространства, направление значение ориентированного объема меняет знак на противоположный.

Лемма 6.1. $\langle u, v, w\rangle = ([u, v], w)$ *для любых векторов* u, v *и* w.

Доказательство. I. Если векторы u и v коллинеарны, то векторное произведение $n = [u, v]$ равно нулевому вектору и векторы u, v и w компланарны. Поэтому доказываемая формула приобретает вид равенства $0 = 0$, которое, естественно, верно.

II. Если векторы u и v неколлинеарны, но $w = \vec{0}$, то доказываемое равенство очевидно.

Далее мы предполагаем, что векторы u и v неколлинеарны и $w \neq \vec{0}$.

III. Если векторы n и w сонаправлены, то ориентации троек u, v, w и u, v и n совпадают. Поэтому тройка u, v, w ориентирована положительна и $\langle u, v, w\rangle = V$.

Вектор n перпендикулярен плоскости векторов u и v. Из сонаправленности векторов n и w следует, что вектор w перпендикулярен плоскости векторов u и v и поэтому $V = S \cdot |w|$, где S — площадь параллелограмма натянутого на векторы u и v.

В силу сонаправленности векторов n и w имеем: $(n, w) = |n| \cdot |w|$, а так как $|n| = S$, то $\langle u, v, w\rangle = S \cdot |w| = |n| \cdot |w| = (n, w) = ([u, v], w)$

IV. Если векторы n и w направлены противоположно, то тройки u, v, w и u, v, $-w$ ориентированы противоположно и $\langle u, v, w\rangle = -\langle u, v, -w\rangle = -([u, v], -w) = ([u, v], w)$

V. В общем случае рассмотрим проекцию w' вектора w на ось

l, сонаправленную с вектором n параллельно плоскости векторов u и v. Тогда $w' = w + \lambda u = \mu v$, поэтому

$$([u,v],w') = ([u,v],w+\lambda u+\mu v) = ([u,v],w)+\lambda([u,v],u)+\mu([u,v],v) =$$

$$= ([u,v],w) + 0 + 0 = ([u,v],w).$$

Так как плоскость векторов u и v перпендикулярна оси l, то $|\langle u,v,w\rangle| = |\langle u,v,w'\rangle|$.

Тройки u, v, w и u, v, w' ориентированы одинаково, так как матрица преобразования координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и ее определитель равен единице. Поэтому $\langle u,v,w\rangle = \langle u,v,w'\rangle$.

По II, III и IV $\langle u,v,w'\rangle = ([u,v],w')$. В силу сказанного выше

$$\langle u,v,w\rangle = \langle u,v,w'\rangle = ([u,v],w') = ([u,v],w).$$

Лемма доказана.

Свойства ориентированного объема.

1. *Косая симметрия*:

$$\langle u,v,w\rangle = -\langle v,u,w\rangle = \langle v,w,u\rangle = -\langle w,v,u\rangle = \langle w,u,v\rangle = -\langle u,w,v\rangle$$

для любых векторов u, v и w
(Если тройка компланарна, все эти выражения равны нулю. Если тройка некомпланарна, равенства следуют из свойств ориентации троек).

Прямым следствием этого свойства является свойство

$1'$. Если среди векторов u, v и w есть совпадающие, то $\langle u,v,w\rangle = 0$, ибо меняя местами совпадающие аргументы, мы с одной стороны должны поменять знак на противоположный, а с другой стороны выражение не меняется.

2. $\langle u, v, w_1 + w_2 \rangle = \langle u, v, w_1 \rangle + \langle u, v, w_2 \rangle$ для любых векторов u, v, w_1 и w_2,

ибо $\langle u, v, w_1 + w_2 \rangle = ([u, v], w_1 + w_2) = ([u, v], w_1) + ([u, v], w_2) = \langle u, v, w_1 \rangle + \langle u, v, w_2 \rangle$.

3. $\langle u, v, \lambda w \rangle = \lambda \langle u, v, w \rangle$ для любых векторов u, v и w и любого числа λ,

ибо $\langle u, v, \lambda w \rangle = ([u, v], \lambda w) = \lambda([u, v], w) = \lambda \langle u, v, w \rangle$.

2$'$. $\langle u, v_1 + v_2, w \rangle = \langle u, v_1, w \rangle + \langle u, v_2, w \rangle$ для любых векторов u, v_1, v_2 и w,

ибо $\langle u, v_1 + v_2, w \rangle = -\langle u, w, v_1 + v_2 \rangle = -([u, w], v_1) + ([u, w], v_2) = -\langle u, w, v_1 \rangle - \langle u, w, v_2 \rangle = \langle u, v_1, w \rangle + \langle u, v_2, w \rangle$.

3$'$. $\langle u, \lambda v, w \rangle = \lambda \langle u, v, w \rangle$ для любых векторов u, v и w и любого числа λ,

ибо $\langle u, \lambda v, w \rangle = -\langle u, w, \lambda v \rangle = -\lambda \langle u, w, v \rangle = \lambda \langle u, v, w \rangle$.

2$''$. $\langle u_1 + u_2, v, w \rangle = \langle u_1, v, w \rangle + \langle u_2, v, w \rangle$ для любых векторов u_1, u_2, v и w,

ибо $\langle u_1 + u_2, v, w \rangle = -\langle v, u_1 + u_2, w \rangle = -\langle v, u_1, w \rangle - \langle v, u_2, w \rangle = \langle u_1, v, w \rangle + \langle u_2, v, w \rangle$.

3$''$. $\langle \lambda u, v, w \rangle = \lambda \langle u, v, w \rangle$ для любых векторов u, v и w и любого числа λ,

ибо $\langle \lambda u, v, w \rangle = -\langle v, \lambda u, w \rangle = -\lambda \langle v, u, w \rangle = \lambda \langle u, v, w \rangle$.

Свойства 2-3$''$ означают линейность ориентированного объема по каждому аргументу.

Формула для вычисления ориентированного объема в аффинной системе координат.

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — базис аффинной системы координат. Пусть в этой аффинной системе координат $u_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $u_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ и $u_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$.

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle .$$

Она тоже кососимметрична и линейна по каждому аргументу.

Покажем, что функция φ тождественно равна нулю.

I.

$$\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = 0.$$

II. Вычислим $\varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3})$.

Если $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ и $i_3 = 3$, то по I $\varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = 0$.

Если все числа i_1, i_2, i_3 различны, то набор i_1, i_2, i_3 получается из набора 1, 2, 3 перестановкой и по свойству 1 и по I $\varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = \pm\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$.

Если среди i_1, i_2 и i_3 есть совпадающие числа, то $\varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = 0$ по $1'$.

III.

$$\varphi(u_1, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) =$$

$$= x_1\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) + y_1\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) +$$

$$+ z_1\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

IV.

$$\varphi(u_1, u_2, \mathbf{e}_{i_3}) = \varphi(u_1, x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_{i_3}, \mathbf{e}_{i_3}) =$$

$$= x_2\varphi(u_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{i_3}) + y_2\varphi(u_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{i_3}) +$$

$$+ z_2\varphi(u_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{i_3}) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

V.

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \varphi(u_1, u_2, x_3\mathbf{e}_1 + y_3\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_{i_3}) =$$

$$= x_3\varphi(u_1, u_2, \mathbf{e}_1) + y_3\varphi(u_1, u_2, \mathbf{e}_2) +$$

$$+ z_3\varphi(u_1, u_2, \mathbf{e}_3) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, для любых векторов u_1, u_2 и u_3 имеем: $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ и поэтому

$$\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle .$$

что и есть обещанная формула.

Формула для вычисления векторного произведения в прямоугольной системе координат.

Пусть $u = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $v = \{x_2, y_2, z_2\}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. $n = [u, v] = \{x, y, z\}$. Тогда

$$x = (n, \mathbf{e}_1) = ([u, v], \mathbf{e}_1) = \langle u, v, \mathbf{e}_1 \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$y = (n, \mathbf{e}_2) = ([u, v], \mathbf{e}_2) = \langle u, v, \mathbf{e}_2 \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$z = (n, \mathbf{e}_3) = ([u, v], \mathbf{e}_3) = \langle u, v, \mathbf{e}_3 \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$n = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Свойства векторного произведения.

1.*Косая симметрия*: $[u,v]=-[v,u]$ для любых векторов u и v,
ибо

$$[u,v]=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{-\begin{vmatrix} y_2 & z_2\\ y_1 & z_1\end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} x_2 & z_2\\ x_1 & z_1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right\}=-[v,u],$$

где $u=\{x_1,y_1,z_1\}$, $v=\{x_2,y_2,z_2\}$.

2. $[u_1+u_1,v]=[u_1,v]+[u_2,v]$ для любых векторов u_1, u_2 и v,
ибо

$$[u_1+u_1,v]=\left\{\begin{vmatrix} y_1'+y_1'' & z_1'+z_1''\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1'+x_1'' & z_1'+z_1''\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1'+x_1'' & y_1'+y_1''\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{vmatrix} y_1' & z_1'\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1'' & z_1''\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1' & z_1'\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_1'' & z_1''\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1' & y_1'\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1'' & y_1''\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{vmatrix} y_1' & z_1'\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1' & z_1'\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1' & y_1'\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}+\left\{\begin{vmatrix} y_1'' & z_1''\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1'' & z_1''\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1'' & y_1''\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=[u_1,v]+[u_2,v],$$

где $u_1=\{x_1',y_1',z_1'\}$, $u_2=\{x_1'',y_1'',z_1''\}$, $v=\{x_2,y_2,z_2\}$.

3. $[\lambda u,v]=\lambda[u,v]$ для любых векторов u и v и любого числа λ,
ибо

$$[\lambda u,v]=\left\{\begin{vmatrix} \lambda y_1 & \lambda z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\lambda\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, -\lambda\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, \lambda\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}=\lambda[u,v],$$

где $u=\{x_1,y_1,z_1\}$, $v=\{x_2,y_2,z_2\}$.

$2'$. $[u,v_1+v_2]=[u,v_1]+[u,v_2]$, для любых векторов u, v_1 и v_2,
ибо $[u,v_1+v_2]=-[v_1+v_2,u]=-([v_1,u]+[v_2,u])=[u,v_1]+[u,v_2]$.

$3'$. $[u, \lambda v] = \lambda[u, v]$ для любых векторов u и v и любого числа λ,
ибо $[u, \lambda v] = -[\lambda v, u] = -\lambda[v, u] = \lambda[u, v]$.

Свойства 2-$3'$ означают линейность векторного произведения по каждому аргументу.

§7. Взаимное расположение точки и прямой в пространстве. Расстояния от точки до прямой в пространстве.

Лемма 7.1. *Тройки чисел $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ пропорциональны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим любую прямоугольную систему координат. Векторы $n_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $n_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда тройки чисел $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ пропорциональны. Одновременно, векторы $n_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $n_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $[n_1, n_2] = \vec{0}$. Осталось заметить, что

$$[n_1, n_2] = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Следствие. *Векторы $u = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $v = \{A_2, B_2, C_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие относится к любой аффинной системе координат, в том числе, не являющейся прямоугольной.

Пусть прямая l_1 в пространстве задана в аффинной системе координат указанием начальной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющего вектора $u_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

По следствию леммы 7.1 точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежит на прямой l_1 тогда и только тогда, когда векторы u_1 и $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, а это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Этот же факт можно выразить равенством $[u_1, \overrightarrow{M_1M_2}] = \vec{0}$.

Если точка M_2 не лежит на прямой l_1, то перпендикуляр, опущенный из точки M_2 на прямую l_1, является высотой параллелепипеда, натянутого векторы u_1 и $\overrightarrow{M_1M_2}$. Длина h этого перпендикуляра равна расстоянию от точки M_2 до прямой l_1, поэтому $|[u_1, \overrightarrow{M_1M_2}]| = |u_1| \cdot h$ и

$$h = \frac{|[u_1, \overrightarrow{M_1M_2}]|}{|u_1|}.$$

§8. Взаимное расположение прямых в пространстве в аффинной системе координат.

Пусть в пространстве в аффинной системе координат задана прямая l_1 указанием начальной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющего вектора $u_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, прямая l_2 задана указанием начальной точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и направляющего вектора $u_2 = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$.

I. Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы u_1, u_2 и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны, а это имеет место тогда и только тогда, когда строки матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, то есть, тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит,

II. Прямые l_1 и l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда строки матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

линейно независимы, то есть, тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

III. Прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда векторы u_1, u_2 коллинеарны, а это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда

1) они лежат в одной плоскости, то есть,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

и

2) по крайней мере один из определителей

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

IV. Прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда векторы u_1, u_2, $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, а это имеет место тогда и только тогда, когда тройки их координат пропорциональны.

V. Прямые l_1 и l_2 параллельны в узком смысле (то есть, не совпадают) тогда и только тогда, когда векторы u_1, u_2, коллинеарны, а векторы u_1, $\overrightarrow{M_1M_2}$ неколлинеарны.

§9. Расстояние между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве задана прямая l_1 указанием начальной точки M_1 и направляющего вектора u_1, прямая l_2 задана указанием начальной точки M_2 и направляющего вектора u_2.

I. Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы u_1, u_2 и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны, а это имеет место тогда и только тогда, когда $\left\langle u_1, u_2, \overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle = 0$.

Значит,

II. Прямые l_1 и l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда

$$\left\langle u_1, u_2, \overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle \neq 0.$$

Пусть прямые l_1 и l_2 скрещиваются и π_1 — плоскость, проходящая через точку O_1 параллельно прямым l_1 и l_2, π_2 — плоскость, проходящая через точку O_2 параллельно прямым l_1 и l_2. Расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию между плоскостями π_1 и π_2, равно длине общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2 и равно высоте h параллелепипеда, натянутого на векторы u_1, u_2 и $\overrightarrow{M_1M_2}$ с основанием в виде параллелограмма, натянутого на векторы u_1 и u_2. Имеем:

$$\left| \left\langle u_1, u_2, \overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle \right| = |[u_1, u_2]| \cdot h,$$

$$h = \frac{\left| \left\langle u_1, u_2, \overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle \right|}{|[u_1, u_2]|}.$$

III. Прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда векторы u_1, u_2 коллинеарны, а это имеет место тогда и только тогда, когда $[u_1, u_2] = 0$.

Значит, прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда $\left\langle u_1, u_2, \overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle = 0$ и $[u_1, u_2] \neq 0$.

IV. Прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда векторы u_1, u_2, $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, а это имеет место тогда и только тогда, когда тройки их координат пропорциональны.

V. Прямые l_1 и l_2 параллельны в узком смысле (то есть, не совпадают) тогда и только тогда, когда векторы u_1, u_2, коллинеарны, а векторы u_1, $\overrightarrow{M_1M_2}$ неколлинеарны.

В этом случае расстояние h между прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию от точки M_2 до прямой l_1 и вычисляется по формуле предыдущего параграфа:

$$h = \frac{|[u_1, \overrightarrow{M_1M_2}]|}{|u_1|}.$$

§10. Полярные координаты на плоскости. Цилиндрические и сферические координаты в пространстве

Полярные координаты.

На плоскости задаются

1) фиксированием положительного направления измерения углов, то есть, фиксированием ориентации плоскости,

2) фиксированием точки O, называемой *началом* или *полюсом* вводимой системы координат,

3) фиксированием луча l с началом в точке O, называемого *полярной осью* вводимой системы координат.

После этого мы имеем возможность описать положение точки M на плоскости, сопоставляя ей пару чисел φ и r, где φ — угол от полярной оси до радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ (*полярный угол*), r — длина радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ (*полярный радиус*).

Из этого описания выпадает точка O: ее радиус-вектор равен $\vec{0}$ и для нее полярный угол φ не определен. Но ее положение однозначно определяется условием $r = 0$.

Полярная система координат однозначно связана с прямоугольной. Их начала совпадают. Полярная ось полярной системы координат является положительным лучом оси абсцисс прямоугольной системы координат. Положительный луч оси ординат получается поворотом вокруг начала положительного луча оси абсцисс прямоугольной системы координат на угол $\frac{\pi}{2}$.

Координаты (x, y) точки M в этой прямоугольной системе координат связаны с ее полярными координатами в этой полярной системе координат очевидными формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\varphi = \frac{x}{r} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r}. \end{cases}$$

Цилиндрические координаты.

В пространстве задаются

1) фиксированием *основной плоскости* с выбранной на ней полярной системой координат,

2) фиксированием оси аппликат, проходящей через начало O полярной системы координат на основной плоскости и перпендикулярную основной плоскости.

После этого мы имеем возможность описать положение точки M в пространстве, сопоставляя ей полярный радиус координаты проекции M_0 точки M на основную плоскость и аппликату h — координату проекции M_1 точки M на оси аппликат.

Из этого описания выпадают точки оси аппликат: радиус-вектор проекции каждой такой точки на основную плоскость равен $\vec{0}$ и для нее полярный угол φ не определен. Но ее положение однозначно определяется условием $r = 0$.

Цилиндрическая система координат в пространстве однозначно связана с прямоугольной. Их начала и оси аппликат совпадают.

Оси абсцисс и ординат однозначно связаны с полярной системой координат на основной плоскости.

Координаты (x, y, z) точки M в этой прямоугольной системе координат связаны с ее координатами в этой цилиндрической системе координат формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\varphi = \frac{x}{r} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} \\ h = z. \end{cases}$$

Сферические координаты.

В пространстве задаются

1) фиксированием *основной плоскости* с выбранной на ней полярной системой координат,

2) фиксированием оси аппликат, проходящей через начало O полярной системы координат на основной плоскости и перпендикулярную основной плоскости.

После этого мы имеем возможность описать положение точки M в пространстве, сопоставляя ей

1) *полярный радиус* — длину r радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$,

2) *долготу* — полярный угол φ проекции M_0 точки M на основную плоскость,

3) *широта* — угол ψ между вектором $\overrightarrow{OM}$ и его проекцией $\overrightarrow{OM_0}$ на основную плоскость.

Из этого описания выпадают точки оси аппликат: радиус-вектор проекции каждой такой точки на основную плоскость равен $\vec{0}$ и для нее полярный угол φ не определен. Но если $r \neq 0$, ее положение однозначно определяется значением широты.

Наконец, условие $r = 0$ однозначно определяет начало O.

Сферическая система координат в пространстве однозначно связана с прямоугольной. Их начала и оси аппликат совпадают. Оси абсцисс и ординат однозначно связаны с полярной системой координат на основной плоскости.

Координаты (x, y, z) точки M в этой прямоугольной системе координат связаны с ее координатами в этой цилиндрической системе координат формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ r_0^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\varphi = \frac{x}{r_0} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r_0} \\ \sin\psi = \frac{z}{r}, \end{cases}$$

где r_0 — полярный радиус проекции M_0 точки M на основной плоскости.