Ультрафильтры: место встречи топологии, алгебры, комбинаторики и динамики

Ольга Викторовна Сипачева
МГУ, мехмат
Кафедра общей топологии и геометрии
o-sipa@yandex.ru

Фильтры и ультрафильтры

X — множество. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ — база, если

- $\varnothing \notin \mathscr{B}$;
- $B_1, B_2 \in \mathscr{B} \implies \exists B_3 \in \mathscr{B}$ такое, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Предел функции $f : X \to \mathbb{R}$ по базе $\mathscr{B}$: $a = \lim\limits_{\mathscr{B}} f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathscr{B}$ такое, что $|f(x) - a| < \varepsilon$ для всех $x \in B$.

На множестве всех отмеченных разбиений отрезка $[a, b]$ множества B_δ разбиений диаметра меньше δ, $\delta > 0$, образуют базу, и интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$ определяется как предел по этой базе интегральных сумм Римана функции f.

Определение

Фильтром на множестве X называется непустое семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

1. $\varnothing \notin \mathscr{F}$;
2. если $A, B \in \mathscr{F}$, то $A \cap B \in \mathscr{F}$ (а значит, и любое конечное пересечение элементов $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$);
3. если $A \in \mathscr{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathscr{F}$. В частности, $X \in \mathscr{F}$.

Фильтр $\mathscr{F}$ называется свободным, если $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$.
Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ является базой фильтра $\mathscr{F}$, если любое множество $F \in \mathscr{F}$ содержит множество $B \in \mathscr{B}$.

У фильтра обычно имеется много баз, но каждая база однозначно определяет фильтр, базой которого она является (он состоит из всех надмножеств элементов базы).

Примеры

- Множество всех (не обязательно открытых) окрестностей точки в топологическом пространстве X — несвободный фильтр на X.
- Фильтр всех проколотых окрестностей точки x в топологическом пространстве X — свободный фильтр на $X \setminus \{x\}$.
- Наименьший свободный фильтр на бесконечном множестве X — фильтр Фреше $\mathscr{F} = \{Y \subset X : X \setminus Y \text{ конечно}\}$.

Определение

Центрированное семейство множеств — это любое семейство $\mathscr{C}$ с тем свойством, что пересечение любого конечного множества его элементов непусто: если $n \in \mathbb{N}$ и $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}$, то $C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \varnothing$.

Множество всех конечных пересечений элементов семейства $\mathscr{C}$ и их надмножеств — фильтр с базой $\{C_1 \cap \cdots \cap C_n : n \in \mathbb{N}, C_i \in \mathscr{C}\}$.

Определение

Максимальный (по включению) фильтр называется ультрафильтром: фильтр $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, если для любого фильтра $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ имеем $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$.

Ультрафильтр $\mathscr{U}$ называется главным, если $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.

Упражнение

Всякий главный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на множестве X имеет вид

$$\mathscr{U}_x = \{A \subset X : x \in A\}$$

для некоторой точки x, причём $\bigcap \mathscr{U}_x = \{x\}$.

Порядок

Частичный порядок, или просто порядок, на множестве X — это подмножество $\leqslant$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами (мы пишем $x \leqslant y$ вместо $(x, y) \in \leqslant$):

- $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \implies x \leqslant z$ (транзитивность);
- $x \leqslant x \quad \forall x \in X$ (рефлексивность);
- $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \implies x = y$ (антисимметричность).

Множество X вместе с заданным на нём порядком $\leqslant$ (т.е. пара $(X, \leqslant)$) называется (частично) упорядоченным множеством. Про само множество X говорят, что оно (частично) упорядочено отношением $\leqslant$. Запись $x \leqslant y$ читается «элемент x не больше элемента y» или «элемент x не превосходит элемента y», а запись $x \geqslant y$ — «элемент x не меньше элемента y».

Два элемента x и y множества X, упорядоченного отношением $\leqslant$, сравнимы, если либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. Говорят, что $y \in X$ лежит между $x \in X$ и $z \in X$, если $x \leqslant y \leqslant z$. Элемент x множества $Y \subset X$ называется минимальным (максимальным) элементом этого множества, если $\forall y \in Y((y \leqslant x) \to (y = x))$ (соответственно $\forall y \in Y((x \leqslant y) \to (y = x)))$. Элемент x ограничивает множество $Y \subset X$ сверху (снизу), или является верхней (нижней) гранью множества Y, если $\forall y \in Y(y \leqslant x)$ (соответственно $\forall y \in Y(x \leqslant y))$. Если при этом x принадлежит множеству Y, то он называется наименьшим (наибольшим) элементом Y и обозначается $\min Y$ $(\max Y)$. Множество, у которого есть верхняя (нижняя, верхняя и нижняя) грань называется ограниченным сверху (ограниченным снизу, ограниченным). Наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) грань множества Y, если она существует, называется также точной верхней (нижней) гранью, или супремумом (инфимумом), множества Y и обозначается $\sup Y$ $(\inf Y)$.

Порядок $\leqslant$ на X называется линейным, если любые два элемента x и y множества X сравнимы. В этом случае пара $(X, \leqslant)$ называется линейно упорядоченным множеством.

Порядок $\leqslant$ на X полон, если он линеен и любое непустое множество $Y \subset X$ содержит наименьший (в Y) элемент. Пара $(X, \leqslant)$, где $\leqslant$ — полный порядок, называется вполне упорядоченным множеством.

На каждом подмножестве Y упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ естественно возникает индуцированный порядок, или сужение порядка $\leqslant$ на Y, — это пересечение порядка $\leqslant$ (который является подмножеством $X \times X$) с $Y \times Y$. Как легко видеть, индуцированный порядок линеен или полон, если таковым является порядок $\leqslant$ на X. В дальнейшем, рассматривая подмножества упорядоченных множеств, мы всегда будем считать, что они снабжены индуцированным порядком.

Теорема Цермело и лемма Цорна

Теорема Цермело

Любое множество можно вполне упорядочить.

Лемма Цорна

Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества $Y \subset X$, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в X есть максимальный элемент.

Теорема Цермело и лемма Цорна равносильны аксиоме выбора в том смысле, что

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{ZF} + \text{теорема Цермело}, \quad \mathrm{ZF} + \text{теорема Цермело} \vdash \mathrm{ZFC}$$

и

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{ZF} + \text{лемма Цорна}, \quad \mathrm{ZF} + \text{лемма Цорна} \vdash \mathrm{ZFC}.$$

Н.К. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*,
Москва: МЦНМО, 2012

Теорема

Любое центрированное семейство $\mathscr{C}$ подмножеств произвольного множества X содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X.

Доказательство. Упорядочим множество $\mathfrak{C}$ всех центрированных семейств на X, содержащих $\mathscr{C}$, отношением включения $\subset$ (нестрогим!). Если $\mathfrak{L}$ — любое линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{C}$, то $\bigcup\mathfrak{L}$ — центрированное семейство: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $F_1, \ldots, F_n \in \bigcup\mathfrak{L}$ найдутся $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n \in \mathfrak{L}$ такие, что $F_i \in \mathscr{F}_i$ для $i \leqslant n$, и поскольку $\mathfrak{L}$ линейно упорядочено, без ограничения общности можно считать, что $\mathscr{F}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{F}_n$ (мы всегда можем занумеровать $F_1, \ldots, F_n$ именно так). Значит, $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}_n$, так что $\bigcap F_i \neq \varnothing$. Ясно, что $\mathscr{C} \subset \bigcup\mathfrak{L}$ и $\mathscr{F} \subset \bigcup\mathfrak{L}$ для любого $\mathscr{F} \in \mathfrak{L}$. Следовательно, $\bigcup\mathfrak{L}$ — верхняя грань семейства $\mathfrak{L}$.

По лемме Цорна существует максимальное центрированное семейство $\mathscr{U}$, содержащее $\mathscr{C}$. Легко видеть, что $\mathscr{U}$ — ультрафильтр. $\square$

Теорема (основное свойство ультрафильтров)

Фильтр $\mathscr{F}$ на множестве X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

Доказательство

Необходимость. Пусть $\mathscr{F}$ — ультрафильтр на X, и пусть $A \subset X$. Если $F \setminus A = \varnothing$ для некоторого $F \in \mathscr{F}$, то $F \subset A$, так что $A \in \mathscr{F}$. Предположим, что для любого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \neq \varnothing$. Если $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$, то

$$(F_1 \setminus A) \cap \cdots \cap (F_n \setminus A) = (F_1 \cap \cdots \cap F_n) \setminus A \neq \varnothing,$$

т.е. семейство $\{F \setminus A : F \in \mathscr{F}\}$ центрировано. Оно содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. Для каждого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \in \mathscr{U}$ и, значит, $F \in \mathscr{U}$. Следовательно, $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, и из максимальности $\mathscr{F}$ вытекает, что $\mathscr{F} = \mathscr{U}$. Осталось заметить, что $X \setminus A \in \mathscr{U}$.

Достаточность. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр с тем свойством, что для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$, и пусть $\mathscr{U}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{F} \neq \mathscr{U}$, то найдется $A \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{F}$. По предположению $X \setminus A \in \mathscr{F}$, а поскольку $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, имеем $X \setminus A \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathscr{U}$. Значит, $\mathscr{F} = \mathscr{U}$, так что $\mathscr{F}$ — ультрафильтр. □

Следствие (основное свойство ультрафильтров)

Если $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на множестве X, $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_m \subset X$ и существует $A \in \mathscr{U}$ такой, что $A \subset A_1 \cup \cdots \cup A_m$, то $A_i \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$. В частности, если $A_1, \ldots, A_m$ — любые подмножества X со свойством $A_1 \cup \cdots \cup A_m = X$, то $A_i \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$.

Доказательство. Предположим, что $A_i \notin \mathscr{U}$ для всех $i \leqslant m$. Тогда по доказанной теореме $X \setminus A_i \in \mathscr{U}$ для $i \leqslant m$. Значит, $(X \setminus A_1) \cap \cdots \cap (X \setminus A_m) = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m) \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathscr{U}$ и $A \cap (X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m)) = \varnothing$. □

На понятии ультрафильтра основана популярная модель нестандартного анализа:

Пусть $\mathscr{U}$ — любой неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N}$. На множестве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ последовательностей вещественных чисел введём отношение эквивалентности $\sim$:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathscr{U}\,.$$

На фактормножестве $\mathbb{R}/\sim$ возникает естественный порядок:

$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \leqslant [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \iff \{n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant b_n\} \in \mathscr{U}\,.$$

Классы постоянных последовательностей отождествляются с вещественными числами. Классы последовательностей, сходящихся к 0 (к ∞), трактуются как бесконечно малые (бесконечно большие) величины. Они отличаются скоростью сходимости.

Отображения фильтров

Определение

Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение и $\mathscr{F}$ — любой фильтр на X. Семейство множеств

$$\beta f(\mathscr{F}) = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\} = \{A \subset Y : \exists F \in \mathscr{F}\,(f(F) \subset A)\}$$

называется образом фильтра $\mathscr{F}$ при отображении f.

Предложение

Образ любого (ультра)фильтра при любом отображении является (ультра)фильтром.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение, и пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на X. То, что $\beta f(\mathscr{F})$ — фильтр, ясно (условие 2 из определения фильтра выполнено, так как $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ для любых множеств $A, B \subset Y$). Если при этом $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, то из основного свойства ультрафильтров и равенства $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus (f^{-1}(A))$ следует, что $\beta f(\mathscr{F})$ — тоже ультрафильтр. $\square$

Ultrafilters and topology

Ультрафильтры и топология

Топологическое пространство X — это множество X с заданной на нём топологией $\mathscr{T}$ (семейство $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ — топология, если
- $\varnothing, X \in \mathscr{T}$,
- $U \cap V \in \mathscr{T}$ для любых $U, V \in \mathscr{T}$ и
- $\bigcup \mathscr{S} \in \mathscr{T}$ для любого $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$).

Элементы топологии называются открытыми множествами. Дополнения до открытых множеств называются замкнутыми множествами.

Любое открытое множество, содержащее точку $x \in X$, называется открытой окрестностью точки x, а любое множество, содержащее открытую окрестность, называется окрестностью точки x.

Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения (предельной точкой) множества $A \subset X$, если любая её окрестность пересекает A (пересекает $A \setminus \{x\}$). Замыкание $\overline{A}$ множества A — это множество всех его точек прикосновения $\iff$ наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Если $\overline{A} = X$, то говорят, что A всюду плотно или просто плотно в X.

Определение

Фильтр $\mathscr{F}$ на топологическом пространстве X **сходится** к точке $x \in X$, если любая окрестность точки x принадлежит $\mathscr{F}$. Обозначение: $\mathscr{F} \to x$. Говорят, что фильтр **сходится**, или является **сходящимся**, если он сходится к некоторой точке.

Теорема

Для топологического пространства X, множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ следующие условия равносильны:

а) *x является точкой прикосновения множества A;*

б) *существует фильтр $\mathscr{F}$ на X, который содержит A и сходится к x;*

в) *существует ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X, который содержит A и сходится к x.*

Доказательство. а)⇒в): Семейство $\mathscr{B}(x)$ всех окрестностей точки x в X центрировано. x — точка прикосновения множества $A \implies$ семейство $\{A \cap U : U \in \mathscr{B}(x)\}$ тоже центрировано $\implies$ оно содержится в ультрафильтре $\mathscr{U}$. Свойство 3 $\implies \mathscr{U}$ содержит A и все окрестности x.

в)⇒б): тривиально.

б)⇒а): Поскольку фильтр $\mathscr{F}$ сходится к точке x, он содержит все окрестности x. То, что $A \in \mathscr{F}$, означает, что пересечение A с любой окрестностью x непусто (в силу свойства 1), т.е. x является точкой прикосновения множества A. □

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств **непрерывно в точке** $x \in X$, если прообраз любой окрестности точки $f(x)$ в Y содержит окрестность точки x в X. Отображение f **непрерывно**, если оно непрерывно во всех точках.

Упражнения

1. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно $\iff$ прообраз любого открытого (замкнутого) подмножества пространства Y открыт (замкнут) в X.
2. Если отображение $f : X \to Y$ непрерывно, то для любого $A \subset X$ образ $f(\overline{A})$ замыкания множества A в X содержится в замыкании $\overline{f(A)}$ образа самóго этого множества в Y. (Воспользуйтесь пунктом 1 и тем, что $\overline{A}$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.)

Теорема

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда образ при f любого ультрафильтра, сходящегося к x, сходится к $f(x)$.

Доказательство. Пусть образ при f любого сходящегося к $x \in X$ ультрафильтра сходится к $f(x)$, и пусть V — окрестность $f(x)$. Если $f^{-1}(V)$ не является окрестностью (= не содержит ни одной окрестности) точки x в X, то семейство

$$\mathscr{F} = \{X \setminus f^{-1}(V)\} \cup \{U : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

центрировано $\implies$ содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. Имеем $\mathscr{U} \to x$, значит, $\beta f(\mathscr{U})$ должен сходиться к $f(x)$. Однако $X \setminus f^{-1}(V) \in \mathscr{U} \implies f(X \setminus f^{-1}(V)) = Y \setminus V \in \beta f(\mathscr{U}) \implies V \notin \beta f(\mathscr{U})$. Противоречие. Значит, $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x в X, т.е. f непрерывно в x.

Обратно, пусть f непрерывно в $x \in X$. Рассмотрим любой ультрафильтр $\mathscr{U} \to x$ на X. Если $\beta f(\mathscr{U}) \not\to f(x)$, то у $f(x)$ есть окрестность $V \notin \beta f(\mathscr{U})$. По основному свойству ультрафильтров имеем $Y \setminus V \in \beta f(\mathscr{U})$, а по определению отображения ультрафильтров βf

$$f^{-1}(X \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V) \in \mathscr{U}$$

в противоречие с тем, что $\mathscr{U} \to x$ и $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x. □

Ультрафильтры и компактность

Определение

Пусть X — произвольное множество и $Y \subset X$. Покрытие множества Y — это любое индексированное семейство $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств X, которое покрывает Y, т.е. удовлетворяет условию $\bigcup \mathscr{C} \supset Y$. Подпокрытием покрытия $\mathscr{C}$ называется любое подсемейство семейства $\mathscr{C}$, которое само является покрытием.

Если X — топологическое пространство и покрытие состоит из открытых (замкнутых, открыто-замкнутых) множеств, то его называют открытым (замкнутым, открыто-замкнутым) покрытием.

Иногда вместо покрытия множества X удобнее рассматривать двойственное семейство, состоящее из всех дополнений до элементов покрытия. Из законов де Моргана немедленно вытекает, что *семейство $\mathscr{C}$ подмножеств X является покрытием множества X тогда и только тогда, когда двойственное семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus C : C \in \mathscr{C}\}$ имеет пустое пересечение.*

Определение

Топологическое пространство **компактно**, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Определение (равносильное)

Топологическое пространство **компактно**, если любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

Упражнение

Докажите, что образ компактного пространства при любом непрерывном отображении компактен.

Базой топологии $\mathscr{T}$ топологического пространства X называется любое семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ с тем свойством, что всякое открытое множество является объединением некоторого семейства элементов $\mathscr{B}$ $\iff$ для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности U существует окрестность $V \in \mathscr{B}$, $V \subset U$. Топология однозначно определяется своей базой (но не наоборот).

Предложение

Пусть X — топологическое пространство и $\mathscr{B}$ — любая база его топологии. Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любое открытое покрытие X элементами базы $\mathscr{B}$ содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. В доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — любое открытое покрытие X. Для каждой точки $x \in X$ выберем элемент $U_{\alpha(x)}$ покрытия $\mathscr{U}$, содержащий эту точку, и зафиксируем элемент базы $V_x \in \mathscr{B}$, который содержит точку x и содержится в выбранном элементе покрытия $U_{\alpha(x)}$. Семейство $\{V_x : x \in X\}$ представляет собой открытое покрытие пространства X элементами $\mathscr{B}$. По предположению оно содержит конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}\}$. Поскольку каждое множество V_{x_i} содержится в соответствующем $U_{\alpha(x_i)}$, имеем $U_{\alpha(x_1)} \cup \cdots \cup U_{\alpha(x_n)} = X$, так что $\{U_{\alpha(x_1)}, \ldots, U_{\alpha(x_n)}\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$. $\square$

Определение

Топологическое пространство X хаусдорфово (обозначение: $X \in T_2$), если у любых двух различных точек $x, y \in X$ имеются непересекающиеся окрестности.

Упражнения

1. Докажите, что пространство X хаусдорфово $\iff$ всякий ультрафильтр на X сходится к не более чем одной точке.
2. Докажите, что пространство X хаусдорфово $\iff$ любая точка $x \in X$ совпадает с пересечением замыканий всех своих окрестностей.

Определение

Подпространство топологического пространства X с топологией $\mathscr{T}$ — это любое множество $Y \subset X$, снабженное топологией $\mathscr{T}|Y = \{U \cap Y : U \in \mathscr{T}\}$.

Теорема

1. *Всякое замкнутое подпространство компактного пространства компактно.*
2. *Всякое компактное подпространство хаусдорфова пространства замкнуто.*

1. Пусть K — компактное пространство, $F \subset K$ — его замкнутое подпространство и $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — любое открытое покрытие пространства F. По определению топологии подпространства для каждого $\alpha \in A$ существует открытое в K множество V_α, для которого $U_\alpha = V_\alpha \cap F$. Семейство $\{K \setminus F\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in F\}$ — открытое покрытие пространства K. Оно имеет конечное подпокрытие $\mathscr{C}$. Ясно, что семейство $\{U_\alpha : V_\alpha \in \mathscr{C}\}$ является конечным подпокрытием данного покрытия пространства F.
2. Пусть X хаусдорфово, $K \subset X$ компактно и $x \notin K$. X хаусдорфово $\implies$ $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} : U \text{ — окрестность } x\}$. Семейство $\{K \setminus \overline{U} : U \text{ — окрестность } x\}$ — открытое покрытие компакта K. Пусть $\{K \setminus \overline{U}_1, \dots, K \setminus \overline{U}_n\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда $U_1 \cap \dots \cap U_n$ — окрестность x, не пересекающая K. Значит, $x \notin \overline{K}$. □

Определение

Топологическое пространство X **регулярно** (обозначение: $X \in T_3$), если для любой окрестности U любой точки $x \in X$ существует окрестность V точки x такая, что $\overline{V} \subset U$.

Теорема

Всякое хаусдорфово компактное пространство регулярно.

Доказательство. Пусть $K \in T_2$ компактно и U — открытая окрестность точки $x \in K$ (напомним, что в любой окрестности содержится открытая). Тогда $K \setminus U$ замкнуто $\implies$ компактно. Для каждого $y \notin U$ зафиксируем непересекающиеся открытые множества $U_y \ni y$ и $V_y \ni x$. Пусть $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$ — подпокрытие открытого покрытия $\{U_y : y \in K\}$ компакта K. Ясно, что открытое множество $W = \bigcup\limits_{i \leqslant n} U_{y_i}$ содержит $K \setminus U$ и не пересекается с открытой открестностью $V = \bigcap\limits_{i \leqslant n} V_{y_i}$ точки x. Имеем $V \subset K \setminus W \subset U$. Замыкание $\overline{V}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее V, $\implies$ $\overline{V} \subset U$. □

Теорема

Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве X сходится.

Доказательство

Необходимость. $\exists$ ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X, который не сходится ни к одной точке $x \in X \iff \forall x \in X$ $\exists$ открытая окрестность $U_x \notin \mathscr{U}$. $\{U_x : x \in X\}$ — открытое покрытие компактного пространства X; пусть $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ — его конечное подпокрытие. Основное свойство ультрафильтров $\implies U_{x_i} \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$, однако по построению $U_{x_i} \notin \mathscr{U}$ для всех i. Противоречие.

Достаточность. Если существует открытое покрытие $\mathscr{V}$ пространства X, которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus V : V \in \mathscr{V}\}$ центрировано. Оно содержится в ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. По условию $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке x. Пусть $x \in V \in \mathscr{V}$. Тогда $V \in \mathscr{U}$, поскольку $\mathscr{U} \to x$, и $X \setminus V \in \mathscr{U}$ по определению семейства $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$. Это противоречит свойствам 1 и 2 в определении фильтра. □

Топологическое пространство ультрафильтров

Пусть X — множество. Обозначим множество всех ультрафильтров на X через βX. Для каждого $A \subset X$ положим

$$\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}.$$

Семейство $\mathscr{B} = \{\overline{A} : A \subset X\}$ является базой некоторой топологии на βX. В дальнейшем мы будем рассматривать βX только с этой топологией.
Для $A \subset X$

$$\overline{A} \text{ — окрестность ультрафильтра } p \text{ в } \beta X \iff A \in p.$$

Множество X можно отождествить с подпространством βX, состоящим из главных ультрафильтров:

$$X \ni x \equiv p_x = \{A \subset X : x \in A\}.$$

Свойства пространства βX

1. Множество всех главных ультрафильтров (вида $p_x = \{A \subset X : x \in A\}$), которое отождествляется с X,
   - дискретно:
     для каждого $x \in X$ имеем $\{x\} \in p_x$, и окрестность $\overline{\{x\}} = \{p \in \beta X : \{x\} \in p\}$ ультрафильтра p_x состоит из единственной точки p_x
   - открыто:
     $X = \bigcup_{x \in X} \{p_x\}$
   - всюду плотно:
     Любое непустое открытое множество U в βX содержит $\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$ для непустого $A \subset X$. Для $x \in A$ имеем $A \in p_x$. Значит, $p_x \in U$.
2. Для любого $A \subset X$ множество $\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$ открыто-замкнуто:
   $\beta X \setminus \overline{A} = \overline{X \setminus A}$ — это открытое множество.

3. Для всякого $A \subset X$ множество $\overline{A}$ является замыканием множества $A \equiv \{p_x : x \in A\}$ в βX, причём $\overline{A} \cap X = A$:
$A \subset \overline{A}$, $\overline{A}$ замкнуто $\implies$ $\overline{A}$ содержит замыкание A.
Обратно, пусть $p \in \overline{A}$ (т.е. $A \in p$). Любая окрестность U точки p в βX содержит окрестность вида $\overline{B}$, где $B \in p$. Для любой точки $x \in A \cap B$ имеем $p_x \in A$ и $A \cap B \in p_x$, т.е.
$p_x \in \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \subset U$. Таким образом, любая точка p из $\overline{A}$ является предельной для A. Значит, $\overline{A}$ содержится в замыкании множества A.
Наконец, $p_x \in \overline{A} \iff A \in p_x \iff x \in A$.

4. Пространство βX хаусдорфово:
если $p, q \in \beta X$, $p \neq q$, то найдётся $A \in p$, $A \notin q$. Имеем $X \setminus A \in q$.
$\overline{A}$ и $\overline{X \setminus A}$ — непересекающиеся окрестности точек p и q.

5. Пространство βX компактно.

Доказательство. Пусть $\mathscr{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ — открытое покрытие пространства βX. Можно считать без ограничения общности, что каждое множество U_ι имеет вид $\overline{A_\iota}$ для $A_\iota \subset X$.

Действительно: каждый $p \in \beta X$ содержится в некотором элементе U_{ι_p} покрытия $\mathscr{U}$ вместе с некоторой своей окрестностью $\overline{A_p}$. Если покрытие $\{\overline{A_p} : p \in X\}$ содержит конечное подпокрытие $\{\overline{A_{p_1}}, \ldots, \overline{A_{p_n}}\}$, то $\{U_{\iota_{p_1}}, \ldots, U_{\iota_{p_n}}\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$.

Итак, пусть $\mathscr{U} = \{\overline{A_\iota} : \iota \in I\}$. Положим $\mathscr{F} = \{X \setminus A_\iota : \iota \in A\}$.

Предположим, что $\mathscr{F}$ центрировано. Тогда $\mathscr{F}$ содержится в некотором ультрафильтре $p \in \beta X$. Поскольку $\mathscr{U}$ — покрытие, имеем $p \in \overline{A_\iota}$ (т.е. $A_\iota \in p$) для некоторого $\iota \in I$. С другой стороны, $X \setminus A_\iota \in p$. Противоречие.

Значит, $\mathscr{F}$ не центрировано. Для $A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n}$ таких, что $(X \setminus A_{\iota_1}) \cap \cdots \cap (X \setminus A_{\iota_n}) = \varnothing$, имеем $A_{\iota_1} \cup \cdots \cup A_{\iota_n} = X$. По основному свойству ультрафильтров для всякого $p \in \beta X$ существует номер $i \leqslant n$ такой, что $A_{\iota_i} \in p$, т.е. $p \in \overline{A_{\iota_\alpha}}$. □

6. Любое отображение $f: X \to Y$ множества X в хаусдорфов компакт Y продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}: \beta X \to Y$.

Доказательство. Для любого ультрафильтра $p \in \beta X$ $\beta f(p) = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in p\}$ — ультрафильтр на Y. Он сходится к $y \in Y$. Положим $\hat{f}(p) = y$. Ясно, что $\hat{f}$ продолжает f: если $p_x \equiv x \in X$, то $\beta f(p_x) = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \ni x\} = \{A \subset Y : f(x) \in A\}$ — это главный ультрафильтр $p_{f(x)}$ на Y, он сходится к $f(x)$.

Покажем, что $\hat{f}$ непрерывно. Пусть O — любая окрестность точки $y = \hat{f}(p)$. Она содержит замкнутую окрестность V. Имеем $V \in \beta f(p)$, потому что $\beta f(p) \to y$, и $f^{-1}(V) \in p$ по определению отображения βf. Значит, $\overline{f^{-1}(V)}$ — окрестность точки p в βX. Покажем, что $\hat{f}(\overline{f^{-1}(V)}) \subset V$.

Предположим, что $q \in \overline{f^{-1}(V)}$ (т.е. $f^{-1}(V) \in q$) и $\hat{f}(q) \notin V$. Возьмём окрестность U точки $\hat{f}(q)$ в Y, которая не пересекается с V. По построению $\beta f(q) \to \hat{f}(q)$; значит, $U \in \beta f(q)$ и $f^{-1}(U) \in q$. Однако $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$, так как $U \cap V = \varnothing$, а значит, $f^{-1}(V) \notin q$. Противоречие. □

Для $\hat{f}(p)$ иногда используют обозначение $\lim_p f$ или p-$\lim f$.

7. Для отображения $f\colon Y \to X \subset \beta X$ $\beta f = \hat{f}$.

Доказательство. Будем рассматривать f как отображение $Y \to \beta X$. По определению $\hat{f}$ для $p \in \beta Y$ имеем $\beta f(p) \to \hat{f}(p)$, т.е. любая окрестность $\overline{A}$ ультрафильтра $\hat{f}(p)$ в βX принадлежит $\beta f(p)$, т.е. $f^{-1}(\overline{A}) \in p$. Поскольку $\overline{A} \cap X = A$, имеем $f^{-1}(\overline{A}) = f^{-1}(A)$, т.е. $A \in \beta f(p)$. Значит, $\beta f(p) \in \overline{A}$.

Таким образом, ультрафильтр $\beta f(p) \in \beta X$ принадлежит любой окрестности ультрафильтра $\hat{f}(p)$ в βX, а потому совпадает с ним. □

8. Для любого отображения $f\colon X \to \beta X$ и любого $p \in \beta X$ образ $\hat{f}(p)$ имеет каноническую базу, состоящую из всех множеств вида

$$\bigcup\{F_x : x \in P\}, \quad \text{где } P \in p \text{ и } F_x \in f(x). \qquad (*)$$

Доказательство. $A \subset X$ содержит множество вида $(*)$ $\iff$ $\{x \in X : A \in f(x)\} \in p$ $\iff$ $\{x \in X : X \setminus A \in f(x)\} \notin p$. Значит, множества вида $(*)$ — база ультрафильтра q на X. Покажем: $q \to \beta f(p)$. Если $Q \in q$, то $Q \supset \bigcup\{F_x : x \in P\}$ для некоторых $P \in p$ и $F_x \in f(x)$, $x \in P$. Так как $F_x \subset Q$, то $Q \in f(x)$ и $f(x) \in \overline{Q}$ для всех $x \in P$. Значит, $f^{-1}(\overline{Q}) \supset P \in p$, так что $\overline{Q} \in \beta f(p)$. □

Полугруппы ультрафильтров

Пусть S — полугруппа. Для каждого $s \in S$ определим отображение

$$L_s \colon S \to S \quad (\subset \beta S)$$

правилом

$$L_s(x) = s \cdot x \qquad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Рассмотрим непрерывное продолжение

$$\hat{L}_s \colon \beta S \to \beta S.$$

Для $\hat{L}_s(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $s \cdot p$.
Ультрафильтр $s \cdot p$ имеет каноническую базу

$$\Big\{ \bigcup \{ F_x : x \in P \} : P \in p,\ F_x \in L_s(x) \Big\}.$$

Поскольку $L_s(x) = s \cdot x \in S$ для всякого $s \in P \in p$, все ультрафильтры $L_s(x)$ главные, так что база имеет вид

$$\{ s \cdot P : P \in p \}.$$

Теперь для каждого $q \in \beta S$ рассмотрим отображение

$$R_q \colon S \to \beta S,$$

определённое правилом

$$R_q(x) = x \cdot q \qquad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Существует непрерывное продолжение

$$\hat{R}_q \colon \beta S \to \beta S.$$

Для $\hat{R}_q(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $p \cdot q$. Этот ультрафильтр называется произведением ультрафильтров p и q в βS. Он имеет каноническую базу

$$\Big\{ \bigcup \{ F_x : x \in P \} : P \in p,\ F_x \in R_q(x) \Big\}.$$

Заменяя $F_x \in R_q(x) = x \cdot q$ на меньшие множества $x \cdot Q_x$, где $Q_x \in q$, получим каноническую базу произведения $p \cdot q$:

$$\Big\{ \bigcup \{ x \cdot Q_x : x \in P \} : P \in p,\ Q_x \in q \Big\}.$$

Умножение непрерывно по первому аргументу, а если первый аргумент — элемент S, то и по второму. Из этих непрерывностей вытекает ассоциативность.

Пусть O_1 — любая окрестность $(p \cdot q) \cdot r$. Непрерывность по 1-му аргументу $\implies$ $\exists$ окрестность $V_1 \ni p \cdot q$, для которой $V_1 \cdot r \subset O_1$, и $\exists$ окрестность $U_1 \ni p$, для которой $U_1 \cdot q \subset V_1$.

Пусть O_2 — любая окрестность $p \cdot (q \cdot r)$. Непрерывность по 1-му аргументу $\implies$ $\exists$ окрестность $U_2 \ni p$, для которой $U_2 \cdot (q \cdot r) \subset O_2$.

Возьмём $x \in S \cap U_1 \cap U_2$.

$x \cdot q \in V_1$, непрерывность по 2-му аргументу $\implies$ $\exists$ окрестность $W_1 \ni q$, для которой $x \cdot W_1 \subset V_1$.

$x \cdot (q \cdot r) \in O_2$, непрерывность по 2-му аргументу $\implies$ $\exists$ окрестность $V_2 \ni q \cdot r$, для которой $x \cdot V_2 \subset O_2$. Непрерывность по 1-му аргументу $\implies$ $\exists$ окрестность $W_2 \ni q$, для которой $W_2 \cdot r \subset V_2$.

Возьмём $y \in S \cap W_1 \cap W_2$.

$x \cdot y \in V_1$, $V_1 \cdot r \subset O_1 \implies$ $(x \cdot y) \cdot r \in O_1$.
Непрерывность по 2-му аргументу $\implies$
$\exists$ окрестность $Q_1 \ni r$, для которой $(x \cdot y) \cdot Q_1 \subset O_1$.

$y \cdot r \in V_2$, непрерывность по 2-му аргументу $\implies$
$\exists$ окрестность $Q_2 \ni r$, для которой $y \cdot Q_2 \subset V_2$.
$x \cdot V_2 \subset O_2 \implies$
$x \cdot (y \cdot Q_2) \subset O_2$.

$$\text{Возьмём } z \in S \cap Q_1 \cap Q_2.$$

Имеем $(x \cdot y) \cdot z \in O_1$, $x \cdot (y \cdot z) \in O_2$. Умножение в полугруппе ассоциативно $\implies$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \in O_1 \cap O_2.$$

Любые окрестности точек $(p \cdot q) \cdot r$ и $p \cdot (q \cdot r)$ пересекаются $\implies$ эти точки совпадают.

Вывод: βS — компактная правотопологическая полугруппа (правотопологическая = умножение непрерывно по первому аргументу).

Две теоремы о компактных полугруппах

Теорема (Эллис–Нумакура)

Любая непустая компактная хаусдорфова правотопологическая (= умножение непрерывно по первому аргументу) полугруппа S содержит идемпотент, т.е. элемент e такой, что $e \cdot e = e$.

Доказательство. К упорядоченному семейству $(\mathscr{H}, \supset)$ непустых замкнутых подполугрупп S применима лемма Цорна: если $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$ линейно упорядочено, то $\forall H_1, \ldots, H_n \in \mathscr{C}$ имеем $\bigcap H_i \neq \varnothing$, S компактна $\implies$ $\bigcap \mathscr{C} \neq \varnothing$ — верхняя грань $\mathscr{C}$.

Пусть H — максимальный (т.е. минимальный по включению) элемент $\mathscr{H}$ и $e \in H$. Тогда $H \cdot e$ — подполугруппа, и $H \cdot e \subset H$. Это образ H при непрерывном отображении $x \mapsto x \cdot e \implies H \cdot e$ компактна. S хаусдорфова $\implies$ $H \cdot e$ замкнута $\implies$ $H \cdot e = H$. Положим

$$E = \{x \in H : x \cdot e = e\}.$$

$E \neq \varnothing$ и E — подполугруппа. E — прообраз $\{e\}$ при непрерывном отображении $x \mapsto x \cdot e \implies E$ замкнута. $E \subset H$ $\implies$ $E = H \implies e \cdot e = e$. $\square$

Теорема

Если S — непустая компактная хаусдорфова правотопологическая полугруппа S, то любой левый идеал L в S содержит минимальный левый идеал и любой минимальный левый идеал замкнут.

Доказательство. Пусть L — левый идеал в S, т.е. $S \cdot L \subset L$. Тогда $S \cdot a \subset L \ \forall\, a \in L$. S компактна и хаусдорфова, правые сдвиги непрерывны $\implies$ левый идеал $S \cdot a$ замкнут.

Итак, любой левый идеал L содержит замкнутый левый идеал. Рассмотрим множество $\mathscr{L}$ замкнутых левых идеалов, содержащихся в L, упорядоченное обратно включению. Как и в предыдущей теореме, пересечение элементов любого линейно упорядоченного подмножества $\mathscr{L}$ непусто, поскольку S компактно, и является замкнутым левым идеалом. Лемма Цорна $\implies$ $\exists$ минимальный по включению замкнутый левый идеал K среди левых идеалов, содержащихся в L. Он минимален среди всех левых идеалов: если $K' \subset K$ — другой левый идеал, то $\forall\, a \in K'$ имеем $S \cdot a \subset K' \subset K$ и $S \cdot a$ — замкнутый левый идеал. $\square$

Определение

Пусть $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов полугруппы S. Положим

$$FP\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \{a_{n_1}\cdot\ldots\cdot a_{n_k} : k\in\mathbb{N},\ n_1<\cdots<n_k\}.$$

Множество $A\subset S$ называется FP-множеством, если существует последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ разных элементов A, для которой $FP\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\subset A$.

Если полугруппа S коммутативна и операция обозначается $+$, то вместо FP пишут FS.

Лемма

Если свободный ультрафильтр p на полугруппе S является идемпотентом в βS, то любой элемент $A \in p$ является FP-множеством.

Доказательство. Положим $A_0 = A$. Поскольку $p \cdot p = p$ и $p \in \overline{A_0}$, непрерывность умножения по первому агументу $\Longrightarrow$ $\exists B \in p$: $B \subset A_0$ и $\overline{B} \cdot p \subset \overline{A_0}$. Выберем любой $a_1 \in B$. Имеем $a_1 \cdot p \in \overline{A_0}$ и $a_1 \in S$. Непрерывность умножения по второму аргументу $\Longrightarrow$ $\exists A_1 \in p$: $a_1 \cdot \overline{A_1} \subset \overline{A_0}$, $A_1 \subset A_0$ и $a_1 \notin A_1$, т.е.

$$a_1 \cdot A_1 \subset A_0, \qquad A_1 \subset A_0, \qquad a_1 \in A_0 \setminus A_1.$$

Продолжая, получим $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ и $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$ такие, что

$$A_n \in p, \quad a_n \cdot A_n \subset A_{n-1}, \quad A_n \subset A_{n-1}, \quad a_n \in A_{n-1} \setminus A_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $n_1 < \cdots < n_k$. Заметим: $a_m \cdot a_n \in A_{m-1}$ для $m < n$. Покажем: $a_{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{n_k} \in A_{n_1 - 1}$. Для $k = 1$ очевидно. Пусть $k > 1$ и для меньших верно. Тогда $a_{n_2} \cdot \ldots \cdot a_{n_k} \in A_{n_2 - 1}$. $A_{n_2 - 1} \subset A_{n_1}$ $\Longrightarrow$ $a_{n_1} \cdot (a_{n_2} \cdot \ldots \cdot a_{n_k}) \in A_{n_1 - 1}$. □

Теорема (Хиндман)

Если бесконечная полугруппа S либо не имеет идемпотентов, либо допускает левые сокращения (т.е. из $a \cdot x = a \cdot y$ следует $x = y$ для любого $a \in S$), то любое конечное разбиение S содержит элемент, являющийся FP-множеством.

Доказательство. В силу леммы достаточно показать, что на S есть свободный ультрафильтр, который является идемпотентом в βS. Если S не содержит идемпотентов, то идемпотент, который обязан существовать в компактной правотопологической полугруппе βS, автоматически свободен. Если S допускает левые сокращения, то $\beta S \setminus S$ — подполугруппа в βS: для неглавных ультрафильтров $p, q \in \beta S$ базу произведения $p \cdot q$ составляют множества вида $\bigcup\{x \cdot Q_x : x \in P\}$, где $P \in p$ и $Q_x \in q$, $\implies$ все элементы ультрафильтра $p \cdot q$ бесконечны $\implies$ он неглавный.

Подполугруппа $\beta S \setminus S$ замкнута, так как S открыто в βS, $\implies$ компактна $\implies$ в ней есть идемпотент. □

Следствие (теорема Шура)

Для любой раскраски $\chi\colon \mathbb{N} \to \{1, \ldots, m\}$ *уравнение* $x + y = z$ *имеет одноцветное решение.*

Топологические группы

Группа G — это множество вместе с заданными на нём ассоциативной бинарной операцией $\cdot : G \times G \to G$, унарной операцией ${}^{-1} : G \to G$ и 0-арной операцией 1. При этом должны выполняться условия $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$ и $g \cdot 1 = 1 \cdot g = g$ для всех $g \in G$.

Определение

Группа G с топологией $\mathscr{T}$ называется топологической группой, если групповая операция (умножение) $\cdot : G \times G \to G$ и операция взятия обратного элемента ${}^{-1} : G \to G$ непрерывны относительно топологии $\mathscr{T}$ на G и топологии декартова произведения на $G \times G$. При этом $\mathscr{T}$ называется групповой топологией или топологией, согласованной с групповыми операциями.

Примеры

- Дискретная топология на любой группе является групповой.
- Прямая $\mathbb{R}$ с операцией сложения и обычной топологией является топологической группой.
- Любая тихоновская степень прямой с покодинатными умножением и взятием обратного является топологической группой, так что любое тихоновское пространство является подпространством топологической группы.
- На пространстве **P** иррациональных чисел можно ввести групповую операцию, относительно которой **P** является топологической группой: **P** гомеоморфно тихоновскому произведению $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ счётного числа экземпляров дискретной группы $\mathbb{Z}$. Операции покоординатного сложения и перехода к обратному непрерывны относительно топологии тихоновского произведения.
- Канторов дисконтинуум C гомеоморфен счётной тихоновской степени дискретной группы $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Специфические свойства топологических групп

1. Любая топологическая группа G является однородным топологическим пространством, т.е. для любых точек $g, h \in G$ существует гомеоморфизм $f : G \to G$ такой, что $f(g) = h$. Таким образом, топология любой топологической группы полностью определяется окрестностями единицы в этой группе.
2. Если топологическая группа удовлетворяет акиоме отделимости T_0, то она удовлетворяет также и аксиомам T_1 и T_2. Кроме того, всякая топологическая группа удовлетворяет аксиомам T_3 и $T_{3\frac{1}{2}}$.
3. Всякая отделимая топологическая группа, имеющая счётную базу окрестностей единицы, метризуема.
4. Во всякой σ-компактная (т.е. являющейся объединением счётного числа компактов) топологической группе любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств не более чем счётно.

5. Группы Ли:

Определение

Группа Ли — это группа вместе с заданной на ней структурой вещественно-аналитического многообразия, в которой групповые операции выражаются вещественно-аналитическими функциями от локальных координат.

Существует компактное триангулируемое многообразие размерности 10 (т.е. компакт, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^{10}$, и который допускает триангуляцию), которое не гомеоморфно никакому гладкому многообразию.

Всякая топологическая группа, локально гомеоморфная евклидову пространству, допускает структуру группы Ли, и притом единственную. Более того, вместо локальной евклидовости достаточно требовать, чтобы группа была локально компактной и чтобы некоторая окрестность единицы не содержала нетривиальных подгрупп.

Проблема топологизируемости

Недискретные отделимые групповые топологии существуют на на всех бесконечных группах. Группы, на которых такие топологии существуют, называются топологизируемыми. Вопрос о существовании нетопологизируемых бесконечных групп был поставлен в 1941 г. А.А. Марковым, который сформулировал гипотезу, что *всякая бесконечная группа топологизируема.* Проблема Маркова оставалась нерешённой до 1980 г., когда были одновременно построены два принципиально разных примера нетопологизируемых групп, счётный и несчётный.

Счётная нетопологизируемая группа А.Ю. Ольшанского

Это группа G, для которой существуют $N \in \mathbb{N}$ и $Z = \{1, z_1, \ldots, z_k\} \subset G$ с тем свойством, что всякий элемент $g \in G \setminus \{1\}$ удовлетворяет условию $g^{n_g} \in Z \setminus \{1\}$ для некоторого $n_g < N$.

Таким образом, каждый элемент $g \neq 1$ является решением одного из уравнений $x^i = z_j$, где $i \leqslant N$ и $j \leqslant k$.

Множество решений любого такого уравнения замкнуто в любой отделимой групповой топологии на G, потому что оно является прообразом множества $\{z_j\}$ при отображении $f\colon x \mapsto x^i$, которое обязано быть непрерывным в силу непрерывности умножения.

Вывод: $G \setminus \{1\}$ — объединение конечного числа множеств, замкнутых в любой отделимой групповой топологии. $\implies$ $\{1\}$ открыто в любой отделимой групповой топологии $\implies$ для всякого $g \in G$ одноточечное множество $\{g\}$ открыто в любой отделимой групповой топологии $\implies$ любая отделимая групповая топология на G дискретна.

Несчётная нетопологизируемая группа С. Шелаха

Построена в предположении справедливости континуум-гипотезы (оно совместимо с аксиомами теории множеств).
Это группа G с тем замечательным свойством, что

$$S^{10000} = G \text{ для любого несчётного } S \subset G.$$

$G = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$, где все M_α — счётные подгруппы G со свойством, которое называется малнормальностью или антинормальностью:

$$g^{-1} \cdot M_\alpha \cdot g \cap M_\alpha = \{1\} \text{ для любого } g \in G \setminus M_\alpha,$$

причём

$$M_\alpha \subset M_\beta \text{ для } \alpha < \beta.$$

Предположим, что U — окрестность единицы в некоторой недискретной групповой топологии на группе G.

Если U счётна, то она содержится в некоторой подгруппе M_α, а значит, для любого $g \in G \setminus M_\alpha$ имеем $g^{-1} \cdot U \cdot g \cap U = \{1\}$. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ является пересечением двух окрестностей единицы, а значит, и само является окрестностью единицы. Получается, что топология дискретна, вопреки предположению. Таким образом, в недискретной групповой топологии на G счётные окрестности единицы не могут существовать.

В силу непрерывности умножения какова бы ни была окрестность единицы U, найдётся окрестность единицы V, для которой $V^{10000} \subset U$, потому что $1^{10000} = 1$ и операция возведения в 10000-ю степень непрерывна (так как умножение непрерывно). Мы только что показали, что V должна быть несчётной; значит, $U = G$. Таким образом, всякая недискретная групповая топология на G неотделима.

Уравнением в группе G называется любое выражение вида

$$g_1 x^{k_1} g_2 x^{k_2} \dots g_n x^{k_n} g_{n+1} = 1, \qquad (*)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $g_i \in G$ и $k_i \in \mathbb{Z}$ для $i \leqslant n+1$. Элемент $g \in G$ называется решением уравнения $(*)$, если при подстановке g вместо x получается истинное равенство.

Множество решений уравнения есть прообраз множества $\{1\}$ при отображении

$$x \mapsto g_1 x^{k_1} g_2 x^{k_2} \dots g_n x^{k_n} g_{n+1},$$

которое непрерывно в любой групповой топологии на G. Следовательно, множество решений любого уравнения замкнуто в любой отделимой групповой топологии на G.

Скажем, что точка g в группе G алгебраически изолирована, если $G \setminus \{g\}$ является объединением конечного числа множеств решений уравнений. Если G содержит алгебраически изолированную точку, то она нетопологизируема (но не наоборот).

Множество $A \neq \varnothing$ вместе с любым набором конечноарных операций $f_\iota \colon A^{n_\iota} \to A$, $\iota \in I$, называется универсальной алгеброй. Топология на A согласована (с операциями), если все f_ι непрерывны относительно этой топологии.

Многочлены на A определяются по индукции. Выражения x и $f_\iota(x, a_2, \ldots, a_{n_\iota})$, $f_\iota(a_1, x, \ldots, a_{n_\iota})$, $\ldots$, $f_\iota(a_1, a_2, \ldots, x)$, где $a_i \in A$, — многочлены. Остальные многочлены получаются из этих многократными подстановками произвольных многочленов вместо символов x и a_i. Уравнение в алгебре A — выражение вида $p(x) = a$, где p — многочлен и $a \in A$. Множество решений — множество всех элементов алгебры, про подстановке которых в уравнение вместо x получается верное равенство. Оно замкнуто в любой согласованной T_1-топологии на A.

Определение

Точка $a \in A$ алгебраически изолирована, если $A \setminus \{a\}$ является объединением конечного числа множеств решений уравнений.

Если все $a \in A$ алгебраически изолированы, то A нетопологизируема.

Кольцо — это множество R с операцией сложения, относительно которой R является коммутативной группой, и ассоциативной операцией умножения (на самом деле операций четыре — ещё переход к противоположному элементу и 0).

Теорема Арнаутова (следствие теоремы Хиндмана)

Никакое бесконечное кольцо не имеет алгебраически изолированных точек.

Доказательство. Очевидно, точка x алгебраически изолирована тогда и только тогда, когда 0 (и все прочие точки) алгебраически изолированы. Поэтому будем доказывать теорему для $x = 0$.

Лемма 1

Пусть R — кольцо, $f(x) \in R[x]$, $\deg f = n > 0$ и $a \in R$. Тогда существует многочлен $g(x) \in R[x]$ такой, что $\deg g < n$ и

$$f(x+a) = f(x) + f(a) + g_a(x)$$

для всех $x \in R$.

Для $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset R$
$FS(A) = \{a_{n_1} + \ldots + a_{n_m} : 1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_m \leqslant k.$

Лемма 2

Пусть $f \in R[x]$, $\deg f = n \geqslant 0$, $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \subset R$ и $f(b) = 0$ для любого $b \in FS(A)$. Тогда $f(0) = 0$.

Доказательство. Индукция по n. Если $n = 0$, то $f = \mathrm{const}$ и из $f(a_1) = 0$ вытекает $f(0) = 0$.

Предположим, что $n > 0$ и для меньших n утверждение доказано. Положим $A' = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ясно, что $FS(A') \subset FS(A)$ и $FS(A') + a_{n+1} \subset FS(A)$. Рассмотрим многочлен $g_{a_{n+1}}$ из леммы 1. Для всякого $b \in FS(A')$ имеем $b + a_{n+1} \in FS(A)$ и

$$f(b + a_{n+1}) = f(b) + f(a_{n+1}) + g_{a_{n+1}}(b).$$

По условию $f(b + a_{n+1}) = f(b) = f(a_{n+1})$; значит, $g_{a_{n+1}}(b) = 0$ для всех $b \in FS(A')$. По индуктивному предположению $g_{a_{n+1}}(0) = 0$. Подставляя 0 вместо b, получаем $f(0) = 0$. $\square$

Доказательство теоремы. Предположим, что точка 0 алгебраически изолирована и многочлены $f_1, \ldots, f_m \in R[x]$ таковы, что

$$R \setminus \{0\} = A_1 \cup \cdots \cup A_m, \quad \text{где } A_i = \{a \in R : f_i(a) = 0\}.$$

По теореме Хиндмана, применённой к аддитивной группе кольца R, найдется $i \leqslant m$, для которого существует бесконечная последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ разных элементов R такая, что $FS((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset A_i \cup \{0\}$. Пусть $\deg f_i = k$. Если $a_1 \neq 0$, положим $a'_1 = a_1$. Если $a_1 = 0$, положим $a'_1 = a_2$. Предположим, что $a'_1, \ldots, a'_r$ определены. Выберем a_s с наименьшим номером $s > r$, для которого $-a_s \notin FS(\{a'_1, \ldots, a'_r\})$ и положим $a'_{r+1} = a_s$. В результате мы получим множество $A = \{a'_1, \ldots, a'_{k+1}\}$ такое, что $FS(A) \subset A_i$, т.е. $f_i(b) = 0$ для всех $b \in FS(A)$. По лемме 2 имеем $f_i(0) = 0$. Противоречие. □

Теорема ван дер Вардена

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $S = (\beta\mathbb{N})^m$ ($\mathbb{N}$ с операцией $+$). Элементы S — векторы $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m)$.

S — компактная хаусдорфова правотопологическая полугруппа относительно покоординатного сложения.

Положим

$$E^* = \{(a, a+d, \ldots, a+(m-1)d) : a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

$$I^* = \{(a, a+d, \ldots, a+(m-1)d) : a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}\},$$

$$E = \overline{E^*} \qquad \text{и} \qquad I = \overline{I^*}.$$

Лемма 1

E — подполугруппа в S и I — двусторонний идеал в E.

Доказательство. Пусть $\vec{p}, \vec{q} \in E$, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $U_1 \times \cdots \times U_m$ — окрестность элемента $\vec{p} + \vec{q}$ в S. Непрерывность сложения по первому аргументу $\implies$ $\exists$ окрестность $V_1 \times \cdots \times V_m$ элемента $\vec{p}$, для которой $V_1 \times \cdots \times V_m + \vec{q} \subset U_1 \times \cdots \times U_m$.

E — подполугруппа:
1. Выберем $a \in \mathbb{N}$ и $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, что $(a, a+d, \ldots, a+(m-1)d) = \vec{x} \in V_1 \times \cdots \times V_m$. $\vec{x} + \vec{q} \in U_1 \times \cdots \times U_m$ и $a, a+d, \ldots, a+(m-1)d \in \mathbb{N} \implies$ $\exists$ окрестность $W_1 \times \cdots \times W_n$ элемента $\vec{q}$, для которой $\vec{x} + W_1 \times \cdots \times W_m \subset U_1 \times \cdots \times U_m$.
2. Выберем $b \in \mathbb{N}$ и $e \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, что $(b, b+e, \ldots, b+(m-1)e) = \vec{y} \in W_1 \times \cdots \times W_m$. Имеем $\vec{x} + \vec{y} \in U_1 \times \cdots \times U_m$ и $\vec{x} + \vec{y} = (a+b, a+b+d+e, \ldots, a+b+(m-1)(d+e) \in E^*$. Значит, $\vec{x} + \vec{y} \in E^*$ и $\vec{p} + \vec{q} \in E$ ($\Leftarrow$ окрестность $U_1 \times \cdots \times U_m$ любая). $\square$

Лемма 2

Если $p \in \beta\mathbb{N}$, то $\vec{p} = (p, \dots, p) \in E$.

Доказательство. Пусть $U_1 \times \dots \times U_m$ — любая окрестность $\vec{p}$ в S. Тогда $U = \bigcap_{i \leqslant m} U_i$ — окрестность p в $\beta\mathbb{N}$. Для $a \in \mathbb{N} \cap U$ имеем $(a, \dots, a) \in (U_1 \times \dots \times U_m) \cap E^*$. $\square$

Лемма 3

Если L — минимальный левый идеал в $\beta\mathbb{N}$, $p \in L$ и $\vec{p} = (p, \ldots, p)$, то $\vec{p} \in I$.

Доказательство. Вторая теорема о компактных полугруппах, $E + \vec{p}$ — левый идеал в полугруппе $E \implies \exists$ минимальный левый идеал $F \subset E + \vec{p}$ полугруппы E, и F замкнут. $\implies \exists$ идемпотент $\vec{q} \in F$. Поскольку $\vec{q} \in E + \vec{p}$, имеем $\vec{q} = \vec{r} + \vec{p}$ для некоторого $\vec{r} \in E$.

Пусть $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ и $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_m)$. Тогда $q_i = r_i + p \in \beta\mathbb{N} + p$ для $i \leqslant m$. L — минимальный левый идеал в $\beta\mathbb{N}$, $p \in L \implies \beta\mathbb{N} + p = L$.

Имеем $q_i \in L$ и $\beta\mathbb{N} + q_i \subset L$. L минимален $\implies \beta\mathbb{N} + q_i = L$. Выберем $t_i \in \beta\mathbb{N}$, для которого $t_i + q_i = p$.

Имеем $t_i + q_i + q_i = t_i + q_i = p \implies p + q_i = p \implies \vec{p} + \vec{q} = \vec{p}$.

$\vec{q} \in F$, F — левый идеал $\implies \vec{p} \in F$.

Покажем: $F \subset I$. F — левый идеал в $E \implies I + F \subset F$, I — правый идеал в $E \implies I + F \subset I \implies I + F \subset F \cap I \neq \varnothing$.

F и I — левые идеалы в $E \implies F \cap I$ — левый идеал в E. Минимальность $F \implies F \subset I$. ∎

Теорема ван дер Вардена

Если L — минимальный левый идеал в $\beta\mathbb{N}$ и $p \in L$, то любое множество $A \in p$ содержит произвольно длинные арифметические прогрессии.

Доказательство. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $A \in p$. Рассмотрим окрестность $\overline{A} \times \cdots \times \overline{A}$ элемента $\vec{p} = (p, \ldots, p)$ в $(\beta\mathbb{N})^m$.

Лемма 3 $\implies$ $\exists\ \vec{x} \in I^* \cap (\overline{A} \times \cdots \times \overline{A})$. Имеем $\vec{x} = (a, a+d, \ldots, a+(m-1)d)$ для некоторых $a, d \in \mathbb{N}$.

$a, a+d, \ldots, a+(m-1)d$ — арифметическая прогрессия, содержится в A. $\square$

Теорема Рамсея

Для множества X и $k \in \mathbb{N}$ $[X]^k$ — множество всех k-элементных подмножеств X. Множество $A \subset X$ однородно относительно раскраски $c\colon [X]^k \to \{1, \ldots, m\}$, если $c|_{[A]^k} \equiv \text{const}$.

Теорема Рамсея

Для любого счётного множества X, любых $k, m \in \mathbb{N}$ и любой раскраски $c\colon [X]^k \to \{1, \ldots, m\}$ существует бесконечное однородное множество $A \subset X$.

Доказательство. Индукция по k. Для $k = 1$ верно. Пусть верно для n и $k = n + 1$. Выберем $x_0 \in X$ и рассмотрим раскраску $c_0\colon [X \setminus \{x_0\}]^n \to \{1, \ldots, m\}$, $c_0(\{x_1, \ldots, x_n\}) = c(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$. Теорема для $k = n \implies \exists$ бесконечное $A_0 \subset X$ и $i_0 \leqslant m$, для которых $F \in [A_0]^n \Rightarrow c(\{x_0\} \cup F) = i_0$. Выберем $x_1 \in A_0$. ... Получаем бесконечные $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$, $x_i \in A_{i-1}$ и $i_0, i_1, \dots \leqslant m$ такие, что $\forall F \in [A_j]^n$ имеем $c(\{x_j\} \cup F) = i_j$. Найдём $i \leqslant m$ и бесконечное $J \subset \mathbb{N}$ такие, что $i_j = i$ для всех $j \in J$. Ясно, что $A = \{x_j : j \in J\}$ бесконечно и $c|_{[A]^k} \equiv i$. □

Топологическое произведение

Декартово произведение произвольного семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — это множество

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha \ \forall \alpha \in A\};$$

элементы $f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ принято записывать в виде $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где для каждого $\alpha \in A$ $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ — α-я координата элемента $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Каноническая проекция произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на сомножитель X_β, где $\beta \in A$, — это отображение $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha \in A}\big) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Диагональное произведение, или диагональ, семейства отображений $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — это отображение $f = \mathop{\Delta}_{\alpha \in A} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, определённое правилом $f(x) = \big(f_\alpha(x)\big)_{\alpha \in A}$.

В случае, когда множества X_α снабжены топологией, на произведении $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ тоже возникает топология. Её определение согласовано с определением произведения в теории категорий.

Категория определяется аксиоматически как класс объектов, связанных морфизмами («стрелками»), удовлетворяющими естественным условиям (существование и ассоциативность композиции морфизмов и существование тождественных морфизмов). Категории придумали, чтобы рассматривать конструкции, отношения и отображения, сохраняющие структуру математических объектов, независимо от того, чтó это за объекты и какова их структура. Обычно (но не всегда) роль объектов играют множества, а роль морфизмов — отображения множеств. Например, в категории множеств объекты — это произвольные множества, а морфизмы — любые отображения множеств, в категории топологических пространств объекты — топологические пространства, а морфизмы — непрерывные отображения, а в категории групп объекты — группы, а морфизмы — групповые гомоморфизмы.

В теории категорий произведение объектов X_α, $\alpha \in A$, определяется как объект X вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ (называемых канонической проекциями) с тем свойством, что для любого объекта Y этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f : Y \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\underset{\alpha \in A}{\Delta} f_\alpha : Y \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

Топология произведения топологических пространств вводится согласно этому категорному определению. Она называется топологией произведения, или тихоновской топологией, и определяется как наименьшая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны. Такая топология существует на произведении любого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ топологических пространств; она порождена базой, состоящей из всех конечных пересечений множеств вида

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\beta \in U_\beta\},$$

где $\beta \in A$ — любой фиксированный индекс, а U_β — любое открытое множество в X_β. Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются топологическими, или тихоновскими, произведениями.

Предложение

Для любого семейства пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ все множества вида $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое U_α — открытое подмножество X_α и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, индексов α, образуют базу топологического произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Доказательство. Из определения тихоновской топологии вытекает, что семейство всех множеств вида $\bigcap\limits_{i\leqslant k} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ и каждое U_{α_i} открыто в X_{α_i}, является базой топологического произведения $\prod X_\alpha$. Поэтому для доказательства утверждения достаточно заметить, что для любых $\beta \in A$ и $U_\beta \subset X_\beta$

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : x_\beta \in U_\beta\} = \prod U_\alpha, \quad \text{где } U_\alpha = X_\alpha \text{ для } \alpha \neq \beta,$$

и что $\prod A_\alpha \cap \prod B_\alpha = \prod (A_\alpha \cap B_\alpha)$ для любых $A_\alpha, B_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$. $\square$

Теорема Тихонова о компактности произведений

Теорема

Топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ непустых пространств компактно тогда и только тогда, когда все X_α компактны.

Доказательство. Необходимость немедленно вытекает из непрерывности всех канонических проекций $\pi_\beta \colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$ и очевидного замечания, что образ компактного пространства при любом непрерывном отображении компактен.

Для доказательства достаточности воспользуемся критерием компактности в терминах ультрафильтров. Пусть $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ — топологическое произведение семейства компактных пространств и $\mathscr{U}$ — любой ультрафильтр на множестве $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Нам нужно показать, что $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке. Для каждого $\alpha \in A$ положим

$$\mathscr{U}_\alpha = \beta\pi_\alpha(\mathscr{U}) = \{Y \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(Y) \in \mathscr{U}\}.$$

Семейство $\mathscr{U}_\alpha$ является ультрафильтром на X_α, и поскольку X_α компактно, $\mathscr{U}_\alpha$ сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$. Положим $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ и покажем, что $\mathscr{U}$ сходится к точке $\mathbf{x}$.

Пусть U — любая окрестность точки $\mathbf{x}$ в $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Она содержит каноническую окрестность $\prod\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$. По определению канонической окрестности найдётся конечное множество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ такое, что $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ (и V_{α_i} — окрестность точки x_{α_i} для $i \leqslant n$).

Для каждого $i \leqslant n$ ультрафильтр $\mathscr{U}_{\alpha_i}$ сходится к x_{α_i}, поэтому $V_{\alpha_i} \in \mathscr{U}_{\alpha_i}$ и $\pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathscr{U}$. Из того, что пересечение конечного числа элементов любого фильтра принадлежит этому фильтру, вытекает, что $\prod\limits_{\alpha\in A} V_\alpha = \bigcap\limits_{i\leqslant n} \pi_{\alpha_i}^{-1} V_{\alpha_i} \in \mathscr{U}$, а из того, что вместе с каждым своим элементом всякий фильтр содержит все бо́льшие множества — что $U \in \mathscr{U}$.

Мы показали, что любая окрестность точки $\mathbf{x}$ принадлежит ультрафильтру $\mathscr{U}$, а это и означает, что $\mathscr{U}$ сходится к $\mathbf{x}$. $\square$

Теорема компактности для разбиений

Определение

Пусть X — множество и m — натуральное число. Семейство $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ называется *m-регулярным относительно $Y \subset X$*, если для всякого разбиения $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ множества Y найдутся $k \leqslant m$ и $A \in \mathscr{A}$ такие, что $A \subset Y_k$.

Теорема (компактности для разбиений)

Если $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ m-регулярно относительно X и любой элемент $\mathscr{A}$ конечен, то существует конечное $Y \subset X$ такое, что $\mathscr{A}$ m-регулярно относительно Y.

Доказательство. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ и M_x — копия M для каждого $x \in X$. Рассмотрим тихоновское произведение

$$M^X = \prod_{x \in X} M_x$$

дискретных пространств M_x. Пусть теорема неверна. Тогда для всякого конечного $Y \subset X$ существует разбиение $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ множества Y, для которого нарушается условие m-регулярности. Положим $h(x) = i$, если $x \in Y_i$. Продолжим h до отображения $f_Y : X \to M$. Для конечного $K \subset X$ пусть

$$F_K = \{f_Y : K \subset Y,\ Y \text{ — конечное подмножество } X\}.$$

Ясно, что семейство $\{F_K : K \text{ — конечное подмножество } X\}$ центрировано. Продолжим его до ультрафильтра $\mathscr{U}$ на M^X. По теореме Тихонова $\mathscr{U} \to f \in M^X$. Рассмотрим разбиение

$$X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_m, \qquad \text{где } X_i = f^{-1}(\{i\}).$$

По условию теоремы $\exists k \leqslant m$, $A \in \mathscr{A}$: $A \subset X_k$, т.е. $f(x) = k$ для всех $x \in A$. Поскольку $\mathscr{U} \to f$, $\exists$ конечное $Y \subset X$, для которого $A \subset Y$ и $f_Y(x) = f(x)$ $\forall x \in A$. Сужение $f_Y|_Y$ определяет нерегулярное разбиение $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_m$. Однако $f_Y(x) = k$ для всех $x \in A$, откуда $A \subset Y$. Противоречие. $\square$

Теорема (конечная версия теоремы Шура)

$\forall\, m \in \mathbb{N}$ *существует число* $S(m) \in \mathbb{N}$ *такое, что для любого* $n \geqslant S(m)$ *и любой раскраски* $\chi\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\}$ *уравнение* $x + y = z$ *имеет одноцветное решение в множестве* $\{1,\dots,n\}$.

Следствие

Для любых $m \in \mathbb{N}$ и любого простого $p > S(m)$ тождество $x^m + y^m = z^m \pmod{p}$ имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Пусть $\mathbb{F}_p^* = \{1, \ldots, p-1\}$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{F}_p$, g — порождающий элемент. $\forall k \in \mathbb{F}_p^*$ $\exists!$ $t \leqslant p-1$, для которого $k \equiv g^t \pmod{p}$. Представим t как $t = i + mj$, где $0 \leqslant i < m$, и рассмотрим раскраску

$$\chi\colon \mathbb{F}_p^* \to \{0, \ldots, m-1\}, \quad \chi(k) = i, \text{ если } k = g^{i+mj} \pmod{p}.$$

Конечная теорема Шура $\implies$ $\exists a, b, c \in \mathbb{F}_p^*$ такие, что $a + b = c$ и $\chi(a) = \chi(b) = \chi(c) = i$ для некоторого $i < m$, т.е.

$$a \equiv g^{i+mj_a} \pmod{p}, \quad b \equiv g^{i+mj_b} \pmod{p}, \quad c \equiv g^{i+mj_c} \pmod{p},$$

$$g^{i+mj_a} + g^{i+mj_b} \equiv g^{i+mj_c} \pmod{p}.$$

Умножая это тождество на g^{-i} в группе $\mathbb{F}_p^*$, получим решение $x = g^{j_a}$, $y = g^{j_b}$, $z = g^{j_c}$. □

Минимальные идеалы и идемпотенты

Пусть S — произвольная полугруппа.

Левый идеал — непустое множество $L \subset S$ со свойством: $s \cdot L \subset L$ для любого $s \in S$.

Минимальный левый идеал — непустое множество $L \subset S$ со свойством: $s \cdot L = L$ для любого $s \in S$.

Определение

$$K(S) = \bigcup \{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\}.$$

Замечание

Если $K(S) \neq \varnothing$, то $K(S)$ — левый идеал: любой $x \in K(S)$ содержится в некотором минимальном левом идеале $L \implies S \cdot x \subset L \subset K$.

Теорема

Если $K(S) \neq \varnothing$, то K — наименьший двусторонний идеал в полугруппе S.

Доказательство. Знаем: $K(S)$ — левый идеал. Покажем, что $K(S)$ — правый идеал. Надо проверить: $\forall s \in S$ $K(S) \cdot s \subset K(S)$.

Заметим: если L — минимальный левый идеал, то $\forall s \in S$ $L \cdot s$ — тоже минимальный левый идеал:
Пусть L' — левый идеал, $L' \subset L \cdot s$. Для $\ell \in L$ такого, что $\ell \cdot s \in L'$, имеем $S \cdot \ell \cdot s \subset L'$. С другой стороны, $S \cdot \ell = L \implies S \cdot \ell \cdot s = L \cdot s$. Значит, $L \cdot s \subset L'$.

Таким образом,

$$K(S) \cdot s = \bigcup \{L \cdot s : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\} \subset K(S).$$

Значит, $K(S)$ — правый идеал и двусторонний идеал.

Любой минимальный левый идеал L содержится в любом двустороннем идеале I: $I \cdot L \subset L \cap I \implies L \cap I \neq \varnothing$. Это левый идеал, L минимален $\implies L = L \cap I \implies L \subset I$.

Вывод: $K(S)$ содержится в любом двустороннем идеале. $\square$

Положим

$$K'(S) = \bigcup\{R : R \text{ — минимальный правый идеал в } S\}.$$

Дословное повторение доказательства теоремы с заменой «левый» $\leftrightarrow$ «правый» приводит к заключению, что если $K'(S) \neq \varnothing$, то $K'(S)$ — тоже наименьший двусторонний идеал.

Следствие

Если в полугруппе S существуют и левые, и правые минимальные идеалы, то

$$\bigcup\{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\} = \\ = \bigcup\{R : R \text{ — минимальный правый идеал в } S\}.$$

Теорема

Пусть S — полугруппа, L — минимальный левый идеал в S, e — идемпотент, $e \in L$. Тогда

1. *$e \cdot S \cdot e$ — группа с единицей e (относительно операции в S);*
2. *$R = e \cdot S$ — минимальный правый идеал в S и $e \in R$.*

Доказательство

1. Очевидно: $G \subset L$, $e \in G$ и $G \cdot G \subset G$.

Имеем $e \cdot x = x \cdot e = x$ для всех $x \in G$:

$x = e \cdot s \cdot e \implies e \cdot x = e \cdot e \cdot s \cdot e = x$, $x \cdot e = e \cdot s \cdot e \cdot e = x$.

$\forall x \in G \; \exists y \in G$ такое, что $y \cdot x = e$ (левый обратный):

$x \in L$, L минимален $\Rightarrow L = S \cdot x \Rightarrow e = s \cdot x$ для некоторого $s \in S$

$\implies y = e \cdot s \cdot e \in G$ и $y \cdot x = e \cdot s \cdot e \cdot x = e \cdot s \cdot x = e \cdot e = e$.

y и правый обратный: Пусть $y \cdot x = e$, $z \in G$, $z \cdot y = e$. Имеем $x \cdot y = e \cdot x \cdot y = z \cdot y \cdot x \cdot y = z \cdot e \cdot y = z \cdot y = e$.

2. $e \cdot S$ — правый идеал. Пусть $J \subset e \cdot S$ — другой правый идеал и $t \in J$. Имеем $t \in e \cdot S$ и $t \cdot e \in e \cdot S \cdot e = G$. Возьмём $y \in G$, для которого $t \cdot e \cdot y = e$. Имеем $e \in J$, потому что J — правый идеал и $t \in J$. Значит, $R = e \cdot S \subset J$. Ясно, что $e = e \cdot e \in R$. □

Рассуждение остаётся верным при замене «левый» $\leftrightarrow$ «правый». Значит, *Идемпотент e принадлежит некоторому минимальному левому идеалу $\iff$ e принадлежит некоторому минимальному правому идеалу.*

Следствие

Если полугруппа S имеет минимальный левый или правый идеал, содержащий идемпотент, то

$$\begin{aligned} K(S) &= \bigcup\{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\} \\ &= \bigcup\{R : R \text{ — минимальный правый идеал в } S\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Предыдущая теорема $\Longrightarrow$ S имеет минимальный правый идеал. Предыдущее следствие $\Longrightarrow$ $K(S) = \bigcup\{R : R$ — минимальный правый идеал в $S\}$. □

Определение

Через $E(S)$ обозначается множество всех идемпотентов полугруппы S. Для $e, f \in E(S)$ $e \leqslant f$, если $e \cdot f = f \cdot e = e$. Отношение $\leqslant$ — естественный порядок на $E(S)$.

Это действительно порядок:

- рефлексивность очевидна;
- антисимметричность очевидна;
- транзитивность:
  $e \cdot f = f \cdot e = e, \quad f \cdot g = g \cdot f = f \implies$
  $e \cdot g = e \cdot f \cdot g = e \cdot f = e, \quad g \cdot e = g \cdot f \cdot e = f \cdot e = e.$

Пример

Пусть X — множество. Множество $\mathscr{P}(X)$ всех его подмножеств — полугруппа относительно операции $\cap$. Все элементы — идемпотенты. Для $A, B \subset X$ имеем $A \leqslant B$ (относительно естественного порядка) $\iff A \subset B$.

Предложение

Пусть S — компактная правотопологическая полугруппа и $e \in E(S)$. Тогда каждый минимальный левый идеал $L \subset S \cdot e$ содержит идемпотент $f \leqslant e$.

Доказательство. Вторая теорема о компактных полугруппах $\implies$ L замкнут $\implies$ L — компактная правотопологическая полугруппа $\implies$ существует идемпотент $\varepsilon \in L$.

Имеем $\varepsilon \in L \subset S \cdot e \implies \varepsilon = s \cdot e$ для некоторого $s \in S \implies$ $\varepsilon \cdot e = s \cdot e \cdot e = s \cdot e = \varepsilon$.

Положим $f = e \cdot \varepsilon$. L — левый идеал, $\varepsilon \in L \implies f \in L$.

f — идемпотент:
$f \cdot f = e \cdot \varepsilon \cdot e \cdot \varepsilon = e \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon = e \cdot \varepsilon = f$.

$f \leqslant e$:
$e \cdot f = e \cdot e \cdot \varepsilon = e \cdot \varepsilon = f$ и $f \cdot e = e \cdot \varepsilon \cdot e = e \cdot \varepsilon = f$. □

Теорема (о минимальных идемпотентах)

Пусть S — компактная правотопологическая полугруппа и e — идемпотент (т.е. $e \in E(S)$).

1. *Идемпотент e минимален в $E(S)$ $\iff$ $e \in K(S)$.*
2. *Идемпотент e минимален в $E(S)$ $\iff$ $L = S \cdot e$ — минимальный левый идеал.*

1. Пусть e — минимальный идемпотент и $L \subset S \cdot e$ — минимальный левый идеал (он существует по второй теореме о компактных полугруппах). В силу предложения существует идемпотент $f \in L$, $f \leqslant e$. Идемпотент e минимален $\implies$ $f = e$ $\implies$ $e \in L$. По определению $K(S)$ имеем $L \subset K(S)$.

Обратно, пусть L — минимальный левый идеал, $e \in L$ и $x \in E(S)$, $x \leqslant e$. Надо показать, что $x = e$.

Имеем $S \cdot x \subset S \cdot e$, потому что $x \leqslant e \implies x = x \cdot e$ и, значит, $x \in S \cdot e$.

L минимален, $e \in L \implies L = S \cdot e$, $x \in S \cdot e \implies S \cdot x = S \cdot e$ $\implies e = e \cdot e = s \cdot x$ для некоторого $s \in S$.

$x \leqslant e \implies x = e \cdot x \implies x = s \cdot x \cdot x = s \cdot x = e.$

2. Если L — минимальный левый идеал, то $L \subset K(S)$, так что если $e \in L$, то $e \in K(S)$,
и ① $\implies$ e минимален.

Обратно, если e минимален, то ① $\implies$ $e \in K(S)$, т.е. $e \in L$ для некоторого минимального левого идеала L. L минимален, $e \in L \implies S \cdot e = L$. $\square$

Следствие

Для компактной правотопологической полугруппы S минимальные идемпотенты — это в точности идемпотенты из $K(S)$, т.е. идемпотенты, принадлежащие минимальным левым (или правым) идеалам.

Следствие

Пусть S — компактная правотопологическая полугруппа и $e \in E(S)$. Тогда существует минимальный идемпотент $f \leqslant e$.

Доказательство. S компактна, умножение непрерывно по первому аргументу $\implies$ $S \cdot e$ — компактная подполугруппа $\implies$ $\exists$ минимальный левый идеал $L \subset S \cdot e$. В силу предложения существует идемпотент $f \in L$ такой, что $f \leqslant e$. Теорема $\implies$ f минимален. $\square$

Толстые множества в полугруппах

Пусть S — произвольная полугруппа. Для $x \in S$ и $A \subset S$

$x{\cdot}A = \{x{\cdot}a : a \in A\}$, $\quad A{\cdot}x = \{a{\cdot}x : a \in A\}$, $\quad x^{-1}{\cdot}A = \{s \in S : x{\cdot}s \in A\}$.

Для любого ультрафильтра p на S

$$x^{-1} \cdot A \in p \iff x \cdot W \subset A \quad \text{для некоторого } W \in p \iff$$
$$\iff A \in x \cdot p \iff x \cdot p \in \overline{A}.$$

Определение

Подмножество $T \subset S$ называется **толстым**, если семейство $\{x^{-1} \cdot T : x \in S\}$ центрировано.

Если S — группа, то $T \subset S$ толстое $\iff$ семейство $\{x \cdot T : x \in S\}$ центрировано.

Замечание

1. Для любого $p \in \beta S$ замыкание $\overline{S \cdot p}$ множества $S \cdot p$ в βS равно $\beta S \cdot p$:
$$\overline{S \cdot p} = \beta S \cdot p.$$
Действительно, умножение непрерывно по 1-му аргументу, при непрерывном отображении образ замыкания содержится в замыкании образа $\implies$ $\overline{S} \cdot p \subset \overline{S \cdot p}$. $\overline{S} = \beta S$ $\implies$ $\beta S \cdot p \subset \overline{S \cdot p}$. Умножение непрерывно по 1-му аргументу $\implies$ $\beta S \cdot p$ замкнуто $\implies$ $\overline{S \cdot p} = \beta S \cdot p$.
2. Для любого $x \in S$
$$\overline{x^{-1} \cdot S} = x^{-1} \cdot \beta S$$
(в полугруппе βS). Действительно, для $x \in S$ умножение на x слева непрерывно, $x^{-1} \cdot \beta S$ — прообраз βS, $\beta S = \overline{S}$. Прообраз замыкания равен замыканию прообраза $\implies$ $\overline{x^{-1} \cdot S} = x^{-1} \cdot \beta S$.

Теорема (о толстых множествах)

Для подмножества T полугруппы S следующие условия равносильны:

1. *T толстое;*
2. *для любого конечного $F \subset S$ найдётся $y \in S$ такое, что $F \cdot y \subset T$;*
3. *для некоторого $p \in \beta S$ левый идеал $\beta S \cdot p$ полугруппы βS содержится в $\overline{T} = \{q \in \beta S : T \in q\}$;*
4. *существует минимальный левый идеал L в βS, для которого $L \subset \overline{T}$.*

Доказательство. 1 $\Leftrightarrow$ 2: Множество T толстое $\iff$ для любого конечного $F \subset S$ существует $y \in \bigcap\limits_{x \in F} x^{-1} \cdot T$.

Это означает, что $\forall x \in F$ имеем $x \cdot y \in T$, т.е. $F \cdot y \subset T$.

1 $\Leftrightarrow$ 3: Семейство $\{x^{-1} \cdot T : x \in S\}$ центрировано $\iff$ оно содержится в некотором ультрафильтре p на S. Покажем, что $\beta S \cdot p \subset \overline{T}$.

Для любых $x \in S$ и $A \in p$ имеем $A \cap x^{-1} \cdot T \neq \varnothing \iff x \cdot A \cap T \neq \varnothing \iff T \in x \cdot p \iff x \cdot p \in \overline{T}$. Элемент x произволен $\implies S \cdot p \subset \overline{T}$.

$\overline{T}$ замкнуто в $\beta S \implies$ замыкание $\overline{S \cdot p} = \beta S \cdot p$ множества $S \cdot p$ в βS содержится в $\overline{T}$.

Обратно, если $\beta S \cdot p \subset \overline{T}$, то $S \cdot p \subset \overline{T} \iff \forall x \in S \;\; x \cdot p \in \overline{T} \iff \forall x \in S \;\; T \in x \cdot p \iff \forall x \in S \; \exists \; A \in p$ такое, что $T = x \cdot A$, т.е. $x^{-1} \cdot T \supset A$. Ультрафильтр p — центрированное семейство $\implies$ и семейство $\{x^{-1} \cdot T : x \in S\}$ центрировано.

3 $\Rightarrow$ 4: По второй теореме о компактных полугруппах (в любом левом идеале содержится минимальный левый идеал).

4 $\Rightarrow$ 3: Для $p \in L$ имеем $\beta S \cdot p \subset L \subset \overline{T}$. $\square$

Пример

Рассмотрим аддитивную полугруппу $(\mathbb{N}, +)$.

Любое конечное множество $F \subset \mathbb{N}$ содержится в начальном интервале $I_k = \{1, \ldots, k\}$ для некоторого k, и для $y \in \mathbb{N}$ $I_k + y$ — это интервал длины k. Любой интервал длины k имеет такой вид. По доказанной теореме (1 $\Leftrightarrow$ 2) множество $A \subset \mathbb{N}$ толстое $\iff$ оно содержит произвольно длинные конечные интервалы.

Нетолстое множество с нетолстым дополнением

Синдетические множества в полугруппах

Определение

Подмножество A полугруппы S называется **синдетическим**, если существует конечное $F \subset S$, для которого

$$\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A = S.$$

$A \subset S$ синдетическое $\iff$ существует конечное $F \subset S$ такое, что для всякого $s \in S$ имеем $t \cdot s \in A$ для некоторого $t \in F$.

Если S — группа, то множество $A \subset S$ синдетическое $\iff$ существует конечное $F \subset S$, для которого $F \cdot A = S$.

Полезное равенство: для всех $x \in S$ и $X \subset S$

$$S \setminus x^{-1} \cdot X = x^{-1} \cdot (S \setminus X)$$

Действительно, $s \notin x^{-1} \cdot X \iff x \cdot s \notin X \iff x \cdot s \in S \setminus X$.

Теорема (о двойственности)

Пусть S — произвольная полугруппа и $A, T \subset S$.

1. *A синдетическое $\iff$ A пересекает все толстые множества.*
2. *T толстое $\iff$ T пересекает все синдетические множества.*

Доказательство. 1, 2, *необходимость:* Пусть $T \subset S$ толстое и $A \subset S$ синдетическое.

A синдетическое $\implies$ существует конечное $F \subset S$, для которого $\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A = S$.

T толстое $\implies$ существует $s \in \bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot T$.

Для $t \in F$ такого, что $s \in t^{-1} \cdot A$, имеем $t \cdot s \in A \cap T$.

1, *достаточность:* Если A не синдетическое, то для любого конечного $F \subset S$ имеем $\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A \neq S \implies S \setminus (\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A) \neq \varnothing$ $\implies \bigcap\limits_{t \in F} (S \setminus t^{-1} \cdot A) \neq \varnothing$. Полезное равенство $\implies$ $\bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot (S \setminus A) \neq \varnothing$ для любого конечного $F \subset S \implies S \setminus A$ толстое.

2, *достаточность:* Если T не толстое, то для некоторого конечного $F \subset T$ имеем $\bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot T = \varnothing$. Для этого F

$$S \setminus (\bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T) = \bigcup_{t \in F} (S \setminus t^{-1} \cdot T) = S.$$

Полезное равенство $\implies \bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot (S \setminus T) = S$, т.е. $S \setminus T$ синдетическое. $\square$

Теорема (о синдетических множествах)

A синдетическое $\iff$ $\overline{A}$ пересекает все левые идеалы в βS $\iff$ $\overline{A}$ пересекает все минимальные левые идеалы в βS.

Доказательство. По теореме о двойственности A синдетическое $\iff$ $S \setminus A$ не толстое. По теореме о толстых множествах, пункт ④, никакой левый идеал не содержится в $\overline{S \setminus A} = \beta S \setminus \overline{A}$ $\iff$ любой левый идеал пересекает $\overline{A}$.

По второй теореме о компактных полугруппах любой левый идеал в βS содержит минимальный левый идеал. $\square$

Пример

Рассмотрим полугруппу $(\mathbb{N},+)$.

Для $A\subset\mathbb{N}$ $\ n^{-1}+A=(A-n)\cap\mathbb{N}$ и для конечного $F\subset\mathbb{N}$ $\bigcup\limits_{x\in F}(x^{-1}+A)=(A-F)\cap\mathbb{N}$.

Множество $A\subset\mathbb{N}$ синдетическое $\iff$ существует конечное $F\subset\mathbb{N}$, для которого $A-F\supset\mathbb{N}$ $\iff$ существует $k\in\mathbb{N}$ такое, что $A-I_k\supset\mathbb{N}$ (здесь $I_k=\{1,\ldots,k\}$) $\iff$ для любого натурального n имеем $n\in A-I_k$ $\iff$ $(I_k+n)\cap A\neq\varnothing$ для любого n, т.е. всякий интервал длины k пересекает A $\iff$ расстояние между любыми соседними числами $x,y\in A$ не больше k.

Кусочно синдетические множества

Определение

Подмножество A полугруппы S называется кусочно синдетическим, если найдётся конечное $F \subset S$, для которого множество $\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A$ толстое в S.

Для любого $s \in S$ имеем $s^{-1} \cdot S = \{x \in S : s \cdot x \in S\} = S \implies$ полугруппа S — толстое синдетическое множество в себе $\implies$

Предложение

Всякое синдетическое множество является кусочно синдетическим. Всякое толстое множество является кусочно синдетическим.

Наша ближайшая цель — доказать, что бывают ультрафильтры, состоящие из кусочно синдетических множеств.

Предложение

Если A — кусочно синдетическое множество в полугруппе S, то существуют $x \in S$ и минимальный идемпотент e в βS такие, что $x^{-1} \cdot A \in e$. При этом e и $x \cdot e$ содержатся в идеале

$$K(\beta S) = \bigcup \{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } \beta S\}$$

и $x \cdot e \in \overline{A}$, т.е. $\overline{A} \cap K(\beta S) \neq \varnothing$.

Доказательство. Зафиксируем конечное $F \subset S$, для которого множество $T = \bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A$ толстое. Теорема о толстых множествах $\implies$ $\exists$ минимальный левый идеал L в βS, для которого $L \subset \overline{T}$. По второй теореме о компактных полугруппах L замкнут $\implies$ компактен $\implies$ существует идемпотент e в L. Он минимален. Поскольку $\overline{t^{-1} \cdot A}$ — замыкание $t^{-1} \cdot A$, имеем

$$e \in L \subset \overline{T} = \bigcup_{t \in F} \overline{t^{-1} \cdot A},$$

так что $\exists x \in F$, для которого $e \in \overline{x^{-1} \cdot A}$. Это означает, что $x^{-1} \cdot A \in e$, т.е. $A \in x \cdot e$. При этом $x \cdot e \in x \cdot L \subset L \subset K(\beta S)$. $\square$

Теорема (о кусочно синдетических множествах)

Подмножество A полугруппы S кусочно синдетическое $\iff$ $A \in p$ для некоторого ультрафильтра $p \in K(\beta S)$, т.е. $\overline{A} \cap K(\beta S) \neq \varnothing$.

Доказательство. *Необходимость* вытекает из предложения.
Достаточность: Пусть $A \in p \in K(\beta S)$, и пусть $L \ni p$ — минимальный левый идеал. Тогда $L = \beta S \cdot p$ и $L \subset \bigcup\limits_{t \in E} \overline{t^{-1} \cdot A}$ для некоторого конечного $E \subset S$. Действительно, пусть $q \in L$. Поскольку L минимален, имеем $L = \beta S \cdot q$. Имеем также $p \in L$, $L = \overline{S \cdot q}$ и $\overline{A}$ — окрестность p. Значит, $\overline{A} \cap S \cdot q \neq \varnothing$, т.е. $t \cdot q \in \overline{A}$ для некоторого $t \in S \implies q \in t^{-1} \cdot \overline{A} = \{x \in \beta S : t \cdot x \in \overline{A}\} = \overline{t^{-1} \cdot A}$ (в силу частичной непрерывности умножения по второму аргументу). $L \subset \beta S$ компактно, множества $\overline{t^{-1} \cdot A}$ открыты и покрывают $L \implies \exists$ конечное $E \subset S$, для которого $L \subset \bigcup\limits_{t \in E} \overline{t^{-1} \cdot A} = \overline{\bigcup\limits_{t \in E} t^{-1} \cdot A}$.

Теорема о толстых множествах $\implies \bigcup\limits_{t \in E} t^{-1} \cdot A$ толстое $\implies$ A кусочно синдетическое. □

Упражнение

1. Пусть G — группа или полугруппа $(\mathbb{N},+)$ или $(\mathbb{N}\cup\{0\},+)$. Если множество $A\subset G$ кусочно синдетическое, то $A=S\cap T$, где S синдетическое и T толстое.
2. Пусть G — произвольная полугруппа. Если $A=S\cap T$, где S синдетическое и T толстое, то A кусочно синдетическое.

Решение. 1. Пусть $F\subset G$ конечно, $\bigcup\limits_{t\in F} t^{-1}\cdot A=T'$ толстое. В группе (в $\mathbb{N}$) $t^{-1}\cdot A$ — обычное произведение (пересечение $(A-t)\cap\mathbb{N}$) $\implies A\subset\bigcap\limits_{t\in F} t\cdot T'$. $\forall$ конечного $E\subset G$

$$\bigcap_{s\in E} s^{-1}\cdot\Big(\bigcap_{t\in F} t\cdot T'\Big)=\bigcap_{s\in E}\bigcap_{t\in F} s^{-1}\cdot t\cdot T'=\bigcap_{\substack{t\in F\\ s\in E}}(t^{-1}\cdot s)^{-1}\cdot T'\neq\varnothing.$$

$\implies T=\bigcap\limits_{t\in F} t\cdot T'$ толстое. Для $S=A\cup\Big(G\smallsetminus\bigcap\limits_{t\in F} t\cdot T'\Big)$

$$\bigcup_{t\in F} t^{-1}\cdot S=\bigcup_{t\in F} t^{-1}\cdot A\cup\bigcup_{t\in F} t^{-1}\Big(G\smallsetminus\bigcap_{t\in F} t\cdot T'\Big)=$$

$$=T'\cup\bigcup_{t\in F} t^{-1}\cdot\Big(\bigcup_{t\in F}(G\smallsetminus t\cdot T')\Big)=T'\cup\bigcup_{t\in F} t^{-1}\cdot\Big(\bigcup_{t\in F}(t\cdot(G\smallsetminus T'))\Big)=G.$$

2. Пусть $A = S \cap T$, S синдетическое и T толстое. Пусть $F \subset G$ конечно, $\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot S = G$. Положим $T' = \bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T$. Множество T' толстое:

- $x^{-1} \cdot (y^{-1} \cdot T) = (y \cdot x)^{-1} \cdot T$, потому что $y^{-1} \cdot T = \{s : y \cdot s \in T\}$ и $x^{-1} \cdot (y^{-1} \cdot T) = \{s : x \cdot s \in y^{-1} \cdot T\} = \{s : y \cdot x \cdot s \in T\} = (y \cdot x)^{-1} \cdot T$;
- $s^{-1}\Big(\bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T\Big) = \bigcap_{t \in F} (t \cdot s)^{-1} \cdot T$, потому что $x \in s^{-1} \cdot \Big(\bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T\Big) \iff s \cdot x \in \bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T$, т.е. $t \cdot s \cdot x \in T$ для всех $t \in F \iff x \in \bigcap_{t \in F} (t \cdot s)^{-1} \cdot T$.

Следовательно, для любого конечного $E \subset G$ имеем $\bigcap_{s \in E}\Big(\bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T\Big) = \bigcap_{\substack{t \in F \\ s \in E}} (t \cdot s)^{-1} \cdot T \neq \varnothing$.

Покажем, что $\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A \supset T'$:

$$\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot (S \cap T) = \bigcup_{t \in F} (t^{-1} \cdot S \cap t^{-1} \cdot T) \supset$$
$$\supset \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot S \cap \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot T = G \cap T' = T'. \qquad \square$$

Теорема Хейлса–Джуитта

Замечания о полугруппах βS

Пусть S — полугруппа.
Напомним: для $A \subset S$ $\overline{A} = \{p \in \beta S : A \in p\}$ и для $p, q \in \beta S$ ультрафильтр $p \cdot q$ имеет базу, состоящую из всех множеств

$$\bigcup \{x \cdot Q_x : x \in P\}, \quad \text{где } P \in p,\ Q_x \in q. \qquad (*)$$

Предложение

1. *Для любых $A, B \subset S$ имеет место включение $\overline{A} \cdot \overline{B} \subset \overline{A \cdot B}$.*
2. *Если $H \subset S$ — подполугруппа в S, то $\overline{H}$ — подполугруппа в βS.*
3. *Если $I \subset S$ — левый (правый, двусторонний) идеал в S, то $\overline{I}$ — левый (правый, двусторонний) идеал в βS.*

1. Надо показать: если $A \in p \in \beta S$ и $B \in q \in \beta S$, то $A \cdot B \in p \cdot q$.

Достаточно в $(*)$ положить $P = A$ и $Q_x = B$ для всех $x \in P = A$.

2. немедленно вытекает из ①.

3. Для левого идеала: $\beta S \cdot \overline{I} = \overline{S} \cdot \overline{I} \subset \overline{S \cdot I} \subset \overline{I}$. Для остальных аналогично. □

Предложение

Если X — множество и $Y \subset X$, то существует гомеоморфизм $\varphi\colon \overline{Y} \to \beta Y$. Если при этом X — полугруппа и Y — её подполугруппа, то φ — изоморфизм полугрупп.

Доказательство. Пусть φ — отображение, которое каждому ультрафильтру $p \in \overline{Y}$ (т.е. $Y \in p$) ставит в соответствие семейство
$$\varphi(p) = \{A \subset Y : A \in p\}.$$
Очевидно, $\varphi(p)$ — ультрафильтр на Y. Получилось отображение $\varphi\colon \overline{Y} \to \beta Y$. Ясно, что оно взаимнооднозначно. φ — гомеоморфизм: базу топологии подпространства $\overline{Y}$ пространства βX составляют множества $\overline{A} \cap \overline{Y} = \overline{A \cap Y} = \{p \in \beta X : A \cap Y \in p\}$, где $A \subset X$, т.е. множества $\{p \in \beta X : B \in p\}$, где $B \subset Y$, а базу топологии βY — множества $\overline{B} = \{p \in \beta Y : B \in p\}$, где $B \subset Y$. Отображение φ переводит элементы базы в элементы базы $\implies$ это гомеоморфизм.

Пусть X — полугруппа и Y — подполугруппа. Из $(*)$ видно, что $\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$ для любых $p, q \in \overline{H}$. Значит, φ — взаимнооднозначный гомоморфизм, т.е. изоморфизм. $\square$

Предложение

Если S и H — полугруппы и $h\colon S \to H$ — гомоморфизм, то $\hat{h}\colon \beta S \to \beta H$ — гомоморфизм полугрупп βS и βH.

Доказательство. Пусть $\hat{h}(p \cdot q) \neq \hat{h}(p) \cdot \hat{h}(q)$.

$\beta H \in T_2 \implies \exists$ непересекающиеся открытые $U \ni \hat{h}(p \cdot q)$ и $V \ni \hat{h}(p) \cdot \hat{h}(q)$ в βH. Умножение на $\hat{h}(q)$ справа непрерывно $\implies \exists$ открытое $W \ni \hat{h}(p)$ такое, что $W \cdot \hat{h}(q) \subset V$. Умножение на q справа непрерывно $+$ $\hat{h}$ непрерывно $\implies \exists$ открытое $O_p \ni p$ (в βS) такое, что $O_p \cdot q \subset \hat{h}^{-1}(U)$ и $O_p \subset \hat{h}^{-1}(W)$, т.е. $\hat{h}(O_p) \cdot \hat{h}(q) \subset V$. Пусть $s \in O_p \cap S$. Тогда $\hat{h}(s \cdot q) \in U$, $\hat{h}(s) \cdot \hat{h}(q) \in V$ и $\hat{h}(s) = h(s) \in H$. Умножение на s слева непрерывно $+$ $\hat{h}$ непрерывно $\implies \exists$ открытое $O_q \ni q$ такое, что $s \cdot O_q \subset \hat{h}^{-1}(U)$ и $\hat{h}(s) \cdot \hat{h}(O_q) \subset V$. Пусть $t \in O_q \cap S$. Тогда $\hat{h}(s \cdot t) \in U$ и $\hat{h}(s) \cdot \hat{h}(t) \in V$. Получили противоречие с тем, что $\hat{h}(s) = h(s)$, $\hat{h}(t) = h(t)$, $\hat{h}(s \cdot t) = h(s \cdot t)$ и $h(s \cdot t) = h(s) \cdot h(t)$ (так как h — гомоморфизм). $\square$

Определение

Ретракция полугруппы S на её подполугруппу H — полугрупповой гомоморфизм $r\colon S \to H$ такой, что его сужение на H — тождественное отображение (т.е. $r(h) = h$ для $h \in H$).

Предложение

Если $r\colon S \to H$ — ретракция, то $\hat{r}\colon \beta S \to \overline{H}$ — тоже ретракция.

Доказательство. Знаем: $\hat{r}$ — непрерывный гомоморфизм. Обозначим сужение $\hat{r}|_{\overline{H}}\colon \overline{H} \to \overline{H}$ через $\tilde{r}$. H всюду плотно в $\overline{H}$, $\tilde{r}$ непрерывно и $\tilde{r}$ совпадает с (непрерывным) тождественным отображением $\mathrm{id}_{\overline{H}}\colon \overline{H} \to \overline{H}$ на H $\implies$ $\tilde{r} = \mathrm{id}_{\overline{H}}$. □

Теорема Хейлса–Джуитта

Теорема (Hales–Jewett)

Пусть S — полугруппа, $H \subset S$ — подполугруппа такая, что $I = S \smallsetminus H$ — двусторонний идеал в S, и пусть $\mathfrak{R}$ — конечное множество ретракций из S на H. Тогда для любого кусочно синдетического множества A в H найдётся $s_A \in I$ такое, что $r(s_A) \in A$ для всех $r \in \mathfrak{R}$.

Доказательство. Из основного свойства ультрафильтров следует, что $\beta S \smallsetminus \overline{H} = \overline{S \smallsetminus H}$. В силу доказанных предложений $\overline{H}$ — подполугруппа в βS, $\overline{I} = \beta S \smallsetminus \overline{H}$ — двусторонний идеал в βS и $\hat{r} \colon \beta S \to \overline{H}$ — ретракции для всех $r \in \mathfrak{R}$.

Предложение перед теоремой о кусочно синдетических множествах $\implies$ $\exists s_0 \in H$, для которого $s_0^{-1} \cdot A \in e$, где e — минимальный идемпотент в $\beta H = \overline{H}$. Предложение перед теоремой о минимальных идемпотентах $\implies$ $\exists$ минимальный идемпотент f в βS, для которого $f \leqslant e$.

Имеем: e — минимальный идемпотент в $\overline{H}$, $s_0^{-1} \cdot A \in e$, f — минимальный идемпотент в βS, $f \leqslant e$.

Теорема о минимальных идемпотентах $\implies$ $f \in K(\beta S)$, $K(\beta S)$ — наименьший двусторонний идеал $\implies$ $f \in \overline{I}$.

Покажем: $\hat{r}(f) = e$ для всех $r \in \mathfrak{R}$. Действительно, $\hat{r}(f)$ — идемпотент (так как $\hat{r}$ — гомоморфизм).
$f \leqslant e \implies f \cdot e = e \cdot f = f \implies$

$$\hat{r}(f) = \hat{r}(f \cdot e) = \hat{r}(f) \cdot \hat{r}(e) = \hat{r}(f) \cdot e, \quad \hat{r}(f) = \hat{r}(e \cdot f) = e \cdot \hat{r}(f),$$

т.е. $\hat{r}(f) \leqslant e$. Идемпотент e минимален в $\beta H \implies \hat{r}(f) = e$.
Отсюда и из того, что $s_0^{-1} \cdot A \in e$, следует, что $r^{-1}(s_0^{-1} \cdot A) \in f$ для всех $r \in \mathfrak{R}$. Имеем также $I \in f$, так как $f \in \overline{I}$.
f — (ультра)фильтр $\implies$ существует

$$s \in I \cap \bigcap_{r \in \mathfrak{R}} r^{-1}(s_0^{-1} \cdot A).$$

Имеем $s \in I$ и $r(s) \in s_0^{-1} \cdot A$, т.е. $s_0 \cdot r(s) \in A$ для всех $r \in \mathfrak{R}$.

В качестве s_A можно взять $s_0 \cdot s$: имеем $s_A \in I$ (потому что I — идеал) и $r(s_A) = r(s_0 \cdot s) = r(s_0) \cdot r(s) = s_0 \cdot r(s) \in A$, так как r — гомоморфизм, $s_0 \in H$ и $r(x) = x$ для $x \in H$. $\square$

Следствие

Пусть $(S_0, +)$ *— коммутативная полугруппа,* $A \subset S_0$ *— кусочно синдетическое множество и* F *— конечное подмножество* S_0*. Тогда найдутся* $s \in S_0$ *и* $n \in \mathbb{N}$*, для которых* $\{s + nf : f \in F\} \subset A$*.*

Доказательство. Рассмотрим $S = S_0 \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$, $H = S_0 \times \{0\}$ и $\mathfrak{R} = \{r_f : f \in F\}$, где $r_f(s, n) = (s + nf, 0)$.

Теорема Хейлса–Джуитта $\Longrightarrow$ $\exists\ (s, n) \in S_0 \times \mathbb{N}$ такое, что $r_f(s, n) \in A$ для всех $f \in F$. □

Следствие

Любое кусочно синдетическое подмножество $(\mathbb{N}, +)$ *содержит арифметические прогрессии произвольной длины.*

Следствие

Пусть $k \in \mathbb{N}$*,* A *— кусочно синдетическое множество в* $(\mathbb{N}^k, +)$ *и* $n \in \mathbb{N}$*. Тогда* A *содержит гомотетичный образ* k*-мерного куба* $\{1, \ldots, n\}^k$*.*

Динамические системы

Определение

Пусть X — любое множество и S — моноид (полугруппа с единицей 1_S). Действие S на X — это отображение $\alpha\colon S \times X \to X$ (вместо $\alpha(s, x)$ будем писать $s \cdot x$ или sx) со свойствами

- $1_S \cdot x = x$ для всех $x \in X$;
- $s \cdot (t \cdot x) = (s \cdot t) \cdot x$ для всех $x \in X$ и $s, t \in S$ (ассоциативность).

Если задано действие α моноида S на X, то мы говорим, что моноид S действует на X посредством α.

Таким образом, действие α порождает гомоморфизм из S в полугруппу X^X всех отображений $X \to X$ с операцией композиции. Этот гомоморфизм каждому $s \in S$ ставит в соответствие отображение $s\cdot : X \to X$, определённое правилом $s\cdot(x) = s \cdot x$ («умножение» на s слева).

Определение

Пусть S — моноид. **Динамическая система над S**, или **S-система**, — это пара (X, α), где

- X — непустой хаусдорфов компакт;
- α — действие S на X;
- отображение $s\bullet : X \to X$, $x \mapsto s \cdot x$, непрерывно для всех $s \in S$.

Пространство X называется **фазовым пространством** S-системы.

Для топологического пространства X через $C(X, X)$ обозначается полугруппа всех непрерывных отображений $X \to X$ с операцией композиции $\circ$. Это подполугруппа полугруппы $(X^X, \circ)$ всех отображений $X \to X$. Пара (X, α), где X — компакт и α — действие S на X, является динамической системой, если образ гомоморфизма $h\colon S \to X^X$, $h(s) = s\bullet$, который порождается действием α, содержится в $C(X, X)$.

Элементы S часто интерпретируют как моменты времени.

Подсистемы динамических систем

Определение

Пусть (X, α) — S-система, $x \in X$.

Подмножество $Y \subset X$ **инвариантно**, если $S \cdot Y \subset Y$, т.е. $s \cdot y \in Y$ для всех $s \in S$ и $y \in Y$.

Для $Y \subset X$ пара $(Y, \alpha|_{S \times Y})$ — **подсистема** системы X над S, или **S-подсистема**, если Y непусто, замкнуто и инвариантно. S-подсистема сама является S-системой над S.

Орбита точки x — это множество $\operatorname{orb}(x) = S \cdot x = \{s \cdot x : s \in S\}$.

Наименьшая подсистема, содержащая x, обозначается $\overline{x}$.

Система X **транзитивна**, если $X = \overline{x}$ для некоторого $x \in X$.

Замечания

1. Пересечение инвариантных множеств инвариантно.
2. $\operatorname{orb} x$ — наименьшее инвариантное множество, содержащее x.
3. Подсистема $\overline{x}$ совпадает с замыканием $\overline{\operatorname{orb}(x)}$ в X орбиты $\operatorname{orb}(x)$: $\overline{\operatorname{orb} x} \subset \overline{x}$ по определению подсистемы, и $\overline{\operatorname{orb} x}$ инвариантно, потому что при непрерывных отображениях $s\cdot$ образ замыкания содержится в замыкании образа.

Определение

Пусть X — S-система и M — её S-подсистема. Говорят, что M **минимальна**, если любая S-подсистема системы M совпадает с M.

Пример — неподвижная точка.

Теорема

Всякая S-система X содержит минимальную S-подсистему.

Доказательство. Пусть $(\mathscr{S}, \supset)$ — множество всех S-подсистем системы X, частично упорядоченное обратно включению. Для любой цепи (линейно упорядоченного подмножества) $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$ множество $M = \bigcap\limits_{C \in \mathscr{C}} C$ является S-подсистемой: оно замкнуто и непусто как пересечение центрированного семейства замкнутых подмножеств компакта X. Инвариантность очевидна. Это верхняя (относительно обратного включения) грань множества $\mathscr{C}$. По лемме Цорна в $\mathscr{S}$ есть максимальный (т.е. минимальный по включению) элемент. $\square$

Для $U \subset X$ и $s \in S$ полагаем $s^{-1} \cdot U = \{x \in X : s \cdot x \in U\}$.

Теорема (о минимальных подсистемах)

Для S-подсистемы M S-системы X следующие условия равносильны:

1. *M — минимальная S-система;*
2. *для любого $x \in M$ орбита $\operatorname{orb}(x)$ плотна в M (т.е. $\overline{x} = M$);*
3. *для любого открытого $U \subset X$, $U \cap M \neq \varnothing$, существует конечное $F \subset S$, для которого $M \subset \bigcup_{s \in F} s^{-1} \cdot U$.*

Доказательство. 1 $\Leftrightarrow$ 2 очевидно (так как $\overline{x}$ — подсистема M $\forall\, x \in M$ и любая подсистема $Y \subset M$ содержит $\overline{y}$ $\forall\, y \in Y$).

2 $\Rightarrow$ 3: Пусть $x \in M$. ② $\iff$ $\forall\, y \in M$ любое открытое $U \ni y$ пересекает $\operatorname{orb}(x) = S \cdot x$ $\iff$ $\exists\, s \in S$: $s \cdot x \in U$, т.е. $x \in s^{-1} \cdot U$. Точка x любая $\implies$ $M \subset \bigcup_{s \in S} s^{-1} \cdot U$. $s^{-1} \cdot U = s \bullet^{-1}(U)$, $s\bullet$ непрерывно $\implies$ $s^{-1} \cdot U$ открыто. M компактно $\implies$ ③.

3 $\Rightarrow$ 2: Если $x \in M$, $\overline{x} \neq M$, то $U = X \setminus \overline{x}$ открыто и $U \cap M \neq \varnothing$. Если $M \subset \bigcup_{s \in F} s^{-1} \cdot U$, то $x \in s^{-1} \cdot U$ для некоторого $s \in F$, т.е. $s \cdot x \in U$. Однако $s \cdot x \in \operatorname{orb} x \subset \overline{x}$ — противоречие. $\square$

Всякая S-система является своей собственной подсистемой, поэтому теорема верна и для $M = X$. Отсюда вытекает, в частности,

Следствие

Все минимальные динамические системы транзитивны.

Примеры

- $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ с полярными координатами и действие $\alpha\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times X \to X$:
$$t \cdot (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r \cdot e^{-t}\cos(\varphi + t), r \cdot e^{-t}\sin(\varphi + t)).$$
Для $\mathbf{x} \in X$ $\operatorname{orb}(x)$ — спираль $L(\mathbf{x})$, которая начинается в $\mathbf{x}$ и сходится к $(0,0)$, и $\bar{\mathbf{x}} = L(\mathbf{x}) \cup \{(0,0)\}$. Единственная минимальная подсистема — $\{(0,0)\}$. Система X не транзитивна. Для любой точки $\mathbf{x} \neq (0,0)$ подсистема $L(\mathbf{x}) \cup \{(0,0)\}$ транзитивна, но не минимальна.

- $X = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$, $x_\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Зафиксируем $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. Для $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим $\alpha(n,x) = x \cdot x_{\varphi_0}^n$ (поворот на угол $n\varphi$).

  Если $\varphi = q \cdot 2\pi$, где $q = m/n$ (несократимая дробь), то $x_{\varphi_0}^n = 1$ и $x_{\varphi_0}^k \neq 1$ для $k < n$, так что $n\cdot = \mathrm{id}_X$, каждая точка $x \in X$ периодическая (орбита состоит из n точек $x \cdot x_{\varphi_0}^k$) и X — объединение минимальных подсистем $\operatorname{orb}(x)$, $x \in X$. Система X не транзитивна.

  Если $\varphi_0 = p \cdot 2\pi$, где p иррационально, то все орбиты $\{x_{\varphi_0}^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ плотны в X, так что X — минимальная система.

Динамическая система βS

Если S — моноид с единицей 1_S, то βS — моноид с той же единицей 1_S.

Определение

βS — динамическая система над S относительно действия

$$\alpha \colon S \times \beta S \to \beta S, \qquad \alpha(s, p) = s \cdot p.$$

Свойства

- Для $p \in \beta S$ имеем $\operatorname{orb}(p) = \{s \cdot p : s \in S\} = S \cdot p$. Непрерывность умножения по первому аргументу $\implies$ $\overline{p} = \beta S \cdot p$. $\implies$ Транзитивные подсистемы βS $=$ (замкнутые) левые идеалы $\beta S \cdot p$ полугруппы βS для $p \in \beta S$. S-подсистемы βS $=$ замкнутые левые идеалы βS.
- Значит, минимальные подсистемы βS $=$ минимальные левые идеалы полугруппы βS, т.е. идеалы $\beta S \cdot p$ для $p \in K(\beta S)$.
- $\overline{1_S} = \beta S \cdot 1_S = \beta S$. Значит, S-система βS транзитивна.

Универсальность динамической системы βS

Определение

Пусть (X, α_X) и (Y, α_Y) — динамические системы над моноидом S. Отображение $f\colon X \to Y$ называется S-гомоморфизмом, или просто гомоморфизмом, если оно непрерывно и

$$f(s \cdot x) = s \cdot f(x)$$

для всех $x \in X$ и $s \in S$.

Пусть X — S-система относительно действия $\alpha\colon S \times X \to X$. Выберем и зафиксируем любую точку $x \in X$. Для $s \in S$ положим $\alpha_x(s) = s \cdot x$. Получили отображение $\alpha_x\colon S \to X$.

Отображение α_x продолжается до непрерывного отображения $\hat{\alpha}_x\colon \beta S \to X$, так как X — хаусдорфов компакт.

Наша ближайшая цель — показать, что $\hat{\alpha}_x$ является S-гомоморфизмом, т.е. $\hat{\alpha}_x(s \cdot q) = s \cdot \hat{\alpha}_x(q)$ для любых $s \in S$ и $q \in \beta S$.

Заметим: $s \cdot \hat{\alpha}_x(q) = \alpha_{\hat{\alpha}_x(q)}(s) = \hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(s)$.

Предложение

Для $p, q \in \beta S \quad \hat{\alpha}_x(p \cdot q) = \hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(p)$.

Доказательство. Доказательство совершенно аналогично доказательству ассоциативности умножения в полугруппе βS:

Пусть O_1 — любая окрестность $\hat{\alpha}_x(p \cdot q)$. Непрерывность отображения $\hat{\alpha}_x$ и умножения ультрафильтров по 1-му аргументу $\Longrightarrow$ $\exists$ окрестность $V_1 \ni p \cdot q$, для которой $\hat{\alpha}_x(V_1) \subset O_1$, и $\exists$ окрестность $U_1 \ni p$, для которой $U_1 \cdot q \subset V_1$.

Пусть O_2 — любая окрестность $\hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(p)$. Непрерывность отображения $\hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)} \Longrightarrow$ $\exists$ окрестность $U_2 \ni p$, для которой $\hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(U_2) \subset O_2$.

Возьмём $u \in S \cap U_1 \cap U_2$.

$u \cdot q \in V_1$, непрерывность умножения по 2-му аргументу $\Longrightarrow$ $\exists$ окрестность $W_1 \ni q$, для которой $u \cdot W_1 \subset V_1$.

$\hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(u) = \alpha_{\hat{\alpha}_x(q)}(u) =$
$= u \cdot \hat{\alpha}_x(q) \in O_2$,
непрерывность действия S на X $\Longrightarrow$ $\exists$ окрестность $V_2 \ni \hat{\alpha}_x(q)$, для которой $u \cdot V_2 \subset O_2$.
Непрерывность отображения $\hat{\alpha}_x$ $\Longrightarrow$ $\exists$ окрестность $W_2 \ni q$, для которой $\hat{\alpha}_x(W_2) \subset V_2$.

Возьмём $w \in S \cap W_1 \cap W_2$.

Имеем $\hat{\alpha}_x(u \cdot w) = \alpha_x(u \cdot w) = (u \cdot w) \cdot x \in O_1$,
$u \cdot (\hat{\alpha}_x(w)) = u \cdot (\alpha_x(w)) = u \cdot (w \cdot x) \in O_2$. Действие полугруппы S на X ассоциативно $\Longrightarrow$

$$(u \cdot w) \cdot x = u \cdot (w \cdot x) \in O_1 \cap O_2.$$

Любые окрестности точек $(p \cdot q) \cdot x$ и $p \cdot (q \cdot x)$ пересекаются $\Longrightarrow$ эти точки совпадают. $\square$

Ясно, что $\hat{\alpha}_x(1_S) = \alpha_x(1_S) = 1_S \cdot x = x$ для любого $x \in X$.
Вывод: отображения $\hat{\alpha}_x$ для $x \in X$ определяют действие $\hat{\alpha}$ полугруппы βS на X — продолжение действия α полугруппы S:

$$\hat{\alpha}\colon \beta S \times X \to X, \quad \hat{\alpha}(p, x) = \hat{\alpha}_x(p) = p \cdot x.$$

Это действие не непрерывно по второму аргументу (так что $(X, \hat{\alpha})$ не является динамической системой над βS).

Однако оно непрерывно по первому аргументу.

Будем использовать обозначение $p \cdot x = \hat{\alpha}_x(p)$ для $p \in \beta S$, $x \in X$.

Замечание

Для $x \in X$ $\hat{\alpha}_x(\beta S) = \beta S \cdot x = \overline{x}$.

Действительно, $\hat{\alpha}_x$ непрерывно $\implies$ образ $\hat{\alpha}_x(\beta S)$ замыкания множества S содержится в замыкании его образа $\hat{\alpha}_x(S) = \alpha_x(S) = S \cdot x = \mathrm{orb}(x)$, а это замыкание — как раз $\overline{x}$. С другой стороны, образ $\hat{\alpha}_x(\beta S)$ замкнут, будучи компактом, и содержит множество $\hat{\alpha}_x(S)$, а значит, совпадает с его замыканием.

Из доказанного предложения и замечания вытекает

Теорема (об S-гомоморфизме)

Для любой S системы X и любого $x \in X$ существует единственный S-гомоморфизм $\beta S \to X$, переводящий 1_S в x. Его образ совпадает с $\overline{x}$.

В частности, любая транзитивная S-система является гомоморфным образом S-системы βS.

Доказательство

Существование. Искомый гомоморфизм — это $\hat{\alpha}_x$.

Единственность. Пусть f и g — S-гомоморфизмы из βS в X, отображающие 1_S в x. Для любого $s \in S$ имеем
$f(s) = f(s \cdot 1_S) = s \cdot f(1_S) = s \cdot x$ и
$g(s) = g(s \cdot 1_S) = s \cdot g(1_S) = s \cdot x$. Значит, множество
$M = \{p \in \beta S : f(p) = g(p)\}$ содержит 1_S и все $s \in S$, и M замкнуто в βS, т.е. $M = \beta S$ и $f \equiv g$.

Утверждение насчёт образа следует из замечания. □

Лемма (об S-гомоморфизмах)

Пусть X и Y — динамические системы над S, $f : X \to Y$ — S-гомоморфизм и Z и T — подсистемы S-систем X и Y. Тогда

а) *$f(Z)$ — подсистема S-системы Y;*

б) *$f^{-1}(T)$ — подсистема S-системы X;*

в) *если S-система Y минимальна, то f сюръективно;*

г) *если подсистема Z S-системы X минимальна, то подсистема $f(Z)$ S-системы Y тоже минимальна.*

Доказательство. а): X — компакт, Z замкнуто в X, f непрерывно $\implies$ $f(Y)$ замкнуто в Y. Инвариантность: для $z \in Z$ и $s \in S$ имеем $s \cdot z \in Z$, отображение f — гомоморфизм $\implies$ $s \cdot f(z) = f(s \cdot z) \in f(Z)$.

б): T замкнуто в Y, f непрерывно $\implies$ $f^{-1}(T)$ замкнуто в X. Инвариантность: для любых $t \in T$ и $s \in S$ имеем $t \cdot s \in T$, отображение f — гомоморфизм $\implies$ если $x \in f^{-1}(T)$ (т.е. $f(x) = t \in T$) и $s \in S$, то $f(s \cdot x) = s \cdot t \in T$, т.е. $s \cdot x \in f^{-1}(T)$.

в) следует из а), г) следует из б) (надо рассмотреть $f|_Z$). □

Множества времён возврата

Пусть S — моноид с единицей 1_S, (X, α) — динамическая система над S и $x \in X$.

Определение

Для точки $x \in X$ и множества $A \subset X$ множество времён возврата, или просто множество возврата точки x в A определяется так:

$$R(x, A) = \{s \in S : s \cdot x \in A\}$$
$$= \{s \in S : x \in s^{-1} \cdot A\}.$$

Другими словами, $R(x, A)$ — это прообраз множества A при отображении $\alpha_x : S \to X$, определённом правилом $s \mapsto s \cdot x$.

Напомним: для ультрафильтра $p \in \beta$ мы условились, что $p \cdot x = \hat{\alpha}_x(p)$, где $\hat{\alpha}_x : \beta S \to X$ — непрерывное продолжение отображения α_x на βS. Такие продолжения были явно определены в самом начале, при изучении свойств пространства ультрафильтров, для всех отображений множества S в хаусдорфов компакт X.

Замечания

1. Если $p \in \beta S$ и U — окрестность точки $p \cdot x$ в X, то $R(x, U) \in p$.

   Действительно, по определению отображения $\hat{\alpha}_x$ $p \cdot x$ — это предел ультрафильтра

   $$\beta\alpha_x(p) = \{A \subset X : \alpha_x^{-1}(A) \in p\}$$

   — образа ультрафильтра p при отображении α_x. По определению предела ультрафильтра имеем $U \in \beta\alpha_x(p)$; значит, $R(x, U) = \alpha_x^{-1}(U) \in p$.
2. Если $R = R(x, F) \in p$ и F замкнуто, то $p \cdot x \in F$.

   Действительно, мы уже знаем, что $\alpha_x^{-1}(U) \in p$ для любой окрестности U точки $p \cdot x$. Если ещё и $R(x, F) = \alpha_x^{-1}(F) \in p$, то для любой такой окрестности U имеем $\alpha_x^{-1}(U) \cap \alpha_x^{-1}(F) \neq \varnothing$ и, значит, $U \cap F \neq \varnothing$, т.е. $p \cdot x \in F$.
3. Таким образом, если U открыто-замкнуто, то $R(x, U) \in p \iff p \cdot x \in U$.

Теорема (о синдетических множествах возврата)

Для любой S-системы X, любой точки $x \in X$ и любого минимального левого идеала $L \subset \beta S$ следующие условия равносильны:

1. *множество $R(x, U)$ синдетическое для любой окрестности U точки x;*
2. *замыкание $\overline{x}$ орбиты x — минимальная S-подсистема в X;*
3. *существует минимальная S-подсистема системы X, содержащая x.*
4. *существует $p \in L$ такой, что $x = p \cdot x$;*
5. *существует идемпотент $e \in L$ такой, что $x = e \cdot x$;*
6. *существуют идемпотент $e \in L$ и точка $y \in X$ такие, что $x = e \cdot y$;*
7. *существуют $p \in K(\beta S)$ и $y \in X$ такие, что $x = p \cdot y$.*

Доказательство. ❷⇔❸: очевидно.

❸⇒❶: Пусть M — минимальная S-подсистема в X и $x \in M$. Надо показать, что множество $R(x,U)$ синдетическое для любой окрестности U точки x.

M минимально $\implies$ $M = \overline{x}$, и по замечанию $M = \hat{\alpha}_x(\beta S) = \beta S \cdot x$. Пусть U — окрестность x. По теореме о минимальных подсистемах (пункт ③) $M \subset \bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot U$ для некоторого конечного $F \subset S$. Имеем

$$S = \alpha_x^{-1}(M) \subset \alpha_x^{-1}\Big(\bigcup_{t\in F} t^{-1} \cdot U\Big) = \bigcup_{t\in F} \alpha_x^{-1}(t^{-1} \cdot U) = \bigcup_{t\in F} R(x, t^{-1} \cdot U).$$

По определению

$$R(x, t^{-1} \cdot U) = \{s : s \cdot x \in t^{-1} \cdot U\} = \{s : t \cdot s \cdot x \in U\} = t^{-1} \cdot R(x,U)$$

$$\implies S = \bigcup_{t\in F} t^{-1} \cdot R(x,U).$$ Значит, $R(x,U)$ синдетическое.

①⇒②: Пусть $x \in X$, $R(x,U)$ синдетическое для любой окрестности $U \ni x$. Надо показать: $M = \overline{x}$ — минимальная подсистема. Применим пункт ③ теоремы о минимальных подсистемах. Пусть $V \subset X$ открыто и $y \in V \cap M$. Компакт X регулярен $\implies$ $\exists$ открытая окрестность $W \ni y$, для которой $\overline{W} \subset V$. $M = \overline{x}$ — замыкание орбиты $S \cdot x$ точки $x \implies \exists r \in S$ такое, что $r \cdot x \in W$. Множество $U = r^{-1} \cdot W$ открыто (это прообраз W при непрерывном отображении $r\bullet$) и $x \in U$, т.е. U — окрестность x. По предположению $R(x,U)$ синдетическое, т.е. $S = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot R(x,U)$ для конечного $F \subset S$. Имеем

$$S = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot R(x, r^{-1} \cdot W) = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot \big(r^{-1} \cdot R(x,W)\big) = \bigcup_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot R(x,W).$$

Значит, $S \cdot x \subset \bigcup_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot W \subset \bigcup_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot \overline{W}$. Все $(t \cdot r)^{-1} \cdot \overline{W}$ замкнуты (это прообразы $\overline{W}$ при $(t \cdot r)\bullet$) $\implies$ их конечное объединение $\bigcup_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot \overline{W}$ замкнуто $\implies$ оно содержит замыкание $\beta S \cdot x$ множества $S \cdot x$ (см. замечание), так что

$$M = \beta S \cdot x \subset \bigcup_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot \overline{W} \subset \bigcup_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot V.$$

2 ⇒ 4: Пусть $M = \overline{x}$ — минимальная подсистема S-системы X. Напомним, $\hat{\alpha}_x\colon \beta S \to X$ — S-гомоморфизм, отображающий 1_S в x, и что $\hat{\alpha}_x(\beta S) = \overline{x} = M$. Левый идеал L минимален $\implies$ замкнут, и он инвариантен относительно умножения на βS слева $\implies$ L — S-подсистема в βS. Лемма об S-гомоморфизмах + минимальность M $\implies$ $\hat{\alpha}_x(L) = M$. Значит, существует $p \in L$ такой, что $\hat{\alpha}_x(p) = p \cdot x = x$.

4 ⇒ 5: Пусть $p \in L$ и $p \cdot x = x$. Тогда множество

$$G = \{q \in L : q{\cdot}x = x\} = \{q \in L : \hat{\alpha}_x(q) = x\} = \{q \in L : \hat{\alpha}_x(q) = \hat{\alpha}_x(1_S)\}$$

непусто и является замкнутой подполугруппой в L (так как $\hat{\alpha}_x$ — непрерывный S-гомоморфизм). В нём есть идемпотент.

5 ⇒ 6 ⇒ 7 тривиально.

7 ⇒ 3: Пусть $x = p \cdot y$, где $y \in X$ и $p \in K(\beta S)$, и пусть $L' \ni p$ — минимальный левый идеал. Тогда L' — минимальная подсистема S-системы βS. Лемма об S-гомоморфизмах $\implies$ $M = \hat{\alpha}_y(L')$ — минимальная подсистема S-системы X. $p \in L' \implies x = p \cdot y = \hat{\alpha}_y(p) \in M$. □

Следствие

Транзитивная динамическая система X минимальна $\iff$ все множества $R(x, U)$, где $x \in X$ и U — окрестность x, синдетические.

Рекуррентные точки

S — бесконечный моноид с единицей 1_S и X — S-система.

Определение

Точка $x \in X$ **рекуррентна**, если для любой её окрестности U множество возврата $R(x, U)$ нетривиально: $R(x, U) \neq \{1_S\}$.

Пример — точки из теоремы о синдетических множествах возврата, для которых все $R(x, U)$ синдетические. Это точки вида $x = p \cdot y$ для $p \in K(\beta S)$, $y \in X$.

Теорема

Пусть x — точка динамической системы над S.

1. *Точка x рекуррентна $\iff$ $p \cdot x = x$ для некоторого $p \in \beta S \setminus \{1_S\}$.*
2. *Если, вдобавок, $s \cdot t \neq 1_S$ для всех $s, t \in S \setminus \{1_S\}$, то p можно выбрать идемпотентом.*
3. *Множество $R(x, U)$ бесконечно для любой окрестности U точки x $\iff$ $\exists p \in \beta S \setminus S$, для которого $p \cdot x = x$.*

Доказательство. 1 Если x рекуррентна, то семейство
$$\mathscr{R} = \{R(x, \overline{U}) \smallsetminus \{1_S\} : U \text{ — окрестность } x\}$$
центрировано: $R(x, \overline{U} \cap \overline{V}) \subset R(x, \overline{U}) \cap R(x, \overline{V})$. Возьмём $p \in \beta S$, $p \supset \mathscr{R}$. Ясно, что $p \neq 1_S$. Замечание перед теоремой о синдетических множествах возврата $\implies$ $p \cdot x \in \overline{U}$ для любой окрестности U точки x. В хаусдорфовом пространстве $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} : U \text{ — окрестность точки } x\}$ (докажите!) $\implies$ $p \cdot x = x$.

Обратно, пусть $p \neq 1_S$ и $p \cdot x = x$, и пусть U — окрестность x. Надо показать: $R(x, U) \neq \{1_S\}$. U — окрестность $p \cdot x$ $\implies$ $R(x, U) \in p$ (по замечанию) $\implies$ $R(x, U) \smallsetminus \{1_S\} \in p$ $\implies$ $R(x, U) \smallsetminus \{1_S\} \neq \varnothing$.

2 Если $s \cdot t \neq 1_S$ для $s, t \in S \smallsetminus \{1_S\}$, то $S \smallsetminus \{1_S\}$ — подполугруппа в S $\implies$ её замыкание $\beta S \smallsetminus \{1_S\}$ — подполугруппа в βS. Умножение на x справа непрерывно $\implies$ $T = \{p \in \beta S \smallsetminus \{1_S\} : p \cdot x = x\}$ — замкнутая подполугруппа в βS. ① $\implies$ она непуста $\implies$ в ней есть идемпотент.

3 Если $\mathscr{R}$ состоит из бесконечных множеств, то все пересечения вида $R(x, U_1) \cap \ldots \cap R(x, U_n)$ бесконечны $\implies$ семейство $\mathscr{R}' = \{R(x, \overline{U}) \smallsetminus F : F \subset S,\ F \text{ конечно}\}$ центрировано, и $\mathscr{R}' \supset \mathscr{R}$ $\implies$ в ① можно взять $p \supset \mathscr{R}'$, тогда $p \in \beta S \smallsetminus S$. $\square$

Проксимальность

$X^2 = \{(x,y) : x, y \in X\}$, $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ — диагональ.
Топология на X^2 порождена базой
$\{U \times V : U, V$ — открытые подмножества $X\}$.
Если X — динамическая система над моноидом S, то X^2 — динамическая система над S относительно покоординатного действия $s \cdot (x,y) = (s \cdot x, s \cdot y)$.

Определение

Пусть X — динамическая S-система, $x, y \in X$ и $W \subset X^2$.

- Множество
$$JR(x,y,W) = \{s \in S : (s \cdot x, s \cdot y) \in W\}$$
называется совместным множеством времён возврата точек x и y в W.
- Точки x и y проксимальны, если для любой окрестности W диагонали Δ в X^2 $JR(x,y,W) \neq \varnothing$, т.е. орбита точки (x,y) пересекает любую окрестность диагонали.

Теорема (о проксимальных точках)

Точки x и y S-системы X проксимальны тогда и только тогда, когда $p \cdot x = p \cdot y$ для некоторого $p \in \beta S$.

Доказательство.

$p \cdot x \neq p \cdot y$ для всякого $p \in \beta S$

$\Updownarrow$

образ $Y = g(\beta S)$ непрерывного отображения $g : \beta S \to X^2$,
определённого правилом $g(p) = (px, py)$, не пересекает Δ

$\Updownarrow$

некоторая открытая окрестность W диагонали не пересекает Y

$\Updownarrow$

для некоторой открытой окрестности W диагонали имеем
$(s \cdot x, s \cdot y) \notin W$ при всех $s \in S$
(поскольку W открыто в X^2 и $g(S)$ плотно в Y,
так как S плотно в βS и g непрерывно)

□

Если множество возврата $R(x, U)$ синдетическое для любой окрестности U точки x, то эта точка рекуррентна (но не наоборот). Такие точки называются равномерно рекуррентными.

Замечание

Любая точка x динамической S-системы проксимальна с некоторой равномерно рекуррентной точкой y.

Действительно, если e — любой минимальный идемпотент в βS и $y = e \cdot x$, то y равномерно рекуррентна в силу теоремы о синдетических множествах возврата и $e \cdot y = e \cdot e \cdot x = e \cdot x$, так что x и y проксимальны по только что доказанной теореме.

Теорема (Auslander–Ellis)

Пусть X — S-система, $x \in X$ и $M \subset \overline{x}$ — S-подсистема. Тогда $\exists$ равномерно рекуррентная точка $y \in M$, проксимальная с x.

Доказательство. M — подсистема $\Longrightarrow$ $I = \{p \in \beta S : p \cdot x \in M\}$ — левый идеал в βS ($I \neq \varnothing$, так как по замечанию ему принадлежит любой минимальный идемпотент). По теоремам о компактных полугруппах I содержит минимальный левый идеал, в котором есть идемпотент e. По теореме о минимальных идемпотентах e минимален, и $y = e \cdot x \in M$. $\square$

Центральные и динамически центральные множества в полугруппах

Определение

Подмножество A полугруппы S называется **центральным**, если оно содержится (в качестве элемента) в некотором минимальном идемпотенте полугруппы βS.

Замечание

- Любое толстое множество T центрально, так как по теореме о толстых множествах $\overline{T}$ содержит некоторый минимальный идеал L, а значит, T принаждежит всякому $p \in T$. По теоремам о компактных полугруппах L замкнут и потому содержит идемпотент e, который минимален по теореме о минимальных идемпотентах. Имеем $T \in e$.
- Любое центральное множество является FP-множеством, поскольку таковыми являются все элементы любого идемпотента — это вытекает из доказательства теоремы Хиндмана.

Динамически центральные множества были введены и исследованы значительно раньше центральных.

Определение

Подмножество C моноида S называется динамически центральным, если существуют S-система X, проксимальные точки $x, y \in X$, причём y равномерно рекуррентна, и окрестность U точки y, для которых $C = R(x, U)$.

Далеко не очевидно, что надмножество динамически центрального множества динамически центрально или что если объединение двух множеств динамически центрально, то одно из них динамически центрально. Однако это видно из теоремы:

Теорема (о центральных множествах)

$A \subset S$ динамически центрально $\iff$ A центрально.

Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть X, x, y и U удовлетворяют условиям в определении. $I = \{p \in \beta S : p \cdot x = p \cdot y\}$ — левый идеал ($I \neq \varnothing$, так как x и y проксимальны). $\exists$ минимальный левый идеал $L \subset I$, и по теореме о синдетических множествах возврата $\exists$ идемпотент $e \in L$, для которого $e \cdot y = y$. $e \in L \subset I \implies e \cdot x = e \cdot y = y \in U$. Имеем $C = R(x, U) \in e$ по первому замечанию перед теоремой о синдетических множествах возврата.

$\Leftarrow$: Пусть A — центральное множество в моноиде S. Нам нужно предъявить подходящие X, $x, y \in X$ и U.

Рассмотрим тихоновскую степень $X = \{0,1\}^S$ дискретного пространства $\{0,1\}$. Это хаусдорфово компактное пространство (по теореме Тихонова). Его точки — отображения $f : S \to \{0,1\}$, т.е. характеристические функции множеств $A \subset S$, а базу топологии образуют множества вида

$$\{f \in X : f(s_1) = \delta_1, \ldots, f(s_n) = \delta_n\}, \qquad (*)$$

где $\{s_1, \ldots, s_n\}$ — произвольное конечное подмножество моноида S и $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{0,1\}$.

Для $f \in X$ и $s \in S$ определим функцию $s \cdot f \in X$ правилом

$$(s \cdot f)(t) = f(s \cdot t) \quad \text{для } t \in S. \qquad (**)$$

Легко видеть, что $1_S(f) = f$ и $(s \cdot t)(f) = s \cdot (t \cdot f)$ для всех $s, t \in X$ и $s \in S$. Следовательно, правило $(**)$ определяет действие моноида S на X.

Для каждого $s \in S$ так определённое отображение $s\boldsymbol{\cdot} : X \to X$ непрерывно относительно тихоновской топологии, так как прообраз любого множества вида $(*)$ — множество такого же вида, а значит, прообраз любого открытого множества (т.е. объединения множеств вида $(*)$) открыт. Следовательно, X — динамическая система относительно действия $(**)$.

Такая S-система называется системой сдвига. Точки $f \in X = \{0,1\}^S$ — это в точности характеристические функции χ_A множеств $A \subset X$, и $s \cdot \chi_A = \chi_{s^{-1} \cdot A}$.

Пусть $C \subset S$ центрально, и пусть e — минимальный идемпотент в βS, для которого $C \in e$. Положим $x = \chi_C \in X$. Точка $y = e \cdot x \in X$ проксимальна с x (по теореме о проксимальных точках) и равномерно рекуррентна (по теореме о синдетических множествах возврата). Множество $U = \{f \in X : f(1_S) = 1\}$ открыто-замкнуто в тихоновской топологии пространства $X = \{0,1\}^S$, и $R(x, U) = C \in e$. По второму замечанию перед теоремой о синдетических множествах возврата $y = e \cdot x \in U$, т.е. U — окрестность точки y.

$\square$

Дискретные динамические системы

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Определение

Динамические системы над моноидом $(\mathbb{N}_0, +)$ называются дискретными.

Пусть X — компакт и $t\colon X \to X$ — непрерывное отображение. Для $n \in \mathbb{N}_0$ обозначим через t^n n-ю итерацию отображения t: $t^n = \underbrace{t \circ \cdots \circ t}_{n \text{ раз}}$. Полагая $n \cdot x = t^n(x)$, получаем динамическую систему над $\mathbb{N}_0$ с фазовым пространством X.

Все дискретные динамические системы (X, α) получаются таким образом: определим $f\colon X \to X$ правилом $t(x) = 1 \cdot x$. Для любых $n \in \mathbb{N}_0$ и $x \in X$ имеем

$$n \cdot x = (1 + \cdots + 1) \cdot x = (t \circ \cdots \circ t)(x) = t^n(x).$$

По этой причине дискретная динамическая система с фазовым пространством X обычно отождествляется с парой (X, t), где t — непрерывное отображение.

В дискретной динамической системе (X, t) рекуррентность точки $x \in X$ равносильна формально более сильному условию бесконечности множества

$$R(x, U) = \{k \in \mathbb{N}_0 : t^k(x) \in U\}$$

для любой окрестности U точки x.

Действительно, если x — периодическая точка, т.е. $t^k(x) = x$ для некоторого $k \geqslant 1$, то $\{k, 2k, 3k, \dots\} \subset R(x, U)$. Если x не периодическая, то для каждого $k \in \mathbb{N}$ можно выбрать окрестность U^k точки x, не пересекающуюся с $\{t(x), t^2(x), \dots, t^k(x)\}$. Тогда для $n_k \in R(x, U_k)$ имеем $n_k > k$, и $\{n_k : k \geqslant 1\}$ — бесконечное подмножество $R(x, U)$.

Дискретная система сдвига (C, T) выглядит так: фазовое пространство — это тихоновская степень $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ дискретного пространства $\{0,1\}$ (она гомеоморфна канторовому множеству C), его точки — отображения $\mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ (0-1 последовательности), т.е. характеристические функции χ_A множеств $A \subset \mathbb{N}_0$.

Сдвиг $T\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$, $\chi_A \mapsto \chi_{A-1}$, сдвигает каждую последовательность $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ влево на 1 — переводит её в последовательность $(a_2, a_3, \dots)$.

Положим $U = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in C : x_1 = 1\}$. Понятно, что для любого множества $A \subset \mathbb{N}_0$ $R(\chi_A, U) = A$. Отсюда следует, например, что любая равномерно рекуррентная точка является характеристической функцией синдетического множества.

Упражнение

Докажите, что точки $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ проксимальны в системе сдвига (C, T) тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $k \in \mathbb{N}_0$ такое, что $x_{k+i} = y_{k+i}$ для всех $i \leqslant n$, т.е. последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (отображения $\mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$) совпадают на произвольно длинных интервалах неотрицательных целых чисел.

Некоторые свойства множества A можно описать в терминах транзитивной динамической системы $(\overline{\chi}_A, T)$ (над моноидом $\mathbb{N}_0$). В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема

Динамическая подсистема $(\overline{\chi}_A, T)$ дискретной системы сдвига (C, T) содержит минимальную подсистему, не совпадающую с $\{(0, 0, \dots)\}$, тогда и только тогда, когда множество $A \subset \mathbb{N}_0$ кусочно синдетическое.

Напомним, что кусочно синдетические подмножества моноида $\mathbb{N}_0$ — это в точности пересечения синдетических и толстых множеств.

Лемма

$A \subset \mathbb{N}_0$ кусочно синдетическое $\iff$ $\exists$ синдетическое $S \subset \mathbb{N}_0$ такое, что для любого конечного $F \subset S$ найдётся $m = m_F \in \mathbb{N}_0$ с тем свойством, что $F + m_F \subset A$.

Доказательство. $\Leftarrow$: Пусть A удовлетворяет условию в лемме. Положим $\mathscr{F} = \{$все непустые конечные подмножества $\mathbb{N}_0\}$. Множество S синдетическое $\Longrightarrow$

$$S - F_1 = \bigcup_{t \in F_1} (-t + S) = \mathbb{N}_0 \text{ для некоторого } F_1 \in \mathscr{F}. \qquad (*)$$

Положим

$$T = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} (F + m_{(F+F_1)\cap S}) \qquad \text{и} \qquad S' = A \cup \mathbb{N}_0 \setminus T.$$

Ясно: $A \supset S' \cap T$. T толстое по теореме о толстых множествах, ②. Покажем: S' синдетическое, а именно, $\mathbb{N}_0 = S' - (F_1 \cup \{0\}) = S' \cup (S' - F_1)$. Пусть $n \in \mathbb{N}_0$, $n \notin S'$. Тогда $n \in T$, $\Longrightarrow$ $\exists F \in \mathscr{F}$ такое, что $n \in F + m_{(F+F_1)\cap S}$. $(*)$ $\Longrightarrow$ $\exists \ell \in F_1$, для которого $n - m_{(F+F_1)\cap S} + \ell \in S$. Имеем $n - m_{(F+F_1)\cap S} + \ell \in (F + F_1) \cap S$ $\Longrightarrow$ $n + \ell \in ((F + F_1) \cap S) + m_{(F+F_1)\cap S}$ $\Longrightarrow$ $n + \ell \in A \subset S'$.

$\Rightarrow$: Пусть A кусочно синдетическое, т.е. $A = S' \cap T$, где S' синдетическое и T толстое. Надо найти синдетическое $S \subset \mathbb{N}_0$ со свойством: $\forall$ конечного $F \subset S$ $\exists\, m_F \in \mathbb{N}_0$: $F + m_F \subset A$.

S' синдетическое $\implies$ $\exists$ конечное $E \subset \mathbb{N}_0$, для которого $S' - E = \mathbb{N}_0$. Положим $E_1 = E$ и $E_{i+1} = E_i + E$ для $i \in \mathbb{N}$. По теореме о толстых множествах $\forall\, i \in \mathbb{N}$ $\exists\, n_i \in \mathbb{N}_0$, для которого $n_i + \bigcup_{j \leqslant i} E_j \subset T$. Определим по индукции $s_j \in E_j$ и бесконечные $\mathbb{N} \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ так, что $n_i + s_j \in S'$ для любых $j \in \mathbb{N}$ и $i \in I_j$.

$\forall\, n_i$ $\exists\, \ell \in E$: $n_i \in S' - \ell$ $\implies$ существуют $\ell_1 \in E$ и бесконечное $I_1 \subset \mathbb{N}_0$ такие, что $n_i + \ell_1 \in S'$ для всех $i \in I_1$. Положим $s_1 = \ell_1$.

Пусть I_j и s_j построены для $j < k$. Выберем $\ell_k \in E$ и бесконечное $I_k \subset I_{k-1}$ такие, что для всех $i \in I_k$ имеем $n_i + s_{k-1} + \ell_k \in S'$, и положим $s_k = s_{k-1} + \ell_k$.

Положим $S = \{s_1, s_2, \dots\}$. S синдетическое, так как любые два соседних элемента отличаются не более чем на $\max E$.

Если $j \leqslant i$ и $n_i \in I_k$ для $k \geqslant j$, то $n_i + s_j \in T \cap S' = A$.

Пусть $F \subset S$ конечно, т.е. $F \subset \{s_1, \dots, s_k\}$, где $k \in \mathbb{N}$. I_k бесконечно $\implies$ $\exists\, i \in I_k$, $i \geqslant k$. Для $j \leqslant k$ имеем $n_i + s_j \in A$. Значит, $n_i + F \subset A$. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть $A \subset \mathbb{N}_0$ кусочно синдетическое. Лемма $\implies$ $\exists$ синдетическое $S \subset \mathbb{N}_0$ такое, что для любого конечного $F \subset S$ $\exists m \in \mathbb{N}_0$ со свойством $F + m \subset A$. Для $n \in \mathbb{N}_0$ пусть $m_n \in \mathbb{N}_0$ таково, что $(S \cap \{0, 1, \ldots n\}) + m_n \subset A$. Тогда $T^{m_n}\chi_A(k) \geqslant \chi_S(k)$ для каждого $k \leqslant n$. Следовательно, если $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ — любая предельная точка множества $\{T^{m_n}\chi_A : n \in \mathbb{N}_0\} \subset \operatorname{orb}\chi_A$, то $x(k) \geqslant \chi_S(k)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}_0$. Значит, x — характеристическая функция множества, содержащего S (любое такое множество синдетическое). С другой стороны, $x \in \overline{\chi_A}$, так что $\overline{x} \subset \overline{\chi_A}$, потому что $\overline{\chi_A}$ инвариантно и замкнуто.

Пусть Y — любая минимальная система, содержащаяся в $\overline{x}$; тогда $Y \subset \overline{\chi_A}$. Покажем, что $(0, 0, \ldots) \notin \overline{x}$. Положим $R = \{n \in \mathbb{N}_0 : x(n) = 1\}$. Это синдетическое множество. Возьмём $F \subset \mathbb{N}_0$, для которого $\mathbb{N}_0 = R - F$. Пусть $U = \{y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0} : y|_F \equiv 0\}$. Это окрестность точки $(0, 0, \ldots)$. Предположим, что $T^n x \in U$ для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $x(n + m) = 0$ для каждого $m \in F$ в противоречие с тем, что $n = r - m$ для некоторых $r \in R$ и $m \in F$.

Обратно, пусть (X, T) — минимальная подсистема в $(\overline{\chi_A}, T)$ (а значит, и в $(\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}, T)$), не совпадающая с $\{(0,0,\dots)\}$. Положим $U = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} : x(0) = 1\}$. Это открытое множество. Возьмём $x \in X$, $x \neq \setminus\{(0,0,\dots)\}$. Многократные применения отображения T к точке x сдвигают координату, в которой x принимает значение 1, в 0. Значит, $U \cap \operatorname{orb} x \neq \varnothing$, причём $\operatorname{orb} x \subset X$, так как X — подсистема.

Пусть $y \in U \cap X$. Тогда $\overline{y} = X$ (так как подсистема X минимальна) и множество $S = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n y \in U\} = R(x, U)$ синдетическое по теореме о синдетических множествах возврата. Лемма $\implies$ чтобы доказать, что A кусочно синдетическое, достаточно показать, что для любого конечного множества $F \subset S$ существует $m \in \mathbb{N}_0$, для которого $F + m \subset A$.

Положим $V = \{x \in X : x(n) = 1 \text{ для } n \in F\}$. Это открытая окрестность точки y, так как $F \subset R(y, U)$. Поскольку $y \in X \subset \overline{\chi_A}$, имеем $V \cap \operatorname{orb} \chi_A \neq \varnothing$. Значит, $\exists m \in \mathbb{N}$, для которого $T^m \chi_A \in V$, т.е. $F + m \subset A$. □

Топологическое пространство $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

$\beta\mathbb{N}$ — множество всех ультрафильтров на $\mathbb{N}$. Множество $\mathbb{N}$ отождествляется с его подмножеством, состоящим из главных ультрафильтров:

$$\mathbb{N} \ni n \equiv p_n = \{A \subset \mathbb{N} : n \in A\}.$$

$\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ — множество всех неглавных ультрафильтров на $\mathbb{N}$. Базы топологий пространств $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$ состоят из множеств

$$\overline{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\} \quad \text{и} \quad \overline{A}^* = \{p \in \mathbb{N}^* : A \in p\}, \qquad A \subset \mathbb{N}.$$

Свойства пространств $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$

1. Множество всех главных ультрафильтров (которое отождествляется с $\mathbb{N}$)
   - дискретно;
   - открыто;
   - всюду плотно в $\beta\mathbb{N}$.
2. Для любого $A \subset \mathbb{N}$ множество $\overline{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\}$ открыто-замкнуто в $\beta\mathbb{N}$ и $\overline{A}^* = \{p \in \mathbb{N}^* : A \in p\} = \overline{A} \setminus \mathbb{N}$ открыто-замкнуто в $\mathbb{N}^*$.
3. Для всякого $A \subset \mathbb{N}$ множество $\overline{A}$ является замыканием множества $A \equiv \{p_n : n \in A\}$ в $\beta\mathbb{N}$, причём $\overline{A} \cap \mathbb{N} = A$.
4. Пространства $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$ хаусдорфовы.
5. Пространства $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$ компактны.
6. Любое отображение $f : \mathbb{N} \to K$ множества $\mathbb{N}$ в любой хаусдорфов компакт K продолжается до непрерывного отображения $\hat{f} : \beta\mathbb{N} \to K$.

Свойство 6 — критерий: если X счётно, $\hat{X}$ — хаусдорфов компакт, $X \subset \hat{X}$, $\overline{X} = \hat{X}$ и любое отображение множества X в любой хаусдорфов компакт K продолжается до непрерывного отображения $\hat{X} \to K$, то $\exists$ гомеоморфизм $\hat{f} \colon \hat{X} \to \beta\mathbb{N}$, т.е. биекция такая, что оба отображения $\hat{f}$ и $\hat{f}^{-1}$ непрерывны. Более того, для любой нумерации $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ точек X существует гомеоморфизм $\hat{f} \colon \hat{X} \to \beta\mathbb{N}$ такой, что $\hat{f}(x_n) = n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, отображение $f \colon x_n \mapsto n$ продолжается до непрерывного отображения $\hat{f} \colon \hat{X} \to \beta\mathbb{N}$. Это биекция: пусть $x, y \in \hat{X}$, $x \neq y$. У точек x и y есть окрестности U и V с непересекающимися замыканиями. $\overline{X} = \hat{X} \implies x \in \overline{U \cap X}$ и $y \in \overline{V \cap X}$. $\hat{f}$ непрерывно $\implies \hat{f}(x) \in \hat{f}(\overline{U \cap X}) = \overline{f(U \cap X)}$ и $\hat{f}(y) \in \hat{f}(\overline{V \cap X}) = \overline{f(V \cap X)}$. Имеем $\overline{f(U \cap X)} \cap \overline{f(V \cap X)} = \varnothing$, так как $f(U \cap X) \cap f(V \cap X) = \varnothing$. Значит, $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(y)$.

Любое замкнутое множество $F \subset \hat{X}$ компактно $\implies \hat{f}(F)$ компактно $\implies$ замкнуто в $\beta\mathbb{N}$. Значит, прообраз любого замкнутого множества F при отображении $\hat{f}^{-1}$ замкнуто $\implies$ $\hat{f}^{-1}$ непрерывно.

Из свойства 6 вытекает, что если K — хаусдорфов компакт и $D \subset K$ счётно и плотно в K, т.е. $\overline{D} = K$ (например, $K = [0,1]$ и $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$), то $|\beta\mathbb{N}| \geqslant |K|$.

Действительно, возьмём любую биекцию $\varphi\colon \mathbb{N} \to D$. 6 $\Longrightarrow$ она продолжается до непрерывного отображения $\hat{\varphi}\colon \beta\mathbb{N} \to K$. Множество $\hat{\varphi}(\beta\mathbb{N})$ компактно $\Longrightarrow$ замкнуто в K, и оно содержит $\hat{\varphi}(\mathbb{N}) = \varphi(\mathbb{N}) = D \Longrightarrow$ оно содержит и $\overline{D} = K \Longrightarrow \hat{\varphi}$ — сюръекция, откуда $|\beta\mathbb{N}| \geqslant |K|$.

Само пространство $\beta\mathbb{N}$ тоже является хаусдорфовым компактом, содержащим счётное плотное множество $\mathbb{N} \Longrightarrow$

$$|\beta\mathbb{N}| = \max\{|K| : \ K \text{ — хаусдорфов компакт,} \\ \text{содержащий счётное плотное множество}\}.$$

Лемма

Компакт $K = \{0,1\}^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ (с тихоновской топологией) содержит счётное плотное множество.

Доказательство.

Положим $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (это множество всех функций $\varphi\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$). Тогда K — это множество функций $f\colon C \to \{0,1\}$. Семейство $\mathscr{B}$ всех множеств вида

$$W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = \{f \in K : f(\varphi_i) = \varepsilon_i \text{ для всех } i \leqslant n\},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_i \in 2^{\mathbb{N}}$ и $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ для $i \leqslant n$, образует базу топологии пространства K.

Рассмотрим семейство $\mathscr{U}$ подмножеств C вида

$$U_N(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N) = \{\varphi\colon \mathbb{N} \to \{0,1\} : \varphi(i) = \varepsilon_i \text{ для всех } i \leqslant N\},$$

где $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_i \in \{0,1\}$; оно счётно. Пусть D — множество всех функций $f\colon C \to \{0,1\}$, для каждой из которых существуют попарно непересекающиеся $V_1,\ldots,V_m \in \mathscr{U}$ с тем свойством, что f постоянна на каждом множестве V_i, $i \leqslant m$, и на дополнении $C \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_m)$. $\mathscr{U}$ счётно $\implies$ D счётно.

Покажем, что D плотно в K, т.е. любое непустое открытое подмножество пространства K пересекает D. Любое такое подмножество содержит непустой элемент базы $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, причём можно считать, что все φ_i различны. Выбирая для каждой пары функций φ_i,φ_j по точке, в которой они принимают разные значения, найдём конечное множество $F=\{n_1,\ldots,n_k\}\subset\mathbb{N}$ такое, что все сужения $\varphi_i|_F$ попарно различны. Пусть $N=\max\{n_1,\ldots,n_k\}$, и пусть $\varepsilon_k^j=\varphi_j(k)$ для $k\leqslant N$ и $j\leqslant n$. Тогда множества $U_N(\varepsilon_1^j,\ldots,\varepsilon_N^j)$ с разными $j\leqslant n$ не пересекаются, причём $\varphi_j\in U_N(\varepsilon_1^j,\ldots,\varepsilon_N^j)$ для каждого $j\leqslant n$. Функция $f\colon C\to\{0,1\}$, определённая правилом

$$f(\varphi)=\begin{cases}\varepsilon_j, & \text{если } \varphi\in U_N(\varepsilon_1^j,\ldots,\varepsilon_N^j) \text{ для некоторого } j\leqslant n,\\ 0, & \text{если } \varphi\notin\bigcup\limits_{j\leqslant n}U_N(\varepsilon_1^j,\ldots,\varepsilon_N^j),\end{cases}$$

принадлежит одновременно и множеству $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, и множеству D. Из произвольности выбора непустого $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ следует, что D плотно в K. $\square$

$\aleph_0$ — стандартное обозначение мощности $|\mathbb{N}|$
$2^{|X|}$ — стандартное обозначение мощности множества $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств X = множества $\{0,1\}^X$ функций $X \to \{0,1\}$

Лемма

$|\beta\mathbb{N}| \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

Каждый ультрафильтр на $\mathbb{N}$ — семейство подмножеств множества $\mathbb{N}$, т.е. подмножество множества $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ всех подмножеств $\mathbb{N}$, т.е. элемент множества $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ всех подмножеств множества $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ всех подмножеств $\mathbb{N}$. Мощность множества $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ равна $2^{2^{\aleph_0}}$, так что мощность его помножества $\beta\mathbb{N}$ не превосходит $2^{2^{\aleph_0}}$. □

Из доказанных лемм вытекает теорема:

Теорема

$|\beta\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^*| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Теорема

Каждое бесконечное замкнутое множество $F \subset \beta\mathbb{N}$ содержит подмножество, гомеоморфное $\beta\mathbb{N}$.

Доказательство. Компакт $\beta\mathbb{N}$ хаусдорфов $\implies$ $\exists$ точка $x_1 \in F$, у которой есть открытая в $\beta\mathbb{N}$ окрестность U_1 с бесконечным дополнением $F \setminus U_1$ в F. $\beta\mathbb{N}$ регулярен $\implies$ $\exists$ открытая окрестность V_1 точки x_1 в $\beta\mathbb{N}$, для которой $\overline{V}_1 \subset U_1$. $\exists$ точка $x_2 \in F$, у которой есть окрестность U_2 с бесконечным дополнением $F \setminus U_2$ в F и открытая окрестность V_2, для которой $\overline{V}_1 \subset U_2 \setminus \overline{V}_1$.

...

Найдём последовательности точек $x_1, x_2, \ldots \in F$ и открытых множеств $V_1, V_2, \ldots$ в $\beta\mathbb{N}$ такие, что $x_i \in V_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $\overline{V}_i \cap \overline{V}_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Положим $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Покажем, что $\overline{X}$ гомеоморфно $\beta\mathbb{N}$, т.е. любое отображение множества X в хаусдорфов компакт K продолжается до непрерывного отображения $\overline{X} \to K$.

Возьмём $g : X \to K$ и любую точку $x_0 \in K$. Отображение $g_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to K$, определённое правилом

$$g_{\mathbb{N}}(n) = \begin{cases} g(x_i), & \text{если } n \in \mathbb{N} \cap V_i, \\ x_0, & \text{если } n \in \mathbb{N} \cap \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} V_j, \end{cases}$$

имеет непрерывное продолжение $\hat{g}_{\mathbb{N}} : \beta\mathbb{N} \to K$. $\overline{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$ и множества V_i открыты $\implies$ $\forall i \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{V}_i = \overline{V_i \cap \mathbb{N}}$ (проверьте!). Постоянное отображение на $\overline{V}_i$, равное $g(x_i)$, совпадает с $\hat{g}_{\mathbb{N}}|_{\overline{V}_i}$ $\implies$ $\hat{g}_{\mathbb{N}} \equiv g(x_i)$ на $\overline{V}_i$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Значит, $\hat{g}_{\mathbb{N}}|_X = g$, и сужение $\hat{g} = \hat{g}_{\mathbb{N}}|_{\overline{X}}$ является непрерывным продолжением отображения g на $\overline{X}$. $\square$

Следствие

Каждое бесконечное замкнутое множество $F \subset \mathbb{N}^*$ содержит подмножество, гомеоморфное $\beta\mathbb{N}$.

Следствие

Компакты $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$ не содержат сходящихся последовательностей.

Определение

Пространство X однородно, если $\forall x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \to X$ такой, что $f(x) = y$.

Теорема

Пространство $\mathbb{N}^*$ неоднородно.

Континуум-гипотеза CH — утверждение, что мощность всякого несчётного множества не меньше $2^{\aleph_0}$. Континуум-гипотеза недоказуема и неопровержима, т.е. ни она сама, ни её отрицание не противоречат аксиомам теории множеств.

Определение

Точка x топологического пространства X называется P-точкой, если каковы бы ни были окрестности $U_1, U_2, \ldots$ этой точки, их пересечение $\bigcap U_n$ тоже является её окрестностью (т.е. содержит открытую окрестность).

Теорема (Уолтер Рудин, 1956)

В предположении CH пространство $\mathbb{N}^*$ содержит P-точку.

Замечания

1. Если все точки в пространстве X являются P-точками, то пересечение счётного числа открытых множеств в X открыто и, следовательно, объединение счётного числа замкнутых множеств замкнуто.

   Действительно, если $U_1, U_2, \ldots$ открыты и $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, то все U_n — окрестности точки x и, значит, x содержится в $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ вместе со своей открытой окрестностью.

2. В любом бесконечном хаусдорфовом компакте K имеются точки, не являющиеся P-точками.

   Действительно, пусть $x_1, x_2, \ldots \in K$ — попарно различные точки. Если все точки в K являются P-точками, то $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ — замкнутые множества, и $\mathscr{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ — центрированное семейство замкнутых множеств с пустым пересечением. Дополнения до F_n образуют открытое покрытие, у которого нет конечного подпокрытия.

Проблема (Уолтер Рудин, 1956)

Верно ли, что всякий однородный компакт содержит сходящуюся последовательность?

Типы неглавных ультрафильтров на $\mathbb{N}$

Теорема

Неглавный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\mathbb{N}$ является P-точкой в $\mathbb{N}^*$ $\iff$ для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где $A_n \notin \mathscr{U}$ $\forall n$, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| < \aleph_0$ $\forall n$.

Доказательство. $\mathscr{U}$ удовлетворяет указанному условию $\iff$ для любых $U_n \in \mathscr{U}$, $n \in \mathbb{N}$, существует $U \in \mathscr{U}$ такой, что $U \setminus U_n$ конечно $\forall n \in \mathbb{N}$ (достаточно рассмотреть разбиение $\mathbb{N}$ на множества $A_1 = \mathbb{N} \setminus U_1$ и $A_n = \mathbb{N} \setminus (U_n \cup \bigcup_{i<n} A_i)$, $n \in \mathbb{N}$).

$\Rightarrow$: Если $\mathscr{U}$ — P-точка в $\mathbb{N}^*$ и $U_n \in \mathscr{U}$, то $U = \bigcap(\overline{U}_n \setminus \mathbb{N})$ — окрестность $\mathscr{U}$ в $\mathbb{N}^*$. Пусть $V \in \mathscr{U}$, $\overline{V} \setminus \mathbb{N} \subset U$. Если $V \setminus U_n$ бесконечно, то $\exists\ \mathscr{V} \in \mathbb{N}^*$ такой, что $V \setminus U_n \in \mathscr{V}$. Имеем $\mathscr{V} \in \overline{V} \setminus \mathbb{N}$ и $\mathscr{V} \notin \bigcap \overline{U}_n \implies \mathscr{V} \in \overline{V} \setminus \left(\bigcap \overline{U}_n\right)$ — противоречие.

$\Leftarrow$: Пусть V_n, $n \in \mathbb{N}$, — окрестности $\mathscr{U}$ в $\mathbb{N}^*$, и пусть для $n \in \mathbb{N}$ $U_n \in \mathscr{U}$ и $\overline{U}_n \setminus \mathbb{N} \subset V_n$. Возьмём $U \in \mathscr{U}$, для которого все $U \setminus U_n$ конечны. Пусть $\mathscr{V} \in \overline{U} \setminus \mathbb{N}$. Тогда $U \in \mathscr{V} \in \mathbb{N}^*$. Если $U_n \notin \mathscr{V}$ для некоторого n, то $U \setminus U_n \in \mathscr{V}$ — противоречие (так как $\mathscr{V}$ неглавный). Значит, $U_n \in \mathscr{V}$ для всех n, т.е. $\mathscr{V} \in \bigcap(\overline{U}_n \setminus \mathbb{N})$. $\mathscr{V}$ любой $\implies \overline{U} \setminus \mathbb{N} \subset \bigcap(\overline{U}_n \setminus \mathbb{N}) \subset \bigcap V_n$. $\square$

Определение

Ультрафильтр $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ называется

- *P-ультрафильтром*, если для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, где $A_n \notin \mathscr{U}$ для каждого n, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| < \aleph_0$ для каждого n;
- *Q-ультрафильтром*, если для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, где все A_n конечны, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \leqslant 1$ для каждого n;
- *селективным* (*рамсеевским*), если он $P + Q$: для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, где $A_n \notin \mathscr{U}$ для каждого n, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ (*селектор*) такой, что $|U \cap A_n| \leqslant 1$ для каждого n;
- *быстрым*, если для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, где все A_n конечны, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \leqslant n$ для каждого n.

Все разбиения множества $\mathbb{N}$ на бесконечное число подмножеств находятся во взаимно однозначном (с точностью до нумерации элементов разбиения) соответствии с отображениями $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: разбиению $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ соответствует отображение f, определённое условием $A_n = f^{-1}(\{n\})$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. В терминах отображений определения P-, Q- и селективных ультрафильтров выглядят так:

Ультрафильтр $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ является

- P-ультрафильтром $\iff$ для любого отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует либо элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U = \mathrm{const}$, либо элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U$ конечнократно (= прообразы всех точек конечны);
- Q-ультрафильтром $\iff$ для любого конечнократного отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U$ взаимно однозначно;
- селективным $\iff$ для любого отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует либо элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U = \mathrm{const}$, либо элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U$ взаимно однозначно.

Порядок Рудин–Кейслера

Порядок Рудин–Кейслера — это отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ на множестве всех ультрафильтров на $\mathbb{N}$, которое определяется так: если $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$, то

$\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$ означает, что $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такое, что $\mathscr{V} = \beta f(\mathscr{U})$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ рефлексивно и транзитивно.

Определение

Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтры на $\mathbb{N}$. Если существуют $U \in \mathscr{U}$ и $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $f|_U$ взамно однозначно и $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, то мы говорим, что ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ эквивалентны, и пишем $\mathscr{U} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$.

Определение′

Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтры на $\mathbb{N}$. Ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ эквивалентны, если существует биекция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, т.е. $\mathscr{V} = \{f(U) : U \in \mathscr{U}\}$ (или, что равносильно, $f^{-1}\mathscr{V} = \mathscr{U}$, т.е. $\mathscr{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$).

Замечание 1

Если $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображения, $\mathscr{U} \in \beta\mathbb{N}$, $U \in \mathscr{U}$ и $f|_U \equiv g|_U$, то $\beta f(\mathscr{U}) = \beta g(\mathscr{U})$, так как $\beta f(\mathscr{U}) = \{A \subset \mathbb{N} : \exists B \in \mathscr{U}$ такое, что $f(B) \subset A\} = \{A \subset \mathbb{N} : \exists B \in \mathscr{U}$ такое, что $f(B \cap U) \subset A\} = \beta g(\mathscr{U})$.

Предложение

Приведённые выше определения эквивалентности равносильны.

Доказательство. Достаточно проверить: если $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \beta\mathbb{N}$ и $\exists\, U \in \mathscr{U}$ и $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $f|_U$ взамно однозначно и $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, то $\exists$ биекция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $\beta g(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$.

Если $\mathscr{U}$ главный, т.е. $\bigcap \mathscr{U} = \{n\}$, то $\bigcap \beta f(\mathscr{U}) = \bigcap \mathscr{V} = \{f(n)\}$, и годится любая биекция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со свойством $g(n) = f(n)$.

Пусть $\mathscr{U}$ неглавный. Тогда $U \in \mathscr{U}$ бесконечно. Как-нибудь разобъём его: $U = U_1 \sqcup U_2$, где U_1 и U_2 бесконечны. Основное свойство ультрафильтров $\implies$ одно из них (пусть U_1) принадлежит $\mathscr{U}$. Положим $V_1 = f(U_1) \in \mathscr{V}$. $\mathbb{N} \setminus U_1$ и $\mathbb{N} \setminus V_1$ бесконечны, так как $f|_U$ инъективно. Пусть $\varphi\colon \mathbb{N} \setminus U_1 \to \mathbb{N} \setminus V_1$ — любая биекция. Положим $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in U_1, \\ \varphi(x), & \text{если } x \in \mathbb{N} \setminus U_1. \end{cases}$

Замечание 1 $\implies$ g — искомая биекция. $\square$

ВЫВОД:

Отношение $\equiv_{\mathrm{RK}}$ является отношением эквивалентности.

Наша ближайшая цель — показать, что отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ — порядок на классах эквивалентных ультрафильтров (они называются типами ультрафильтров.

Рефлексивность и транзитивность этого отношения очевидны. Осталось проверить его антисимметричность, т.е. что ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$.

Для этого понадобятся леммы.

Лемма

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таково, что $f(n) \neq n$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся множества $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{N}$ такие, что

1. $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ *для* $i, j \leqslant 3$, $i \neq j$, *и*
3. $A_i \cap f(A_i) = \varnothing$ *для* $i \leqslant 3$.

Доказательство. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathbb{N}$:

$$s \sim t \iff f^n(s) = f^m(t) \quad \text{для некоторых } n, m \geqslant 0.$$

(Здесь, как обычно, $f^i(j) = \underbrace{f(f(\ldots(f(j))\ldots))}_{i \text{ раз}}$.)

Пусть $\mathscr{R}$ — множество $\sim$-классов. Ясно, что если $R \in \mathscr{R}$, то $f(R) \subset R$. Для $R \in \mathscr{R}$ есть две возможности.

Случай 1: Найдутся $s_R \in R$ и $n \in \mathbb{N}$, для которых $f^n(s_R) = s_R$. Заметим, что $n \neq 1$. Зафиксируем s_R и положим

$$n_R = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(s_R) = s_R\} \quad \text{и} \quad C_R = \{f^k(s_R) : 0 \leqslant k < n_R\}.$$

Имеем $\{f^n(s_R) : n \geqslant 0\} = C_R$. Значит, для всякого $s \in R \setminus C_R$ существуют $k < n_R$ и $m \in \mathbb{N}$ такие, что $f^m(s) = f^k(s_R)$. Для $s \in R \setminus C_R$ положим

$$k(s) = \min\{k < n_R : \exists m \in \mathbb{N} \text{ такое, что } f^m(s) = f^k(s_R)\},$$
$$m(s) = \min\{m \in \mathbb{N} : f^m(s) = f^{k(s)}(s_R)\}.$$

Покажем, что если $s \in R \setminus C_R$ и $m(s) > 1$, то

$$k(f(s)) = k(s) \text{ и } m(f(s)) = m(s) - 1. \qquad (\star)$$

Ясно, что $k(s) \leqslant k(f(s))$, так как если $f^p(f(s)) = f^q(s_R)$, то $f^{p+1}(s) = f^q(s_R)$, так что $k(s) \leqslant q$. Из равенства $f^{k(s)}(s_R) = f^{m(s)-1}(f(s))$ следует, что $k(f(s)) = k(s)$ и $m(f(s)) \leqslant m(s) - 1$, и из равенств $f^{k(f(s))}(s_R) = f^{k(s)}(s_R) = f^{m(f(s))}(f(s)) = f^{m(f(s))+1}(s)$ следует, что $m(s) \leqslant m(f(s)) + 1$.

Положим

$$A_{R,1} = \{f^k(s_R) : k \text{ чётно и } 0 \leqslant k < n_R - 1\} \cup$$
$$\cup \{s \in R \setminus C_R : k(s) + m(s) \text{ чётно}\},$$
$$A_{R,2} = \{f^k(s_R) : k \text{ нечётно и } 0 < k < n_R - 1\} \cup$$
$$\cup \{s \in R \setminus C_R : k(s) + m(s) \text{ нечётно}\},$$
$$A_{R,3} = \{f^{n_R - 1}(s)\}.$$

Имеем $R = A_{R,1} \cup A_{R,2} \cup A_{R,3}$ и $A_{R,i} \cap A_{R,j} = \varnothing$ для $i, j \leqslant 3$, $i \neq j$.

Если $s \in A_{R,i}$ и $s \in C_R$, то $f(s) \in C_R$ и $f(s) \notin A_{R,i}$ для $i \leqslant 3$.

Если $s \in A_{R,1} \setminus C_R$ и $m(s) = 1$, то $f(s) = f^{k(s)}(s_R)$ для нечётного $k(s) < n_R$, так что либо $f(s) \in A_{R,2}$, либо $f(s) \in A_{R,3}$.

Если $s \in A_{R,2} \setminus C_R$ и $m(s) = 1$, то $f(s) = f^{k(s)}(s_R)$ для чётного $k(s) < n_R$, так что либо $f(s) \in A_{R,1}$, либо $f(s) \in A_{R,3}$.

Если $s \in A_{R,i} \setminus C_R$, где $i \in \{1, 2\}$, и $m(s) > 1$, то $f(s) \notin A_{R,i}$ в силу $(\star)$.

Случай 2: Случай 1 не имеет места. Зафиксируем любое $s_R \in R$. Для всякого $s \in R$ существуют $k, m \geqslant 0$ такие, что $f^m(s) = f^k(s_R)$. Для $s \in R$ положим

$$k(s) = \min\{k \geqslant 0 : \exists m \geqslant 0 \text{ такое, что } f^m(s) = f^k(s_R)\},$$

$$m(s) = \min\{m \geqslant 0 : f^m(s) = f^{k(s)}(s_R)\}.$$

Если $m(s) = 0$, то $m(f(s)) = 0$ и $k(f(s)) = k(s) + 1$.
Если $m(s) > 0$, то $m(f(s)) = m(s) - 1$ и $k(f(s)) = k(s)$.
Вывод: $k(s) + m(s)$ чётно $\iff$ $k(f(s)) + m(f(s))$ нечётно.
Положим

$$A_{R,1} = \{s \in R : k(s) + m(s) \text{ чётно}\},$$

$$A_{R,2} = \{s \in R : k(s) + m(s) \text{ нечётно}\},$$

$$A_{R,3} = \varnothing.$$

Имеем $R = A_{R,1} \cup A_{R,2} \cup A_{R,3}$, $A_{R,i} \cap A_{R,j} = \varnothing$ для $i, j \leqslant 3$, $i \neq j$, и $A_{R,i} \cap f(A_{R,i}) = \varnothing$ для $i \leqslant 3$.

Для завершения доказательства леммы осталось положить $A_i = \bigcup\{A_{R,i} : R \in \mathscr{R}\}$ для $i \leqslant 3$. $\square$

Лемма

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение и $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$. Тогда $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{U} \iff \{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\} \in \mathscr{U}$.

Доказательство. Положим $A = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\}$. Отображения $\beta f (= \hat{f} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ — непрерывное продолжение f на $\beta\mathbb{N})$ и $\mathrm{id}_{\beta\mathbb{N}}$ непрерывны и совпадают на $A \implies$ они совпадают на $\overline{A}$. Если $A \in \mathscr{U}$, то $\mathscr{U} \in \overline{A}$ и $\beta f(\mathscr{U}) = \mathrm{id}_{\beta\mathbb{N}}(\mathscr{U}) = \mathscr{U}$. Пусть $A \notin \mathscr{U}$. Тогда $\mathbb{N} \setminus A \in \mathscr{U}$ и $f(n) \neq n$ для $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

Пусть $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — любое отображение, которое совпадает с f на $\mathbb{N} \setminus A$ и удовлетворяет условию $f'(n) \neq n$ $\forall n \in A$ (например, можно положить $f'|_A \equiv \{a\}$ для какой-нибудь точки $a \in \mathbb{N} \setminus A$). В силу замечания 1 $\beta f(\mathscr{U}) = \beta f'(\mathscr{U})$. Предыдущая лемма $\implies \exists A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{N}$ такие, что $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i, j \leqslant 3$, $i \neq j$, и $A_i \cap f'(A_i) = \varnothing$ для $i \leqslant 3$. $\mathscr{U}$ — ультрафильтр $\implies A_i \in \mathscr{U}$ для $i = 1$, 2 или 3. Имеем $\mathscr{U} \in \overline{A_i}$. Продолжение $\hat{f}' = \beta f'$ на $\beta\mathbb{N}$ отображения $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$ непрерывно $\implies$ $\beta f'(\mathscr{U}) = \hat{f}'(\mathscr{U}) \in \hat{f}'(\overline{A_i}) \subset \overline{\hat{f}'(A_i)} = \overline{f'(A_i)} \subset \overline{\bigcup\{A_j : j \leqslant 3, j \neq i\}}$ $\implies \beta f'(\mathscr{U}) \neq \mathscr{U} \implies \beta f(\mathscr{U}) \neq \mathscr{U}$. Противоречие. $\square$

Замечание 2

Для любых отображений $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ имеем $\beta(g \circ f)(\mathscr{U}) = \beta g(\beta f(\mathscr{U}))$.

Действительно,

$$\beta(g \circ f)(\mathscr{U}) = \{A : (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathscr{U}\},$$
$$\beta f(\mathscr{U}) = \{A : f^{-1}(A) \in \mathscr{U}\},$$
$$\beta g(\beta f(\mathscr{U})) = \{A : g^{-1}(A) \in \beta f(\mathscr{U})\} = \{A : f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathscr{U}\}.$$

Осталось заметить, что $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

Теорема

Ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ эквивалентны $\iff$ $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$.

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{U} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{V} \implies \mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$ (см. определение′).

Если $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$, то $\exists f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$ и $\beta g(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$. Значит, $\beta(g \circ f)(\mathscr{U}) = \beta g(\beta f(\mathscr{U})) = \beta g(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$, и по лемме $A = \{n \in \mathbb{N} : (g \circ f)(n) = n\} \in \mathscr{U}$. Сужение $(g \circ f)|_A$ инъективно $\implies$ $f|_A$ инъективно $\implies$ $\mathscr{U} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ (по определению). □

На самом деле порядок Рудин–Кейслера определён для любых ультрафильтров на любых множествах: ультрафильтры $\mathscr{U}$ на множестве X и $\mathscr{V}$ на множестве Y находятся в отношении $\mathscr{V} \leqslant_{\mathsf{RK}} \mathscr{U}$, если существует отображение $f : X \to Y$ такое, что $\mathscr{V} = \beta f(\mathscr{U})$. Отношение эквивалентности $\equiv_{\mathsf{RK}}$ определяется в общем случае так же, как в случае ультрафильтров на $\beta\mathbb{N}$, и по-прежнему $\mathscr{U} \equiv_{\mathsf{RK}} \mathscr{V}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{U} \leqslant_{\mathsf{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathsf{RK}} \mathscr{U}$.

Предложение

Каждый неглавный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\mathbb{N}$ имеет ровно $2^{\aleph_0}$ $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-предшественников.

Доказательство. Число всех отображений $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ равно $2^{\aleph_0}$ (каждое f — подмножество счётного множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) $\implies$ мощность множества всех $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-предшественников ультрафильтра $\mathscr{U}$ не превосходит $\leqslant 2^{\aleph_0}$. Покажем, что она $\geqslant 2^{\aleph_0}$.

Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ выберем бесконечное $A_\alpha \subset \mathbb{N}$ так, что если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ разные, то $A_\alpha \cap A_\beta$ конечно. Его можно построить так. Перенумеруем все рациональные числа: $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ выберем последовательность попарно различных рациональных чисел, сходящуюся к α. A_α — множество номеров рациональных чисел, попавших в эту последовательность.

Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ зафиксируем биекцию $f_\alpha\colon \mathbb{N} \to A_\alpha$ и положим $\mathscr{U}_\alpha = \beta f_\alpha(\mathscr{U})$. Имеем $\mathscr{U}_\alpha \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$ для $\alpha \in \mathbb{R}$. Все $\mathscr{U}_\alpha$ неглавные (так как ультрафильтр неглавный $\Leftrightarrow$ все его элементы бесконечны, $\mathscr{U}$ неглавный и все f_α — биекции) и попарно различны (так как $A_\alpha \in \mathscr{U}_\alpha$ и если $\alpha \neq \beta$, то $A_\alpha \cap A_\beta$ конечно и не может принадлежать неглавному ультрафильтру). $\square$

Теорема (M. E. Rudin + S. Shelah)

Существует $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно несравнимых ультрафильтров на $\mathbb{N}$.

Замечание

Класс $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-эквивалентности (тип) любого главного ультрафильтра счётен и состоит из всех главных ультрафильтров, а класс $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-эквивалентности любого неглавного ультрафильтра имеет мощность $2^{\aleph_0}$ (это доказывается точно так же, как предложение — построенные в его ультрафильтры $\mathscr{U}_\alpha$ эквивалентны ультрафильтру $\mathscr{U}$). Следовательно, существует $2^{2^{\aleph_0}}$ разных типов ультрафильтров. Более того, существует $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно несравнимых типов ультрафильтров.

Теорема

1. *Если $\mathscr{U}$ — P-ультрафильтр и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$, то $\mathscr{V}$ тоже является P-ультрафильтром.*
2. *Если $\mathscr{U}$ — селективный ультрафильтр и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$, то $\mathscr{V}$ тоже является селективным; более того, $\mathscr{V} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. Таким образом, селективные ультрафильтры (точнее, их типы) $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-минимальны.*

Доказательство. 1. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение, для которого $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, и пусть $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$, где $A_n \notin \mathscr{V}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f^{-1}(A_n) \notin \mathscr{U}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ по определению отображения βf. $\mathscr{U}$ — P-ультрафильтр $\implies$ $\exists U \in \mathscr{U}$ такой, что все пересечения $U \cap f^{-1}(A_n)$ конечны. Ясно, что все пересечения $f(U) \cap A_n$ тоже конечны, и при этом $f(U) \in \mathscr{V}$.

2. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение, для которого $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, и пусть $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$, где $A_n \notin \mathscr{V}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f^{-1}(A_n) \notin \mathscr{U}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\mathscr{U}$ селективен $\implies$ $\exists U \in \mathscr{U}$ такой, что все пересечения $U \cap f^{-1}(A_n)$ не более чем одноточечны. Ясно, что $f|_U$ взаимно однозначно. Это означает, что $\mathscr{V} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. □

Порядок Рудин–Бласса

Порядок Рудин–Бласса — это отношение $\leqslant_{\mathrm{RB}}$ на множестве всех ультрафильтров на $\mathbb{N}$, которое определяется так: если $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$, то

$\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U}$ означает, что существует конечнократное $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такое, что $\mathscr{V} = \beta f(\mathscr{U})$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{RB}}$ рефлексивно и транзитивно. Это порядок на типах ультрафильтров:

Теорема

Ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ эквивалентны $\iff$ $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U}$.

Доказательство. Необходимость ясна из определения′ эквивалентности, а достаточность вытекает из того, что если $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{V}$ или $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U}$, то, очевидно, $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ или, соответственно, $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. □

Теорема

1. *Если $\mathscr{U}$ — быстрый ультрафильтр и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U}$, то $\mathscr{V}$ тоже является быстрым ультрафильтром.*
2. *Если $\mathscr{U}$ — Q-ультрафильтр и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U}$, то $\mathscr{V}$ тоже является Q-ультрафильтром; более того, $\mathscr{V} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. Таким образом, Q-ультрафильтры (точнее, их типы) $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-минимальны.*

Доказательство. 1. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — конечнократное отображение, для которого $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, и пусть $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$, где все A_n конечны. Тогда все $f^{-1}(A_n)$ конечны. Ультрафильтр $\mathscr{U}$ быстрый $\implies$ $\exists U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap f^{-1}(A_n)| \leqslant n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $|f(U) \cap A_n| \leqslant n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — конечнократное отображение, для которого $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, и пусть $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$, где все A_n конечны. Тогда все $f^{-1}(A_n)$ конечны. $\mathscr{U}$ — Q-ультрафильтр $\implies$ $\exists U \in \mathscr{U}$ такой, что все пересечения $U \cap f^{-1}(A_n)$ не более чем одноточечны, т.е. $f|_U$ взаимно однозначно. Это означает, что $\mathscr{V} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. $\square$

Схема доказательства неоднородности некоторых компактов:

Говорят, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек топологического пространства сходится по ультрафильтру $\mathscr{W}$ к x, если для любой окрестности $U \ni x$ множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ принадлежит $\mathscr{W}$. В компакте любая последовательность сходится к некоторой точке по любому ультрафильтру.

Пусть $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \mathbb{N}^*$ $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-несравнимы, и пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — дискретная последовательность попарно различных точек хаусдорфова компакта K. Она сходится по ультрафильтру $\mathscr{U}$ к точке x, а по ультрафильтру $\mathscr{V}$ — к точке y. Если K однороден, то $\exists$ гомеоморфизм $h\colon K \to K$ такой, что $h(y) = x$. Пусть $h(x_n) = y_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — дискретная последовательность попарно различных точек. Множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ дискретно $\implies$ пользуясь регулярностью K, нетрудно разделить его точки попарно непересекающимися окрестностями, и такие же окрестности есть у y_n. Если K таков, что для любых счётных множеств $A, B \subset K$ с $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$ либо $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$, либо $\overline{B} \cap A \neq \varnothing$ ($\mathbb{N}^*$ обладает этим свойством), то с помощью этих систем окрестностей нетрудно построить отображение ультрафильтра $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$ или наоборот в противоречие с несравнимостью этих ультрафильтров.

Существование специальных типов ультрафильтров на $\mathbb{N}$

ZFC+CH $\implies$ существуют селективные ультрафильтры, а также существуют P-ультрафильтры, которые не являются Q-ультрафильтрами, Q-ультрафильтры, которые не являются P-ультрафильтрами, и быстрые ультрафильтры, которые не являются ни P-, ни Q-ультрафильтрами

ZFC $\implies$ существуют ультрафильтры, которые не являются ни P-ультрафильтрами, ни Q-ультрафильтрами

Shelah: Существует модель ZFC, в которой нет P-ультрафильтров (но есть Q-ультрафильтры)

Miller: Существует модель ZFC, в которой нет быстрых и, тем более, Q-ультрафильтров (но есть P-ультрафильтры)

Проблема (очень старая)

Существует ли модель ZFC, в которой нет ни P-ультрафильтров, ни Q-ультрафильтров?

Рамсеевские ультрафильтры

Определение

Ультрафильтр $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ называется рамсеевским, если для любых $k, m \in \mathbb{N}$ и любой раскраски $c\colon [\mathbb{N}]^k \to \{1, \ldots, m\}$ существует $U \in \mathscr{U}$ такое, что $c|_{[U]^k} = \mathrm{const}$. (Такие множества U называются однородными, или c-однородными.)

Теорема

Для ультрафильтра $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ следующие условия равносильны:

1. *$\mathscr{U}$ рамсеевский;*
2. *у любой последовательности $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathscr{U}$ имеется квазидиагональное пересечение в $\mathscr{U}$ — множество $U \in \mathscr{U}$ такое, что для любого $n \in U$ выполнено условие $n \in \bigcap\limits_{i<n, i\in U} U_i$, т.е. $U \subset \bigcap\limits_{i\in U} (\{1, \ldots, i\} \cup U_i)$;*
3. *$\mathscr{U}$ селективный.*

Доказательство. ① $\Rightarrow$ ③: Пусть $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ рамсеевский и $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$, где $C_i \notin \mathscr{U}$. Рассмотрим раскраску $c \colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0, 1\}$, определённую правилом: $c(\{i, j\}) = 1$ для $i < j \iff i \in C_n$, $j \in C_m$ и $n < m$. Пусть $U \in \mathscr{U}$ — однородное множество. Предположим, что $c|_{[U]^2} \equiv 0$. Положим $k = \min U$. Пусть $k \in C_n$. Для каждого $i \in U$, $i \neq k$, имеем $i \in C_1 \cup \dots \cup C_n$. Значит, $\exists\ U' \subset U$, $U' \in \mathscr{U}$, такое, что $U' \subset C_m$ для некоторого $m < k$, т.е. $C_m \in \mathscr{U}$. Противоречие $\implies c|_{[U]^2} \equiv 1$. Очевидно, U — селектор.

③ $\Rightarrow$ ②: Пусть $U_i \in \mathscr{U}$, $i \in \mathbb{N}$, и $U_0 = \mathbb{N}$. Можно считать, что $U_{i+1} \subset U_i$. Положим $C_i = U_{i-1} \setminus U_i \notin \mathscr{U}$. Имеем $\mathbb{N} = \bigsqcup C_i$. Селективность $\implies \exists\ B \in \mathscr{U}$ такой, что $B \setminus U_i$ конечно для всех i. Положим

$$f(m) = \min\{n : B \setminus U_m \subset \{1, \dots, n\}\}$$

для $m \in \mathbb{N}$. Получили функцию $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Она не убывает. Положим $C_0 = \mathbb{N} \setminus B$ и $C_k = \{b \in B : f^{k-1}(1) < b \leqslant f^k(1)\}$ для $k \in \mathbb{N}$ (считаем, что $f^0(1) = 0$). Селективность $\implies \exists\ U' \in \mathscr{U}$ такое, что $U' \subset B$ и $|U' \cap C_i| = 1\ \forall i \in \mathbb{N}$. Пусть $U' = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $a_{n+1} > a_n$, и $U = \{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$ (когда $\{a_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$, рассуждения аналогичны).

Пусть $i, j \in U$, $i < j$. Предположим, что $i \in C_k$ (k чётно). Тогда $i \leqslant f^k(1)$. Имеем $j \in C_m$ для $m > k$. m чётно $\implies$ $m \geqslant k+2$. Значит, $j > f^{k+1}(1) = f(f^k(1)) \geqslant f(i)$. $j \in B \implies j \in U_i$.

2 $\Rightarrow$ 1: Индукция по k. Для $k = 1$ однородное $U \in \mathscr{U}$ всегда есть. Пусть $k > 1$ и для меньших k оно существует у любой раскраски, и пусть $c \colon [\mathbb{N}]^k \to \{1, \dots, m\}$ — любая раскраска.

Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим раскраску $c_n \colon [\mathbb{N}]^{k-1} \to \{1, \dots, m\}$, определённую правилом:

$$c_n(\{n_1, \dots, n_{k-1}\}) = \begin{cases} c(\{n\} \cup \{n_1, \dots, n_{k-1}\}), \\ \qquad\qquad \text{если } n \notin \{n_1, \dots, n_k\}, \\ 1, \qquad\quad \text{если } n \in \{n_1, \dots, n_k\}. \end{cases}$$

По предположению $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists U_n \in \mathscr{U}$ и $j_n \in \{1, \dots, m\}$ такие, что $c_n|_{[U_n]^{k-1}} = j_n$. Можно считать, что $\min U_n > n$ и $U_{n+1} \subset U_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Найдём $U \in \mathscr{U}$ и $j \leqslant m$ такие, что $j_n = j$ для всех $n \in U$ и U — квазидиагональное пересечение для $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ясно, что U однородно: если $\{n_1 < \dots < n_k\} \subset U$, то $n_2, \dots, n_k \in U_{n_1}$ и $c_{n_1}(\{n_2, \dots, n_k\}) = c(\{n_1, \dots, n_k\}) = j$. $\square$

Замечание

Из доказательства теоремы видно, что ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\mathbb{N}$ рамсеевский $\iff$ для любой раскраски $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$ существует $U \in \mathscr{U}$ такое, что $c|_{[U]^2} = \mathrm{const}$.

Напомним: по теореме Цермело любое множество можно вполне упорядочить (порядок полон, если он линеен и у любого непустого подмножества есть минимальный элемент). Методы доказательства по индукции и определения по рекурсии легко обобщаются на произвольные вполне упорядоченные множества; обобщения называются *доказательство по трансфинитной индукции* и *определение по трансфинитной рекурсии*.

Пусть $(A, <)$ — вполне упорядоченное множество. Обозначим через 0 наименьший элемент A. Для $\alpha \in A$ положим $[0, \alpha) = \{\beta \in A : \beta < \alpha\}$ и $[0, \alpha] = \{\beta \in A : \beta \leqslant \alpha\}$.

Трансфинитная индукция

Для каждого $\alpha \in A$ пусть $P(\alpha)$ — утверждение об α. Предположим, что $P(0)$ верно и для любого $\alpha \in A$ из справедливости $P(\beta)$ для всех $\beta < \alpha$ следует справедливость $P(\alpha)$. Тогда $P(\alpha)$ верно для всех $\alpha \in A$ — иначе множество $\{\alpha \in A : P(\alpha) \text{ неверно }\}$ непусто, и взяв его минимальный элемент, мы приходим к противоречию.

Трансфинитная рекурсия

Пусть B — произвольное множество и имеется рекурсивное правило F, которое ставит в соответствие каждому $\alpha \in A$ и каждой функции $g\colon [0,\alpha) \to B$ некоторый (единственный) элемент множества B. Тогда $\exists!\ f\colon A \to B$ такое, что

$$f(\alpha) = F(\alpha, f|_{[0,\alpha)}) \qquad \forall \alpha \in A. \tag{$\star$}$$

Доказательство. Если $A = \{0\}$, то доказывать нечего. Пусть $A \neq \{0\}$. Докажем по трансфинитной индукции, что $\forall \alpha_0 \in A$

$P(\alpha_0):$ $\exists!$ отображение $f_{\alpha_0}\colon [0,\alpha_0] \to B$ такое, что $(\star)$ выполнено при всех $\alpha \leqslant \alpha_0$.

$P(0)$ верно. Пусть $\alpha_0 > 0$ и $P(\alpha)$ верно для всех $\alpha < \alpha_0$. Для любых $\alpha, \beta < \alpha_0$, $\alpha < \beta$, имеем $f_\beta|_{[0,\alpha]} = f_\alpha$ (иначе f_α не единственно). Каждое отображение f_α — подмножество произведения $[0,\alpha] \times B \subset$ $\subset [0,\alpha_0) \times B$. Объединив все f_α по $\alpha < \alpha_0$, получим $f_{\alpha_0}\colon [0,\alpha_0) \to B$. Положим $f_{\alpha_0}(\alpha_0) = F(\alpha_0, f|_{[0,\alpha_0)})$. $\forall \alpha < \alpha_0$ сужение $f_{\alpha_0}|_{[0,\alpha]}$ совпадает с единственным (по индуктивному предположению) f_α, $f_{\alpha_0}(\alpha_0)$ определено однозначно $\implies$ f_{α_0} единственно.

Объединив все f_α, $\alpha \in A$, мы получим требуемое f. Оно единственно: если $f' \neq f$ — отображение со свойством $(\star)$, то, рассмотрев наименьшее $\alpha \in A$, для которого $f'(\alpha) \neq f(\alpha)$, придём к противоречию. $\square$

Теорема

$CH \implies \exists$ рамсеевский ультрафильтр на $\mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $(A, \leqslant)$ — вполне упорядоченное множество мощности $2^{\aleph_0}$ с наименьшим элементом 0, и пусть ω_1 — наименьший элемент A, для которого множество $[0, \omega_1)$ несчётно. CH $\implies |[0, \omega_1)| = 2^{\aleph_0}$. Мощность множества всех раскрасок $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$ тоже равна $2^{\aleph_0}$.

Перенумеруем все раскраски $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$: $\{c_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Возьмём бесконечное c_0-однородное $U_0 \subset \mathbb{N}$. Пусть $\alpha > 0$ и мы уже построили бесконечные множества U_β, $\beta < \alpha$, так, что

- если $\beta, \gamma < \alpha$ и $\beta < \gamma$, то $U_\gamma \subset^* U_\beta$ (т.е. $U_\gamma \setminus U_\beta$ конечно);
- U_β c_β-однородно для всякого $\beta < \alpha$.

Если $[0, \alpha)$ конечно, положим $U'_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} U_{\beta_n}$. Если нет, перенумеруем все $\beta < \alpha$ как β_n, $n \in \mathbb{N}$ (их число не более чем счётно по определению ω_1) и выберем по точке в каждом пересечении $\bigcap\limits_{n\leqslant k} U_{\beta_n}$, $k \in \mathbb{N}$. Получим бесконечное $U'_\alpha \subset \mathbb{N}$ такое, что $U'_\alpha \subset^* U_\beta$ $\forall \beta < \alpha$. Возьмём c_α-однородное бесконечное $U_\alpha \subset U'_\alpha$.

Семейство $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ центрировано и содержит c-однородное множество для любой раскраски $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$. Ультрафильтр, содержащий это семейство, искомый. $\square$

Быстрые ультрафильтры

Теорема (о быстрых ультрафильтрах)

Для ультрафильтра $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ следующие условия равносильны:

1. *$\mathscr{U}$ быстрый, т.е. для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где все A_n конечны, $\exists U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \leqslant n\ \forall n$;*
2. *существует функция $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для любой последовательности $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конечных подмножеств $\mathbb{N}$ $\exists\, U \in \mathscr{U}$ со свойством $|U \cap P_n| \leqslant h(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*
3. *для любой функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\exists$ возрастающая функция $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со свойствами $f(n) < g(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $g(\mathbb{N}) \in \mathscr{U}$.*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2: Пусть $P_n \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, конечны, и пусть $P'_n \supset P_n$ — конечные множества, $\bigcup P'_n = \mathbb{N}$. Положим $A_1 = P'_1$ и $A_{n+1} = P'_{n+1} \setminus (\bigcup\limits_{i\leqslant n} P'_n)$. Тогда $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$ и $P'_n \subset \bigcup\limits_{i\leqslant n} A_i$.

$\mathscr{U}$ быстрый $\Longrightarrow$ $\exists U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \leqslant n$ для всех n.

Имеем $|U \cap P_n| \leqslant |U \cap P'_n| \leqslant \sum\limits_{i\leqslant n} |U \cap A_i| \leqslant \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Значит, годится $h\colon n \mapsto \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

2 $\Rightarrow$ 3: Можно считать, что h и f возрастают. Выберем $n_1 < n_2 < \ldots$ так, что $h(k+1) < n_k$. Положим $P_k = \{1, 2, \ldots, f(n_k)\}$ для $k \in \mathbb{N}$. Выберем $U \in \mathscr{U}$, для которого $|U \cap P_k| \leqslant h(k)$. Положим $V = U \setminus P_1$. Тогда $V \in \mathscr{U}$ и если $m \in V$, то $m \geqslant n_1$, а значит, $n_k \leqslant m < n_{k+1}$ для некоторого k, так что $f(m) < f(n_{k+1})$. Следовательно,

$$|V \cap \{1, \ldots, f(m)\}| \leqslant |V \cap P_{k+1}| \leqslant h(k+1) < n_k \leqslant m. \qquad (*)$$

Занумеровав элементы множества V в порядке возрастания, получим последовательность — функцию $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $V = \{g(1), g(2), \ldots\}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Поскольку g возрастает, пересечение $V \cap \{1, \ldots, f(n)\}$ имеет вид $\{g(1), \ldots, g(k)\}$, причём $k < n$ согласно $(*)$. Имеем $g(n) > g(k)$. Значит, $g(n) > f(n)$.

3 $\Rightarrow$ 1: Положим $f(n) = \max(\bigcup_{i \leqslant n} A_i)$. Пусть функция $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что $g(n) > f(n)$ для $n \in \mathbb{N}$ и $g(\mathbb{N}) \in \mathscr{U}$. Тогда $A_n \cap g(\mathbb{N}) \subset \{g(1), \ldots, g(n)\}$. $\square$

Тензорное произведение ультрафильтров

Определение

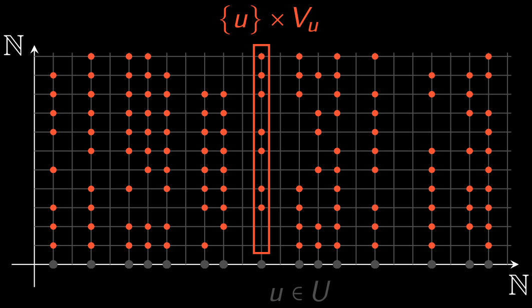
Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтры на $\mathbb{N}$. Положим

$$\mathscr{U} \otimes \mathscr{V} = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \{n : \{m : (n, m) \in A\} \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}\}.$$

Это ультрафильтр на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, базу которого составляют множества вида

$$\bigcup_{u \in U} (\{u\} \times V_u), \quad \text{где } U \in \mathscr{U} \text{ и } V_u \in \mathscr{V} \text{ для } u \in U.$$

Его называют тензорным произведением ультрафильтров $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$.



Теорема

Для любого ультрафильтра $\mathscr{U}$ и любого быстрого ультрафильтра $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ ультрафильтр $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ быстрый.

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ неглавный.

Пусть $C_k \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, и все C_k конечны. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем $n_k \in \mathbb{N}$ так, что $C_k \subset \{1, \ldots, n_k\} \times \{1, \ldots, n_k\}$. Существует $V \in \mathscr{V}$, для которого $|\{1, \ldots, n_k\} \cap V| \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$: надо взять функцию $f : k \mapsto n_k$, найти возрастающую $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $g(k) > f(k)$ и $g(\mathbb{N}) \in \mathscr{V}$ (см. пункт ③ теоремы о быстрых ультрафильтрах), и положить $V = g(\mathbb{N})$. Положим $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\} \times \{m : m \in V,\ m \geqslant n_k\}$; тогда $A \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$, и

$$A \cap C_k \subset A \cap \{1, \ldots, n_k\} \times \{1, \ldots, n_k\} \subset \subset \bigcup_{i \leqslant n_k} \{i\} \times (V \cap \{n_i, \ldots, n_k\}) \subset \subset \bigcup_{i \leqslant k} \{i\} \times (V \cap \{n_i, \ldots, n_k\})$$

($\{n_i, \ldots, n_k\} = \varnothing$ для $i > k$). Это объединение имеет мощность $\leqslant k^2$ для всякого k. По доказанной теореме ультрафильтр $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ быстрый. □

Следствие

Для любого ультрафильтра $\mathscr{U}$ и любого быстрого ультрафильтра $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ ультрафильтр $\mathscr{U}+\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ быстрый.

Доказательство. База ультрафильтра $\mathscr{U}+\mathscr{V}$ состоит из множеств вида $\bigcup\{u+V_u : u \in U\}$, где $U \in \mathscr{U}$ и $V_n \in \mathscr{V}$, — образов элементов базы тензорного произведения $\mathscr{U}\otimes\mathscr{V}$ при отображении $+\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (сложении чисел). Ясно, что $+$ конечнократно. □

Следствие

Множество быстрых ультрафильтров — левый идеал в $\mathbb{N}^*$.

Следствие

Если $\exists$ быстрый ультрафильтр, то $\exists$ быстрый ультрафильтр, являющийся минимальным идемпотентом.

Доказательство. Поскольку $\mathbb{N}^*$ — замкнутая ($\Rightarrow$ компактная) подполугруппа в $\beta\mathbb{N}$, по второй теореме о компактных полугруппах в $\mathbb{N}^*$ имеется замкнутый минимальный левый идеал ($\Rightarrow$ подполугруппа), состоящий из быстрых ультрафильтров, и по первой теореме в нём есть идемпотент; он минимален по теореме о минимальных идемпотентах. □

Предложение

1. *Ультрафильтры вида $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ для $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \mathbb{N}^*$ не бывают Q-ультрафильтрами.*
2. *Q-ультрафильтры не бывают идемпотентами.*

Доказательство. 1 : Рассмотрим разбиение множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на конечные подмножества

$$A_n = \{n\} \times \{m : m \leqslant n\} \quad \text{и} \quad B_n = \{m : m < n\} \times \{n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $W = \bigcup\limits_{u \in U} (\{u\} \times V_u) \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$, где $U \in \mathscr{U}$ и $V_u \in \mathscr{V}$, и пусть $u_1, u_2 \in U$, $u_1 < u_2$. $V_{u_1} \cap V_{u_2}$ бесконечно, так как $\mathscr{V}$ неглавный. Пусть $v \in V_{u_1} \cap V_{u_2}$, $v > u_2$. Тогда $(u_1, v), (u_2, v) \in B_v \cap W$.

2 : Пусть $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ — идемпотент. Теорема Хиндмана $\Longrightarrow$ $\forall U \in \mathscr{U}$ $\exists$ последовательность $(a_n)_n$ такая, что $a_i < a_j$ для $i < j$ и $FS\big((a_n)_n\big) \subset U$ $\Longrightarrow$ $\forall U \in \mathscr{U}$ $\exists k \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ существуют $n_1, n_2, n_3 \in U$, удовлетворяющие условиям $n_1, n_2, n_3 > n$ и $|n_i - n_j| \leqslant k$ (например, $k = a_3$ и $n_i = a_i + a_m$ для достаточно большого m). Если $\mathbb{N} = \bigsqcup C_i$ и C_i — интервалы растущей длины (например, $C_i = \{2^{i-1}, 2^{i-1} + 1, \ldots, 2^i - 1\}$), то для достаточно большого i C_i содержит по меньшей мере две точки из U. $\square$

Предложение

1. *Ультрафильтры вида $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ для $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \mathbb{N}^*$ не бывают P-ультрафильтрами.*
2. *P-ультрафильтры не бывают идемпотентами.*

Доказательство. 1 : Рассмотрим разбиение множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на подмножества $\{n\} \times \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$W = \bigcup_{u \in U} (\{u\} \times V_u) \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}, \quad \text{где } U \in \mathscr{U} \text{ и } V_u \in \mathscr{V}.$$

Тогда $W \cap \{n\} \times \mathbb{N}$ бесконечно для всякого $n \in U$.

2 : Если $\mathscr{U}$ — P-ультрафильтр-идемпотент, то $\mathscr{U} + \mathscr{U} = \mathscr{U}$, и из непрерывности сложения по первому аргументу следует, что любая окрестность точки $\mathscr{U}$ содержит множество вида $\overline{A} + \mathscr{U} \supset A + \mathscr{U}$, где $A \subset \mathbb{N}$. Значит, $\mathscr{U}$ принадлежит замыканию множества $\{n + \mathscr{U} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^*$. Однако P-ультрафильтр $\mathscr{U}$ является P-точкой и не может быть предельной точкой никакого счетного множества $X = \{\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^*$, где $\mathscr{U}_n \neq \mathscr{U}$, так как для окрестностей $U_n = \mathbb{N}^* \setminus \{\mathscr{U}_n\}$ точки $\mathscr{U}$ пересечение $U = \bigcap U_n$ — тоже окрестность, и $U \cap X = \varnothing$. $\square$

Во втором пункте мы доказали немного больше, чем утверждается в формулировке предложения:

Если $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ не является предельной точкой никакого счётного множества $X \subset \mathbb{N}^*$, то $\mathscr{U}$ не идемпотент.

Кроме того, неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ с аналогичным свойством не может иметь вид $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ для неглавного $\mathscr{V}$, так как любой $A \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ содержит множество вида $\{n\} \times V$, где $V \in \mathscr{V}$, $\implies$ принадлежит неглавному ультрафильтру $\{p_n\} \otimes \mathscr{V}$, т.е. $\{p_n\} \otimes \mathscr{V} \in \overline{A}$. Каждая окрестность ультрафильтра $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ содержит окрестность вида $\overline{A} \implies \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ — предельная точка счётного множества $\{\{p_n\} \otimes \mathscr{V} : n \in \mathbb{N}\} \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^*$.

Точка топологического пространства, которая не является предельной точкой никакого счётного множества, называется **слабой P-точкой**.

Теорема (K. Kunen)

В $\mathbb{N}^*$ существует по меньшей мере $2^{\aleph_0}$ $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-несравнимых слабых P-точек.

В этой теореме никакие дополнительные теоретико-множественные предположения не требуются.

Незамкнутые дискретные множества в топологических группах

Ниже все топологические группы предполагаются отделимыми.

Теорема (В.И. Малыхин, 1975)

Если верна континуум-гипотеза, то существует счётная недискретная топологическая группа, в которой все дискретные подмножества замкнуты.

Вопрос: существует ли такая группа без дополнительных теоретико-множественных предположений?
Ответ: нет.

Теорема (О.В.С., 2016)

Если не существует быстрых ультрафильтров, то любая счётная недискретная топологическая группа содержит дискретное подмножество с единственной предельной точкой.

Нам понадобится определение быстрого фильтра на счётном множестве, которое дословно повторяет определение быстрого ультрафильтра:

> Фильтр $\mathscr{F}$ на счётном множестве X называется быстрым, если для любого разбиения $X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где все A_n конечны, $\exists\, F \in \mathscr{F}$ с тем свойством, что $|F \cap A_n| \leqslant n$ для каждого n.

Замечание

Фильтр быстрый $\iff$ любой содержащий его ультрафильтр быстрый.

Замечание

Фильтр $\mathscr{F}$ на X небыстрый $\iff$ для любой функции $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует последовательность конечных множеств $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $P_n \subset X$, такая, что для всякого $F \in \mathscr{F}$ имеем $|F \cap P_n| > h(n)$ при некотором n.

(Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы о быстрых ультрафильтрах.)

Определение

Скажем, что множество M в группе G **жирное**, если $1 \in M$ и $\exists m \in \mathbb{N}$ (**жирность** M) такое, что для любого m-элементного множества $F \subset G$ существуют различные $x, y \in F$ с тем свойством, что $x^{-1} \cdot y \in M$ и $y^{-1} \cdot x \in M$.

Любая подгруппа конечного индекса — жирное множество.

Предложение

Если $W \subset G$, $W = W^{-1}$ и $g \cdot W \cap W^2 = \varnothing$, то $M = G \setminus g \cdot W$ — жирное множество (и $m = 4$).

Доказательство. Если для $x_1, x_2, x_3, x_4 \in G$ нарушено условие жирности множества M, то для любого $i = 2, 3, 4$ либо (1) $x_1^{-1} \cdot x_i \notin M$, либо (2) $x_i^{-1} \cdot x_1 \notin M$, причём одно из условий (1) и (2) выполнено по меньшей мере для двух разных i. Пусть для определённости $x_1^{-1} \cdot x_2 \notin M$ и $x_1^{-1} \cdot x_3 \notin M$. Тогда $x_1^{-1} \cdot x_2 \in g \cdot W$ и $x_1^{-1} \cdot x_3 \in g \cdot W$, так что

$$(x_1^{-1} \cdot x_2)^{-1} \cdot x_1^{-1} \cdot x_3 = x_2^{-1} \cdot x_3 \in W^{-1} \cdot g^{-1} \cdot g \cdot W = W^2 \subset M.$$

Поскольку $W^{-1} = W$, имеем также $x_3^{-1} \cdot x_2 \in W^2 \subset M$. □

Лемма

Пусть G — группа и $M \subset G$ — жирное множество. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что всякое N-элементное множество $P \subset G$ содержит n-элементное множество $Q \subset P$ со свойством $Q^{-1} \cdot Q \subset M$.

Доказательство. Пусть M имеет жирность m. Возьмём $k \geqslant \max\{m, n\}$. Из конечной версии теоремы Рамсея, применённой к счётному множеству G, вытекает существование числа $N \in \mathbb{N}$ такого, что для всякого N-элементного множества $P \subset G$ и любой раскраски $c\colon [P]^2 \to \{0, 1\}$ существует k-элементное однородное множество $Q \subset P$.

Возьмём N-элементное множество $P \subset G$ и рассмотрим раскраску $c\colon [P]^2 \to \{0, 1\}$, определённую правилом

$$c(\{x, y\}) = 0 \iff x^{-1} \cdot y \in M \text{ и } y^{-1} \cdot x \in M.$$

Пусть $Q \subset G$ — k-элементное однородное множество (т.е. $c|_{[Q]^2} = \mathrm{const}$). Поскольку жирность m множества M не превосходит k, для некоторых $x, y \in Q$ имеем $c(\{x, y\}) = 0$. Значит, $\mathrm{const} = 0$, т.е. $x^{-1} \cdot y \in M$ для любых $x, y \in Q$. □

Теорема

Пусть G — любая группа и M, M_1 и M_2 — жирные множества. Тогда

1. *множество M^{-1} жирное;*
2. *пересечение $M_1 \cap M_2$ жирное;*
3. *любое множество $P \supset M$ жирное.*

(В частности, в любой недискретной группе семейство жирных множеств образует фильтр.)

Доказательство. Утверждения 1 и 3 верны по определению жирных множеств. Докажем 2.

Пусть M_1 имеет жирность m_1 и M_2 имеет жирность m_2. Из доказанной леммы, применённой к M_2 и m_1, вытекает существование $N \in \mathbb{N}$ такого, что всякое множество $P \subset G$ с $|P| \geqslant N$ содержит m_1-элементное подмножество Q со свойством $Q^{-1} \cdot Q \subset M_2$. Поскольку $|Q| = m_1$, из определения жирного множества следует, что для некоторых $x, y \in Q$ имеем $x^{-1} \cdot y \in M_1$ и $y^{-1} \cdot x \in M_1$. Из того, что $Q^{-1} \cdot Q \subset M_2$, получаем $x^{-1} \cdot y \in M_1 \cap M_2$ и $y^{-1} \cdot x \in M_1 \cap M_2$. $\square$

Лемма

Пусть G — счётная группа, $\mathscr{F}$ — небыстрый фильтр на G и $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность жирных множеств. Тогда существует множество $D \subset G \setminus \{1\}$ со свойствами

1. $D \setminus M_n$ *конечно для всех* n;
2. $\forall F \in \mathscr{F}$ *найдутся различные* $a, b \in F$ *такие, что* $a^{-1} \cdot b \in D$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $M_{n+1} \subset M_n$ и $M_n^{-1} = M_n$. Пусть m_n — жирность M_n. Фильтр $\mathscr{F}$ небыстрый $\implies$ $\exists$ последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конечных подмножеств G с тем свойством, что для всякого $F \in \mathscr{F}$ имеем $|F \cap P_n| > m_n$ при некотором n. Положим

$$D_n = \{g^{-1} \cdot h : g, h \in P_n, g \neq h, g^{-1} \cdot h \in M_n\} \quad \text{и} \quad D = \bigcup D_n.$$

Проверим 1: множества D_k конечны, $D_k \subset M_k$, $M_{k+1} \subset M_k$ $\implies$ $D \setminus M_n \subset \bigcup\limits_{k<n} D_k$ конечно для каждого n.

Проверим 2: Пусть $F \in \mathscr{F}$. Имеем $|F \cap P_n| > m_n$ для некоторого n. Множество M_n жирное, m_n — его жирность $\implies$ $\exists$ различные $a, b \in F \cap P_n$, для которых $a^{-1} \cdot b \in M_n$. По определению $a^{-1} \cdot b \in D_n$. $\square$

Теорема

Любая счётная недискретная топологическая группа G, в которой фильтр $\mathscr{F}$ окрестностей единицы небыстрый, содержит незамкнутое дискретное множество с единственной предельной точкой 1.

Доказательство. Пусть $G = \{1, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ возьмём окрестность единицы U_n такую, что $g_n \notin U_n$. Пусть V_n — открытая окрестность 1 такая, что $V_n = V_n^{-1}$ и $V_n \cdot V_n \cdot V_n \subset U_n$ (она существует, так как взятие обратного и умножение непрерывны, $1^{-1} = 1$ и $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$). Тогда $g_n \cdot V_n \cap V_n \cdot V_n = \varnothing$. Предложение $\implies$ множество $M_n = G \setminus (g_n \cdot V_n)$ жирное (и замкнутое), причём $\bigcap M_n = \{1\}$. Возьмем D как в теореме. Каждая точка $g \in G \setminus \{1\}$ не принадлежит некоторому $M_n \implies G \setminus M_n$ — её открытая окрестность, содержащая лишь конечное число точек из D $\implies$ D дискретно и точки $g \neq 1$ не предельные для D.

Для любой окрестности 1 U существует окрестность 1 V такая, что $V^{-1} \cdot V \subset U$. Значит, любая окрестность 1 содержит $F^{-1} \cdot F$ для некоторого $F \in \mathscr{F} \implies$ пересекает D. □

Следствие

С ZFC совместимо утверждение: любая счётная недискретная топологическая группа содержит незамкнутое дискретное множество, единственной предельной точкой которого является единица группы.

Ординалы и кардиналы

При рассмотрении ультрафильтров и других объектов на несчётном множестве удобно зафиксировать на нём полный порядок. Кантор поставил в соответствие каждому множеству X его мощность (кардинал), которую можно трактовать как класс всех множеств, связанных с X биекцией, а каждому вполне упорядоченному множеству — его порядковый тип (ординал), который можно трактовать как класс всех множеств, связанных с X биекцией, сохраняющей порядок (такие биекции называются порядковыми изоморфизмами).

В современной теории множеств ординалы отождествляются с конкретными каноническими представителями классов множеств одного порядкового типа, а кардиналы — с ординалами специального вида.

С точки зрения теории множеств всё, с чем мы имеем дело, — множества, например, элементы множеств, отношения и отображения (это подмножества декартовых произведений области определения и области значений), а также числа.

Согласно аксиоме бесконечности существует множество, которое содержит (в качестве элемента) $\varnothing$ и вместе с каждым элементом x содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$ ($x \cup \{x\}$ — множество, элементами которого являются все элементы множества x и само множество x). Наименьшее (по включению) такое множество обозначается ω или $\mathbb{N}_0$ — это множество неотрицательных целых чисел:

$0 = \varnothing$,

$1 = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$,

$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,

$4 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$,

$\ldots\ldots$

Для операции $S\colon n \mapsto n \cup \{n\}$ на множестве ω используется обозначение $+1$: $S(n) = n + 1$.

Имея натуральные числа, легко определить целые и рациональные (как пары целых), а затем и вещественные (например, как дедекиндовы сечения множеств рациональных чисел).

Множество ω обладает следующими свойствами:

- Множество ω *строго вполне упорядочено отношением принадлежности* $\in$: для $x, y \in \omega$ $x < y \iff x \in y$.
- Множество ω *транзитивно*, т.е. $x \in \omega$, $y \in x \implies y \in \omega$.

Определение

Транзитивное множество, строго вполне упорядоченное отношением $\in$, называется *ординалом*.

В силу аксимы регулярности (любое непустое множество x содержит элемент y, для которого $y \cap x = \varnothing$) всякий ординал содержит $\varnothing$ в качестве элемента.

Можно доказать, что

- для всякого вполне упорядоченного множества существует ординал того же порядкового типа,
- разные ординалы имеют разные порядковые типы,
- если α и β — разные ординалы, то либо $\alpha \in \beta$, либо $\beta \in \alpha$.

Таким образом, не только сами ординалы, но и любое множество ординалов строго вполне упорядочено отношением $\in$. Пишем $\alpha < \beta$, если $\alpha \in \beta$, и $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$.

Множество ω — наименьший бесконечный ординал, оно представляет собой множество всех конечных ординалов.

Применив операцию S к ω, мы получим ординал

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega\}.$$

Его наибольший элемент — ω. Последовательно применяя операцию S, получим $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... Через бесконечное число шагов получим ординал $\omega + \omega = \omega \cup \{\omega + n : n \in \omega\}$. Ординалы, которые получаются через несчётное число шагов, уже нельзя записать с помощью символа ω и знаков арифметических операций. Наименьший несчётный ординал обозначается ω_1 и представляет собой множество всех счётных ординалов.

Каждый ординал представляет собой множество всех меньших ординалов, и каждый ординал α либо является объединением всех меньших ординалов, либо имеет вид $\beta + 1$ для некоторого ординала $\beta < \alpha$. Ординалы первого типа называются *предельными*, ординалы второго типа — *изолированными*.

Наименьший ординал обозначается 0. По определению ординалов каждый ординал α совпадает с левым лучом $[0, \alpha) = \{\beta : \beta$ — ординал, $\beta < \alpha\}$, однако в дальнейшем мы будем использовать привычное обозначение $[0, \alpha)$.

Определение

Ординал, мощность которого не равна (т.е. строго больше) мощности никакого меньшего ординала, называется *кардиналом*.

Поскольку всякое вполне упорядоченное множество находится во взаимно однозначном соответствии с некоторым ординалом и любое множество можно вполне упорядочить, каждый класс равномощных множеств содержит (единственный) кардинал.

Кардиналы и ординалы удобно брать в качестве канонических представителей классов множеств одного порядкового типа и одной мощности соответственно.

Для наших нужд достаточно того, что кардинал — это вполне упорядоченное множество $(\kappa, \leqslant)$ со свойством

$$\forall \alpha \in \kappa \quad \left|\{\beta \in \kappa : \beta < \alpha\}\right| < |\kappa|, \qquad (\star)$$

а ординалы — его элементы. Этого хватает благодаря известной теореме об изоморфизме (или сравнении) вполне упорядоченных множеств (см., например, уже упоминавшуюся книгу *Начала теории множеств* Н.К. Верещагина и А. Шеня):

Теорема об изоморфизме

Пусть $(X, \leqslant)$ *и* $(Y, \preccurlyeq)$ *— любые вполне упорядоченные множества. Тогда либо существует* $x_* \in X$ *такой, что левый луч* $\{x \in X : x < x_*\}$ *множества* X *порядково изоморфен вполне упорядоченному множеству* Y*, либо существует* $y_* \in Y$ *такой, что вполне упорядоченное множество* X *порядково изоморфно левому лучу* $\{y \in Y : y \prec y_*\}$ *множества* Y*, либо сами множества* $(X, \leqslant)$ *и* $(Y, \preccurlyeq)$ *порядково изоморфны.*

Символ 0 обозначает наименьший ординал, а $\alpha + 1$ — наименьший ординал, больший α. Мы будем обозначать мощность кардинала κ тем же символом κ.

Замечание

В силу теоремы об изоморфизме каждое множество мощности меньше κ равномощно левому лучу $[0,\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \kappa$.

Кроме того, в силу теоремы Цермело любое множество равномощно некоторому кардиналу.

Кардинал λ, следующий непосредственно за κ (для которого не существует множества X, удовлетворяющего условию $\kappa < |X| < \lambda$), обозначается κ^+.

Замечание

Кардинал κ^+ существует для любого кардинала κ.

Действительно, по теореме Кантора мощность множества $\mathscr{P}(\kappa)$ всех подмножеств множества κ строго больше κ. Пусть λ — кардинал, $\lambda = |\mathscr{P}(\kappa)|$. Если $|[0,\alpha)| < \kappa$ $\forall \alpha \in \lambda$, то $\lambda = \kappa^+$. В противном случае существует наименьший ординал $\alpha \in \lambda$, для которого $|[0,\alpha)| > \kappa$, и $\kappa^+ = [0,\alpha)$.

Наименьший бесконечный кардинал обозначается $\aleph_0$ или ω, $\aleph_0^+ = \omega^+$ обозначается $\aleph_1$ или ω_1, следующий кардинал — $\aleph_2$ или ω_2 и т.д. Наименьший кардинал, больший всех $\aleph_n = \omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, обозначается $\aleph_\omega$ или ω_ω.

Как и выше, мы называем ординал $\alpha \in \kappa$ изолированным, если у него имеется непосредственный $\leqslant$-предшественник, и предельным в противном случае. Аналогично определяются предельные кардиналы: κ предельный, если $\kappa \neq \lambda^+$ для $\lambda < \kappa$.

Замечание

На множестве κ (как и на любом линейно упорядоченном множестве) имеется порядковая топология, базу которой составляют интервалы $(\alpha, \beta) = \{\gamma \in \kappa : \alpha < \gamma < \beta\}$ и левые лучи $[0, \alpha) = \{\gamma \in \kappa : \gamma < \alpha\}$ (если бы в κ был наибольший элемент, то следовало бы ещё добавить правые лучи $\{\gamma \in \kappa : \alpha < \gamma\}$).

Ординал $\alpha \in \kappa$ изолирован тогда и только тогда, когда точка α изолирована (т.е. множество $\{\alpha\}$ открыто) в порядковой топологии на множестве κ, и α пределен тогда и только тогда, когда точка α предельна в порядковой топологии.

Пусть I — любое множество и α_ι, $\iota \in I$, — ординалы. Супремум множества ординалов $\{\alpha_\iota : \iota \in I\}$ — это наименьший ординал α со свойством $\alpha_\iota \leqslant \alpha$ для всех $\iota \in I$; обозначение: $\alpha = \sup\limits_{\iota \in I} \alpha_\iota$.

Замечание

Ординал $\alpha \in \kappa$ является предельной точкой множества $C \subset \kappa$ $\iff$ существует $C' \subset C \setminus \{\alpha\}$, для которого $\alpha = \sup C'$, так как любая окрестность точки α в порядковой топологии содержит окрестность вида $(\beta, \alpha] = \{\gamma \in \kappa : \beta < \gamma \leqslant \alpha\} = (\beta, \alpha + 1)$.

Определение

Множество $C \subset \kappa$ *замкнуто* в κ, если оно замкнуто в порядковой топологии на κ ($\iff$ всякий ординал $\alpha \in \kappa$, для которого $\sup(C \cap [0, \alpha)) = \alpha$, принадлежит C).

Определение

Кардинал κ называется *регулярным*, если для всякого множества I мощности меньше κ и любых множеств A_ι, $\iota \in I$, мощность каждого из которых меньше κ, мощность объединения $\bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota$ меньше κ.

Все кардиналы κ^+ регулярны, кардинал $\aleph_\omega = \omega_\omega$ не регулярен.

Замечание

Если κ регулярен и $|I| < \kappa$, то $\sup\limits_{\iota \in I} \alpha_\iota \in \kappa$ $\forall \alpha_\iota \in \kappa$, $\iota \in I$.

Определение

Множество $C \subset \kappa$ **неограничено** в κ, если для всякого ординала $\alpha \in \kappa$ существует $\gamma \in C$ такой, что $\gamma > \alpha$.

Предложение

Если κ — регулярный кардинал, то множество $C \subset \kappa$ неограничено в κ $\iff$ $|C| = \kappa$.

Доказательство. В силу $(\star)$ $|[0,\gamma)| < \kappa$ для каждого $\gamma \in C$. Если C неограничено, то $\bigcup\limits_{\gamma \in C} [0,\gamma) = \kappa$, а значит, $|C| = \kappa$, так как κ регулярен.

Обратно, если $|C| = \kappa$, то в силу $(\star)$ ни для какого $\alpha \in \kappa$ не выполнено включение $C \subset [0,\alpha)$. Значит, для всякого $\alpha \in \kappa$ существует $\gamma \in C$, $\gamma > \alpha$, т.е. C неограничено. $\square$

Фильтр club(κ)

Определение

Множество $C \subset \kappa$, замкнутое и неограниченное в κ, называется клубом (от англ. club — closed unbounded).

Согласно следующей теореме семейство всех клубов в несчётном регулярном кардинале κ замкнуто относительно конечных (и не только) пересечений, а значит, служит базой некоторого фильтра. Этот фильтр обозначается club(κ).

Определение

Пусть κ — кардинал. Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств множества X называется κ-полным, если пересечение $< \kappa$ его элементов тоже является его элементом. Любой фильтр ω-полон. ω_1-полные семейства называются счётно полными или σ-полными.

Теорема (κ-полнота фильтра club(κ))

Если κ — регулярный несчётный кардинал, то семейство всех клубов в κ κ-полно.

Доказательство. Рассмотрим любое семейство мощности $< \kappa$ клубов C_α в κ; их всегда можно заиндексировать ординалами $\alpha \in [0, \lambda)$ для некоторого $\lambda \in \kappa$. Пересечение $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ замкнуто в κ (так как все C_α замкнуты).

Покажем, что оно неограничено. Возьмём любой ординал $\beta_0 \in \kappa$. Пусть $(\beta_{0\alpha})_{\alpha<\lambda}$ — λ-последовательность ординалов со свойствами

- $\beta_{00} > \beta_0$,
- $\beta_{0\alpha} < \beta_{0\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{0\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

Она существует, так как все C_α неограничены.

Предположим, что $n > 0$ и мы построили последовательность $(\beta_{(n-1)\alpha})_{\alpha<\lambda}$ ординалов из κ. Положим $\beta_n = \sup\limits_{\alpha<\lambda} \beta_{(n-1)\alpha}$. Выберем последовательность $(\beta_{n\alpha})_{\alpha<\lambda}$ со свойствами

- $\beta_{n0} > \beta_n$,
- $\beta_{n\alpha} < \beta_{n\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

В результате мы получим последовательности $(\beta_{n\alpha})_{\alpha<\lambda}$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Для каждого $\alpha < \lambda$ положим $\beta^*_\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \beta_{n\alpha}$. Каждое C_α замкнуто, $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha \implies \beta^*_\alpha \in C_\alpha$. Поскольку $\beta_n < \beta_{n\alpha} < \beta_{n+1}$, имеем $\beta^*_\alpha = \sup \beta_n$ для всякого $\alpha < \lambda$. Значит, $\sup \beta_n \in \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} C_\alpha$, причём $\sup \beta_n > \beta_0$. $\square$

Теорема (о диагональном пересечении клубов)

Если κ — регулярный несчётный кардинал, то для любой последовательности клубов $(C_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ диагональное пересечение

$$\mathop{\Delta}_{\alpha\in\kappa} C_\alpha = \{\beta\in\kappa : \beta\in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\}$$

является клубом.

Доказательство. Покажем, что $\Delta\, C_\alpha = \bigcap(C_\alpha \cup [0,\alpha])$. Если $\beta\in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} C_\alpha$, то тем более $\beta\in \bigcap\limits_{\alpha<\beta}(C_\alpha\cup[0,\alpha])$, и при этом $\beta\in[0,\gamma]\subset C_\gamma\cup[0,\gamma]$ для всякого $\gamma\geqslant\beta$. Значит, $\Delta\, C_\alpha\subset\bigcap(C_\alpha\cup[0,\alpha])$. Обратно, если $\beta\in\bigcap(C_\alpha\cup[0,\alpha])$, то $\beta\in C_\alpha\cup[0,\alpha]$ для каждого $\alpha<\beta$, и из того, что $\beta\notin\bigcup[0,\alpha]$, следует, что $\beta\in\bigcap C_\alpha$.

Вывод: $\Delta\, C_\alpha$ замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Покажем, что оно неограничено. Возьмём $\alpha\in\kappa$ и рассмотрим последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, где

$$\xi_0=\alpha \quad\text{и}\quad \xi_{n+1}=\min\Big\{\gamma\in\kappa:\gamma>\xi_n,\ \gamma\in\bigcap_{\beta<\xi_n} C_\beta\Big\}.$$

Положим $\xi=\sup\xi_n$. Для каждого $\beta<\xi$ имеем $\beta<\xi_k$ для некоторого k, поэтому все ξ_n, кроме конечного числа, принадлежат C_β. Все C_β замкнуты $\implies$ $\xi\in C_\beta$ для каждого $\beta<\xi$ $\implies$ $\xi\in\Delta\, C_\alpha$. Ясно, что $\xi>\alpha$. □

Следствие

Семейство всех клубов в регулярном несчётном кардинале κ замкнуто относительно конечных пересечений.

Таким образом, семейство

$$\mathrm{club}(\kappa) = \{A \subset \kappa : A \text{ содержит некоторый клуб в } \kappa\}$$

является фильтром. Мы увидим, что он никогда не является ультрафильтром.

Определение

Подмножество регулярного несчётного кардинала κ **стационарно**, если оно пересекается со всеми клубами в κ.

Ясно, что все стационарные множества неограничены.

Лемма Фодора (pressing down lemma)

Пусть κ — регулярный несчётный кардинал, $S \subset \kappa$ — стационарное множество и $f : S \to \kappa$ — функция с тем свойством, что $f(\alpha) < \alpha$ для $\alpha \in S$. Тогда существуют стационарное множество $S_0 \subset S$ и ординал $\gamma \in \kappa$ такие, что $f(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$.

Доказательство. Предположим, что найдутся стационарное множество $S \subset \kappa$ и функция $f : S \to \kappa$ такие, что $f(\alpha) < \alpha$ $\forall \alpha \in S$ и для всякого $\gamma \in \kappa$ множество $f^{-1}(\gamma)$ не стационарно, т.е. не пересекается с некоторым клубом C_γ. Положим $C = \Delta_{\gamma \in \kappa} C_\gamma$. Для $\alpha \in C$ имеем $\alpha \in C_\beta$ для каждого $\beta < \alpha$, т.е. $\alpha \notin f^{-1}(\beta)$ для каждого $\beta < \alpha$. Значит, $f(\alpha) \geqslant \alpha$ — противоречие. $\square$

Теорема

Пусть κ — регулярный несчётный кардинал. Тогда для любой функции $f\colon \kappa \to \kappa$ множество

$$A = \{\alpha \in \kappa : f(\beta) < \alpha \ \forall \beta < \alpha\}$$

содержит клуб.

Доказательство. Предположим, что A не содержит целиком никакой клуб. Тогда $S = \kappa \setminus A$ стационарно. Для каждого $\alpha \in S$ положим

$$\varphi(\alpha) = \min\{\beta < \alpha : f(\beta) \geqslant \alpha\}.$$

Получили функцию $\varphi\colon S \to \kappa$ со свойством $f(\alpha) < \alpha$ для $\alpha \in S$. По лемме Фодора существуют ординал $\gamma \in \kappa$ и стационарное множество $S_0 \subset S$ такие, что $\varphi(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$. Получается, что $f(\gamma) \geqslant \alpha$ для всех $\alpha \in S_0$. Этого не может быть, так как S_0 неограничено. □

Предложение

Пусть κ — несчётный регулярный кардинал и $f : \kappa \to \kappa$ — функция с тем свойством, что прообраз $f^{-1}(\alpha)$ каждой точки $\alpha \in \kappa$ не стационарен. Тогда существует клуб C, сужение функции f на который инъективно.

Доказательство. Предположим, что множество $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ стационарно. Тогда по лемме Фодора существует стационарное множество $S \subset \kappa$, для которого $f|_S = \mathrm{const}$, а это противоречит условию. Значит, $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ нестационарно, так что множество

$$A = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \geqslant \alpha\}$$

содержит клуб. Множество

$$B = \{\alpha \in \kappa : f(\beta) < \alpha \text{ для всех } \beta < \alpha\}$$

тоже содержит клуб по доказанной раньше теореме. Пусть C — клуб, $C \subset A \cap B$. Если $\alpha, \beta \in C$, $\beta < \alpha$, то $\alpha \in B \implies f(\beta) < \alpha$ и $\alpha \in A \implies f(\alpha) \geqslant \alpha$. Значит, $f(\alpha) \neq f(\beta)$. $\square$

Можно придумать несколько естественных обобщений понятия Q-фильтра на несчётные кардиналы. Самое сильное: скажем, что фильтр $\mathscr{F}$ на κ является κ-Q-фильтром, если каково бы ни было разбиение $\kappa = \sqcup F_\alpha$, $\alpha \in \kappa$, где $|F_\alpha| < \kappa$ для всех α, существует $A \in \mathscr{F}$ со свойством $|A \cap F_\alpha| \leqslant 1$ для всех $\alpha \in \kappa$.

Все стационарные подмножества регулярного кардинала κ имеют мощность κ $\implies$

Следствие

Любой фильтр $\mathscr{F}$ на регулярном несчётном кардинале κ, содержащий $\mathrm{club}(\kappa)$, является неглавным κ-Q-фильтром.

При рассмотрении P- и селективных ультрафильтров на несчётном κ разумно ограничиться равномерными ультрафильтрами, все элементы которых имеют мощность κ — рассмотрение неравномерного ультрафильтра $\mathscr{V}$ сводится к рассмотрению равномерного ультрафильтра на меньшем кардинале $\lambda = \min\{|V| : V \in \mathscr{V}\}$.

Одно из самых слабых естественных обобщений P-ультрафильтра: скажем, что равномерный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на κ является κ-P-ультрафильтром, если для любого разбиения $\kappa = \bigsqcup_{\alpha\in\kappa} A_\alpha$, где $A_\alpha \notin \mathscr{U}$, существует $U \in \mathscr{U}$ со свойством $|U \cap A_\alpha| < \kappa\ \forall\alpha \in \kappa$.

Пусть κ регулярен, $\lambda \in \kappa$ и $U_\alpha \in \mathscr{U}$, $\alpha < \lambda$. Множества $A = \kappa \setminus U_0$, $A_0 = U_0 \setminus U_{0+1}$, ..., $A_\alpha = (\bigcap_{\beta\leqslant\alpha} U_\beta) \setminus U_{\alpha+1}$, ... вместе с одноточечными множествами $\{\gamma\}$, $\gamma \in \bigcap_{\alpha<\lambda} (U_\alpha)$, образуют разбиение множества κ, причём $A_\alpha \notin \mathscr{U}$. Пусть $U \in \mathscr{U}$, $|U \cap A_n| < \kappa$. κ регулярен $\Rightarrow |\bigcup_{\alpha<\lambda} (U \cap A_\alpha)| < \kappa$, $\mathscr{U}$ равномерен $\Rightarrow$ $\mathscr{U} \ni U \setminus \bigcup_{\alpha<\lambda} (U \cap A_\alpha) \in \mathscr{U}$. Значит, ультрафильтр $\mathscr{U}$ κ-полон, тем более счётно полон.

Рассматривая другие обобщения понятия P-ультрафильтра (включая определение обобщённого P-ультрафильтра как P-точки в подпространстве пространства $\beta\kappa$, состоящем из всех равномерных ультрафильтров), приходим к тому же выводу.

Однако существование счётно полных ультрафильтров равносильно существованию измеримых кардиналов, и его непротиворечивость системе аксиом ZFC недоказуема.

Измеримые кардиналы

Пусть X — множество и $\mathscr{P}$ — семейство его подмножеств, замкнутое относительно объединений, пересечений и дополнений. Функция $\mu\colon \mathscr{P} \to \mathbb{R}_+$ называется мерой, если она удовлетворяет условиям

1. $\mu(\varnothing) = 0$ и
2. для любых непересекающихся множеств $A, B \in \mathscr{P}$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (аддитивность).

Мы будем рассматривать нетривиальные меры на семействе $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств непустого множества X, принимающие два значения — 0 и 1. $\{0,1\}$-значная мера нетривиальна, если $\mu(X) = 1$ и $\mu(\{x\}) = 0$ для всякого $x \in X$. Такие меры находятся во взаимно однозначном соответствии с неглавными ультрафильтрами на X (элементы ультрафильтров — множества меры 1). Действительно, ясно, что множества меры 1 непусты и что если $\mu(A) = 1$ и $B \supset A$, то $\mu(B) = 1$. Пересечение любых двух множеств A и B меры 1 тоже имеет меру 1 (иначе $A \setminus (A \cap B)$ и $B \setminus (A \cap B)$ — непересекающиеся множества меры 1, и нарушается аддитивность). $\Longrightarrow$ множества меры 1 образуют фильтр. Это ультрафильтр: для любого $A \subset X$ имеем $X = A \cup X \setminus A$, поэтому либо $\mu(A) = 1$, либо $\mu(X \setminus A) = 1$.

Пусть κ — кардинал. Мера μ на множестве $\mathscr{P}(X)$ κ-аддитивна, если каковы бы ни были множество I мощности $|I| < \kappa$ и семейство попарно непересекающихся множеств $A_\iota \subset X$, $\iota \in I$, имеем $\mu(\bigcup A_\iota) = \sum \mu(A_\iota)$ (это означает, в частности, что $\mu(A_\iota)$ может равняться 1 не более чем для одного $\iota \in I$), т.е. соответствующий ультрафильтр κ-полон.

ω_1-аддитивные меры называются σ-аддитивными. Им соответствуют счётно полные ультрафильтры.

Определение

Измеримый кардинал — это несчётный кардинал такой, что на алгебре множеств $\mathscr{P}(\kappa)$ существует нетривиальная κ-аддитивная $\{0, 1\}$-значная мера.

Измеримый по Уламу кардинал — это несчётный кардинал такой, что на $\mathscr{P}(\kappa)$ существует σ-аддитивная нетривиальная $\{0, 1\}$-значная мера.

Другими словами, несчётный кардинал κ измерим, если на κ существует κ-полный неглавный ультрафильтр, и измерим по Уламу, если на κ существует счётно полный неглавный ультрафильтр.

Недостижимые кардиналы

Недостижимые кардиналы — это кардиналы, которые нельзя получить из меньших кардиналов применением теоретико-множественных операций (объединения и возведения в степень).

Определение

Несчётный кардинал κ **сильно недостижим**, или просто **недостижим**, если он регулярен и для всякого множества X мощности меньше κ выполнено неравенство $|2^X| < \kappa$.

Если выполнена *обобщённая континуум-гипотеза* $2^\kappa = \kappa^+$ для всех кардиналов κ, то всякий регулярный предельный кардинал недостижим.

Несуществование недостижимых кардиналов не противоречит системе аксиом ZFC, тогда как непротиворечивость их существования нельзя доказать в принципе — из неё вытекает непротиворечивость ZFC, которая недоказуема по второй теореме Гёделя о неполноте.

Теорема

Любой измеримый кардинал недостижим.

Доказательство. Если на кардинале $\varkappa$ существует нетривиальная $\varkappa$-аддитивная $\{0,1\}$-значная мера, то любое одноэлементное множество имеет меру 0 $\implies$ любое множество мощности $< \varkappa$ имеет меру 0 $\implies$ объединение $< \varkappa$ таких множеств имеет меру 0 $\implies$ $\varkappa$ регулярен.

Предположим, что существует $\lambda < \varkappa$, для которого $2^\lambda \geqslant \varkappa$. Отождествим $\varkappa$ с каким-нибудь множеством $K \subset 2^\lambda$ (посредством биекции). Элементы K (как и всего множества 2^λ) — это функции $\lambda \to \{0,1\}$. Для каждого $\alpha \in \lambda$ имеем

$$\mu(\{f \in K : f(\alpha) = 0\}) = 1 \quad \text{или} \quad \mu(\{f \in K : f(\alpha) = 1\}) = 1.$$

В первом случае положим $c_\alpha = 0$, во втором — $c_\alpha = 1$. В силу $\varkappa$-аддитивности меры имеем

$$\mu\Big(\bigcap\Big\{\{f \in K : f(\alpha) = c_\alpha\} : \alpha \in \lambda\Big\}\Big) = 1,$$

однако это пересечение содержит лишь одну точку — функцию $f : \alpha \mapsto c_\alpha$, $\alpha \in \lambda$. $\square$

Теорема

Наименьший измеримый по Уламу кардинал измерим.

Доказательство. Пусть κ — наименьший измеримый по Уламу кардинал и μ — σ-аддитивная $\{0,1\}$-значная мера на $\mathscr{P}(\kappa)$.

Предположим, что эта мера не κ-аддитивна. Пусть λ — кардинал, $\lambda < \kappa$, $A_\alpha \subset \kappa$ для $\alpha < \lambda$, $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$ для $\alpha \neq \beta$, $\mu(A_\alpha) = 0$ для $\alpha < \lambda$ и $\mu\big(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha\big) = 1$. Можно считать, что $\bigsqcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \kappa$ — иначе заменим A_0 на $A_0 \cup \big(\kappa \setminus \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha\big)$.

Рассмотрим отображение $f\colon \kappa \to \lambda$, определённое правилом $f(\alpha) = \beta \iff \beta \in A_\alpha$. Определим на $\mathscr{P}(\lambda)$ функцию $\tilde{\mu}$, положив $\tilde{\mu}(X) = \mu(f^{-1}(X))$ для $X \subset \lambda$. Функция $\tilde{\mu}$ является σ-аддитивной мерой на $\mathscr{P}(\lambda)$, поскольку $\tilde{\mu}(\varnothing) = \mu(f^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$ и для любых попарно непересекающихся множеств $X_n \subset \lambda$, $n \in \omega$, имеем $f^{-1}(X_i) \cap f^{-1}(X_j) = \varnothing$ для $i \neq j$, $f^{-1}(\bigcup_{n\in\omega} X_n) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(X_n)$ и

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n\in\omega} X_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(X_n)\Big) = \sum_{n\in\omega} \mu\big(f^{-1}(X_n)\big) = \sum_{n\in\omega} \tilde{\mu}(X_n).$$

Существование $\tilde{\mu}$ противоречит минимальности измеримого по Уламу кардинала κ. $\square$

Таким образом, счётно полные ультрафильтры (в частности, любые возможные обобщения P-ультрафильтров на несчётные кардиналы) существуют тогда и только тогда, когда существуют измеримые кардиналы.

Определение

Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на κ называется нормальным, если он замкнут относительно диагональных пересечений, т.е. для любого семейства $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ элементов $\mathscr{U}$ диагональное пересечение $\Delta_{\alpha\in\kappa} U_\alpha$ принадлежит $\mathscr{U}$.

Теорема

Кардинал κ измерим $\iff$ на κ существует неглавный κ-полный нормальный ультрафильтр.

Лемма

κ-полный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на кардинале κ нормален $\iff$ для любого $U \in \mathscr{U}$ и любой функции $f : U \to \kappa$ со свойством $f(\alpha) < \alpha\ \forall \alpha \in U$ существует $U_0 \in \mathscr{U}$, на котором функция f постоянна.

Доказательство. $\Rightarrow$: Предположим, что найдутся $U \in \mathscr{U}$ и функция $f : U \to \kappa$ такие, что $f(\alpha) < \alpha\ \forall \alpha \in U$ и для всякого $\gamma \in \kappa$ $f^{-1}(\gamma) \notin \mathscr{U}$. Тогда $U_\gamma = \kappa \setminus f^{-1}(\gamma) \in \mathscr{U}$. Положим $V = \Delta_{\gamma \in \kappa} U_\gamma$. Для $\alpha \in V$ имеем $\alpha \in U_\beta$ для каждого $\beta < \alpha$, т.е. $\alpha \notin f^{-1}(\beta)$ для каждого $\beta < \alpha$. Значит, $f(\alpha) \geqslant \alpha$ — противоречие.

$\Leftarrow$: Пусть $U_\alpha \in \mathscr{U}$, $\alpha \in \kappa$. Если $\Delta_{\alpha \in \kappa} U_\alpha \notin \mathscr{U}$, то положим $U = \kappa \setminus \Delta_{\alpha \in \kappa} U_\alpha$ и для каждого $\alpha \in U$ выберем $f(\alpha) < \alpha$ такое, что $\alpha \notin U_{f(\alpha)}$. Получили функцию $f : U \to \kappa$ со свойством $f(\alpha) < \alpha\ \forall \alpha \in U$. По предположению существуют $U_0 \in \mathscr{U}$ и $\gamma \in \kappa$, для которых $f|_{U_0} \equiv \gamma$. Имеем $U_\gamma \cap U_0 = \varnothing$ — противоречие. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть $\mathscr{U}$ — неглавный κ-полный ультрафильтр. Будем строить функцию $\varphi\colon \kappa \to \kappa$, для которой $\beta\varphi(\mathscr{U})$ — нормальный ультрафильтр.

Введём отношение эквивалентности между функциями $\kappa \to \kappa$:

$$f \sim g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathscr{U}.$$

Введём также отношение

$$f \preccurlyeq g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) \leqslant g(\alpha)\} \in \mathscr{U}.$$

Оно индуцирует линейный порядок на классах эквивалентности функций ($[f]_\sim \preccurlyeq_\sim [g]_\sim$, если для некоторых (любых) $f' \in [f]_\sim$ и $g' \in [g]_\sim$ имеем $f' \preccurlyeq g'$).

Предположим, что существует бесконечная последовательность $f_1 \succ f_2 \succ f_3 \succ \dots$. Положим $U_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\}$ и $U = \bigcap U_n$. $\mathscr{U}$ κ-полон $\implies$ $U \neq \varnothing$, и для $\alpha \in U$ имеем $f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \dots$ (в κ). Это противоречит тому, что порядок $\leqslant$ на κ полный (в каждом непустом множестве есть наименьший элемент). Значит, порядок $\preccurlyeq_\sim$ тоже полный.

Множество функций $f\colon \kappa \to \kappa$ со свойством

$$\{\alpha : f(\alpha) > \beta\} \in \mathscr{U} \quad \forall \beta \in \kappa \tag{$*$}$$

непусто (например, функция $\mathrm{id}_\kappa \colon \alpha \mapsto \alpha$ такова). Пусть φ — представитель наименьшего класса эквивалентности среди классов эквивалентности функций со свойством $(*)$. Положим $\mathscr{V} = \beta\varphi(\mathscr{U}) = \{V \subset \kappa : \varphi^{-1}(V) \in \mathscr{U}\}$.

Очевидно, ультрафильтр $\mathscr{V}$ κ-полон. Для каждого $\beta \in \kappa$ имеем $\{\alpha : \varphi(\alpha) > \beta\} \in \mathscr{U} \implies \varphi^{-1}(\beta) = \{\alpha : \varphi(\alpha) = \beta\} \notin \mathscr{U} \implies \{\beta\} \notin \mathscr{V}$, так что $\mathscr{V}$ неглавный.

Покажем, что $\mathscr{V}$ нормален. Согласно лемме достаточно проверить, что для любого $V \in \mathscr{V}$ любая функция $f\colon V \to \kappa$ со свойством $f(\alpha) < \alpha$ $\forall \alpha \in V$ постоянна на некотором $V_0 \in \mathscr{V}$. Пусть f — такая функция. Рассмотрим $g = f \circ \varphi$. Для всех $\alpha \in \varphi^{-1}(V) \in \mathscr{U}$ выполнено неравенство $g(\alpha) < \varphi(\alpha)$, так как $g(\alpha) = f(\varphi(\alpha))$. Значит, $g \prec \varphi$, т.е. $[g]_\sim \prec_\sim [\varphi]_\sim$. Функция φ — представитель наименьшего класса эквивалентности функции со свойством $(*)$ $\implies$ g не обладает свойством $(*)$ $\implies$ $\exists \beta \in \kappa$, для которого $\{\alpha : g(\alpha) \leqslant \beta\} \in \mathscr{U}$. $\mathscr{U}$ κ-полон, $|[0,\beta)| < \kappa \implies \exists \gamma \leqslant \beta$, для которого $U = \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in \mathscr{U}$. Имеем $V_0 = \varphi(U) \in \mathscr{V}$ и $f|_{V_0} \equiv \gamma$. $\square$

Следствие

Если существует кардинал $\varkappa$, для которого $\mathrm{club}(\varkappa)$ *— ультрафильтр, то $\varkappa$ измерим.*

Однако $\mathrm{club}(\varkappa)$ не может быть ультрафильтром даже на измеримом $\varkappa$ в силу следующего утверждения.

Предложение

Всякий регулярный кардинал $\varkappa > \omega_1$ содержит непересекающиеся стационарные множества.

Действительно, если $\mathrm{club}(\varkappa)$ — ультрафильтр, то всякое стационарное множество должно быть клубом (иначе можно его добавить и получить фильтр, строго больший $\mathrm{club}(\varkappa)$). Однако мы знаем, что любые два клуба пересекаются.

Предложение проще всего доказать с помощью понятия конфинальности $\mathrm{cf}(\alpha)$ предельного ординала α — это наименьший ординал γ, для которого существуют ординалы β_ξ, $\xi < \gamma$, такие, что $\beta_\xi < \beta_\zeta < \alpha$ для $\xi < \zeta < \gamma$ и $\alpha = \sup\limits_{\xi \in \gamma} \beta_\xi$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{\omega}$ супремум всех ординалов $n \in \kappa$, для которых луч $[0, n)$ конечен, и через $\tilde{\omega}_1$ — супремум всех $\alpha \in \kappa$, для которых $[0, \alpha)$ счётен.

Пусть C — клуб в κ. Возьмём $\beta_0 \in C$ и, пользуясь неограниченностью C, выберем по индукции возрастающую последовательность ординалов $\beta_n \in C$, $n < \tilde{\omega}$. Положим $\alpha = \sup \beta_n$. Поскольку α предельный, он не является супремумом никакой конечной последовательности ординалов, поэтому $\mathrm{cf}(\alpha) = \tilde{\omega}$. Значит, любой клуб содержит ординал α с $\mathrm{cf}(\alpha) = \tilde{\omega}$.

Снова возьмём $\beta_0 \in C$ и выберем по трансфинитной индукции возрастающую $\tilde{\omega}_1$-последовательность ординалов $\beta_\gamma \in C$, $\gamma < \tilde{\omega}_1$ (она существует, так как $|C| = \kappa > \omega_1$). Положим $\alpha = \sup \beta_\gamma$. Предположим, что $\exists$ возрастающая последовательность ординалов λ_n, $n < \tilde{\omega}$, для которой $\alpha = \sup \lambda_n$. $\alpha = \sup \beta_\gamma \implies \forall n < \tilde{\omega}$ $\exists \gamma_n < \tilde{\omega}_1$ такой, что $\beta_{\gamma_n} > \lambda_n$. Положим $\gamma^* = \sup \gamma_n$. Луч $[0, \gamma^*)$ счётен, поскольку все $[0, \gamma_n)$ счётны (так как $\gamma_n < \tilde{\omega}_1$) $\implies$ $\gamma^* < \tilde{\omega}_1 \implies \alpha > \beta_{\gamma^*}$. С другой стороны, $\beta_{\gamma^*} > \lambda_n$ для всех $n < \tilde{\omega} \implies \beta_{\gamma^*} \geqslant \sup \lambda_n = \alpha$. Это противоречие показывает, что $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$. Значит, любой клуб содержит ординал α с $\mathrm{cf}(\alpha) > \tilde{\omega}$.

Следовательно, множества $\{\alpha \in \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \tilde{\omega}\}$ и $\{\alpha \in \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) > \tilde{\omega}\}$ стационарны, и они не пересекаются. □

На самом деле и в ω_1 есть семейство попарно непересекающихся стационарных множеств, причём несчётное.

Теорема (Улам)

Пусть κ — любой бесконечный кардинал.

Всякое стационарное подмножество кардинала κ^+ можно представить как объединение κ^+ штук попарно непересекающихся стационарных множеств.

Определение

Пусть κ — кардинал. Будем трактовать его как $[0, \kappa) \subset \kappa^+$. Для каждого $\beta \in \kappa^+$ зафиксируем инъекцию $f_\beta \colon [0, \beta) \to [0, \kappa)$. Для $\iota < \kappa$ и $\alpha \in \kappa^+$ положим

$$A^\iota_\alpha = \{\beta \in \kappa^+ : \alpha < \beta \text{ и } f_\beta(\alpha) = \iota\}.$$

Получившееся семейство множеств A^ι_α, $\iota < \kappa$, $\alpha \in \kappa^+$, называется матрицей Улама на κ^+.

Свойства матрицы Улама:

1. Если $\iota \neq \eta$, то $A^\iota_\alpha \cap A^\eta_\alpha = \varnothing$ для всякого $\alpha \in \kappa^+$.
2. Если $\alpha \neq \gamma$, то $A^\iota_\alpha \cap A^\iota_\gamma = \varnothing$ для всякого $\iota < \kappa$, потому что все f_β инъективны.
3. $\bigcup\limits_{\iota\in\kappa} A^\iota_\alpha = \{\beta \in \kappa^+ : \alpha < \beta\}$ для каждого $\alpha \in \kappa^+$.

Доказательство теоремы Улама. Для $\alpha < \kappa^+$ положим

$$\operatorname{stat}(\alpha) = \{\iota < \kappa : A^\iota_\alpha \text{ стационарно}\}.$$

Свойство ③ $\implies$ $\operatorname{stat}(\alpha) \neq \varnothing$ $\forall \alpha \in \kappa^+$.

Множество $\bigcup_{\iota\in\operatorname{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$ содержит клуб $\forall\alpha$. Действительно, иначе множество $\bigcup_{\iota\notin\operatorname{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$ стационарно. Для $\iota \notin \operatorname{stat}(\alpha)$ пусть C_ι — клуб, не пересекающий A^ι_α. Кадинал κ^+ регулярен $\implies$ фильтр $\operatorname{club}(\kappa^+)$ κ^+-полон $\implies$ $C = \bigcap_{\iota\notin\operatorname{stat}(\alpha)} C_\iota$ — клуб, однако C не пересекает множество $\bigcup_{\iota\notin\operatorname{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$, которое по предположению стационарно.

Свойства ① и ② и κ^+-полнота фильтра $\operatorname{club}(\kappa^+)$ $\implies$ существует $\iota < \kappa$, для которого $|\{\alpha : \iota \in \operatorname{stat}(\alpha)\}| = \kappa^+$. $\square$

Скажем, что ультрафильтр $\mathscr{U}$ на κ селективен, если каково бы ни было разбиение $\kappa = \sqcup A_\alpha$, $\alpha \in \kappa$, где $|A_\alpha| \notin \mathscr{U}$ для всех α, существует $U \in \mathscr{U}$ со свойством $|U \cap A_\alpha| \leqslant 1$ для всех $\alpha \in \kappa$. Мы видели при рассмотрении обобщений P-ультрафильтров, что из этого свойства следует κ-полнота ультрафильтра $\mathscr{U}$.

Скажем, что ультрафильтр на κ рамсеевский, если для любой раскраски $c\colon [\kappa]^2 \to \{0, 1\}$ существует однородный элемент ультрафильтра. Известно, что всякий κ-полный нормальный ультрафильтр на κ является рамсеевским $\Longrightarrow$

Следствие

На всяком измеримом кардинале существует рамсеевский ультрафильтр.