

Ультрафильтры

Ольга Викторовна Сипачева
Кафедра общей топологии и геометрии
`o-sipa@yandex.ru`

Система аксиом ZFC

Аксиома существования: множества существуют.

(В виде формулы эта аксиома может выглядеть так: $\exists x(x = x)$.)

Аксиома объёмности: два множества равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы, т.е. каждый элемент одного множества принадлежит другому и наоборот.

Аксиома пары: для любых множеств x и y существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — x и y (*неупорядоченная пара* элементов x и y).

Аксиома объединения: для любого множества x существует множество $y = \bigcup x$ — объединение множеств-элементов x ; его элементами являются в точности все элементы элементов множества x .

Схема аксиом выделения: любому множеству x и любому свойству φ отвечает множество, состоящее в точности из тех элементов множества x , которые обладают свойством φ .

Из схемы аксиом выделения и аксиомы существования вытекает существование **пустого множества**, не имеющего вообще никаких элементов (оно обозначается $\emptyset$): достаточно в качестве $\varphi(t)$ взять $\neg(t = t)$.

Множество всех $y \in x$, обладающих свойством φ , обозначается $\{y \in x : \varphi(y)\}$. Когда рассматриваются элементы фиксированного множества x , иногда пишут $\{y : \varphi(y)\}$.

Схема аксиом подстановки: если $\varphi(u, v)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества a существует единственное множество b такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества x определено множество y , элементами которого являются те и только те множества z , для которых $\varphi(a, z)$ истинно при некотором $a \in x$.

Здесь формулу φ можно воспринимать как класс-отображение, которое каждому a ставит в соответствие то единственное множество b , для которого высказывание $\varphi(a, b)$ истинно; тогда y — не что иное как образ множества x при этом «отображении».

Аксиома бесконечности: существует множество, которое содержит (в качестве элемента) $\emptyset$ и вместе с каждым элементом x содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$ ($x \cup \{x\}$ — множество, элементами которого являются все элементы множества x и само множество x).

Аксиома множества подмножеств: для любого множества x существует множество y , состоящее из всех подмножеств множества x ; для него используются обозначения $\mathcal{P}(x)$, 2^x и $\exp x$.

Аксиома регулярности: каждое непустое множество x содержит элемент y такой, что $x \cap y = \emptyset$.

Аксиома выбора: для каждого множества x , состоящего из непересекающихся непустых элементов, существует множество, которое пересекается с каждым элементом множества x ровно по одному элементу.

Частичный порядок, или просто **порядок**, на множестве X — это подмножество $\leq$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами (мы пишем $x \leq y$ вместо $(x, y) \in \leq$; кроме того, мы иногда пишем $y \geq x$ вместо $x \leq y$):

- $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \rightarrow (x \leq z)$ (**транзитивность**);
- $\forall x \in X (x \leq x)$ (**рефлексивность**);
- $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \rightarrow (x = y)$ (**антисимметричность**).

Множество X вместе с заданным на нём порядком (т.е. пара $(X, \leq)$) называется (**частично**) **упорядоченным множеством**; про множество X говорят, что оно (**частично**) **упорядочено отношением $\leq$** . Запись $x \leq y$ читается «элемент x не больше элемента y » или «элемент x не превосходит элемента y », а запись $x \geq y$ — «элемент x не меньше элемента y ».

Для каждого порядка $\leq$ на X однозначно определено соответствующее отношение $<$ **строгого порядка**: $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$. При этом говорят, что элемент x **меньше** элемента y , а y **больше** x . И наоборот, по строгому порядку $<$ очевидным образом восстанавливается порядок $\leq$, которому он соответствует.

Два элемента x и y множества X , упорядоченного отношением $\leq$, **сравнимы**, если либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Говорят, что $y \in X$ лежит **между** $x \in X$ и $z \in X$, если $x \leq y \leq z$. Элемент x множества $Y \subset X$ называется **минимальным** (**максимальным**) элементом этого множества, если $\forall y \in Y ((y \leq x) \rightarrow (y = x))$ (соответственно $\forall y \in Y ((x \leq y) \rightarrow (y = x))$). Элемент x **ограничивает** множество $Y \subset X$ **сверху** (**снизу**), или является **верхней** (**нижней**) **гранью** множества Y , если $\forall y \in Y (y \leq x)$ (соответственно $\forall y \in Y (x \leq y)$). Если при этом x принадлежит множеству Y , то он называется **наименьшим** (**наибольшим**) элементом Y и обозначается $\min Y$ ($\max Y$). Множество, у которого есть верхняя (нижняя, верхняя и нижняя) грань называется **ограниченным сверху** (**ограниченным снизу**, **ограниченным**). Наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) грань множества Y , если она существует, называется также **точной верхней** (**нижней**) **гранью**, или **супремумом** (**инфимумом**), множества Y и обозначается $\sup Y$ ($\inf Y$).

Интервалом упорядоченного множества $(X, \leq)$ называется любое его подмножество I с тем свойством, что для любых $x, y \in I$ всякий элемент $z \in X$ между x и y принадлежит I . Интервалы бывают восьми типов:

$$\text{а) } \{x : x \leq a\}, \quad \text{д) } \{x : a \leq x \leq b\} = [a, b],$$

$$\text{б) } \{x : x < a\}, \quad \text{е) } \{x : a < x < b\} = (a, b),$$

$$\text{в) } \{x : a \leq x\}, \quad \text{ё) } \{x : a \leq x < b\} = [a, b),$$

$$\text{г) } \{x : a < x\}, \quad \text{ж) } \{x : a < x \leq b\} = (a, b],$$

где $a, b \in I$. Интервалы типов а), в) и д) называются **замкнутыми**, интервалы типов б), г) и е) — **открытыми**, а интервалы типов ё) и ж) — **полуоткрытыми интервалами**, а иногда просто **полуинтервалами**. Интервалы типов а)–г) называют **лучами**, а интервалы типов д)–ж) — **ограниченными интервалами** (хотя если множество $(X, \leq)$ содержит наименьший или наибольший элемент, лучи тоже могут быть ограниченными). Интервалы типов а) и б) называют также **начальными интервалами**.

Порядок $\leq$ на X называется **линейным**, если любые два элемента x и y множества X сравнимы. В этом случае пара $(X, \leq)$ называется **линейно упорядоченным множеством**, а пара $(X, <)$ — **строго линейно упорядоченным множеством**.

Порядок $\leq$ на X **полон**, если он линейен и любое непустое множество $Y \subset X$ содержит наименьший (в Y) элемент. Пара $(X, \leq)$, где $\leq$ — полный порядок, называется **вполне упорядоченным множеством**, а пара $(X, <)$ — **строго вполне упорядоченным множеством**. Всякое непустое вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент (хотя наибольший элемент существовать не обязан), и для всякого его элемента, который не является наибольшим, определён элемент, непосредственно следующий за ним.

На каждом подмножестве Y упорядоченного множества $(X, \leq)$ естественно возникает **индуцированный** порядок, или **сужение** порядка $\leq$ на Y — это пересечение порядка $\leq$ (который является подмножеством $X \times X$) с $Y \times Y$. Как легко видеть, индуцированный порядок линейен или полон, если таковым является порядок $\leq$ на X . В дальнейшем, рассматривая подмножества упорядоченных множеств, мы всегда будем считать, что они снабжены индуцированным порядком.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ между упорядоченными множествами $(X, \leq)$ и $(Y, \preceq)$ называется **порядковым изоморфизмом**, а сами эти упорядоченные множества — **порядково изоморфными**, если f взаимно однозначно и для любых $x, y \in X$ соотношение $x \leq y$ выполнено тогда и только тогда, когда $f(x) \preceq f(y)$. В случае линейно упорядоченных множеств любая изотонная (т.е. сохраняющая порядок, «монотонно неубывающая») биекция является порядковым изоморфизмом.

Теорема Цермело и лемма Цорна

Теорема Цермело

Любое множество можно вполне упорядочить.

Лемма Цорна

Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества $Y \subset X$, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в X есть максимальный элемент.

Понятие вполне упорядоченного множества и теорема Цермело позволяют распространить метод математической индукции на произвольные множества. Пусть X — любое непустое множество и $\varphi(x)$ — любое высказывание об элементах X . Предположим, что нам удалось ввести полный порядок $\leq$ на X так, что мы умеем доказывать $\varphi(x_0)$ для наименьшего элемента x_0 и умеем выводить утверждение $\varphi(x)$ из утверждения « $\varphi(y)$ верно для всех $y < x$ ». Тогда мы смело можем утверждать, что утверждение $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$. Действительно, если это не так, т.е. если множество $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\}$ непусто, то мы можем взять наименьший элемент в этом множестве и сразу получить противоречие.

Теорема об изоморфизме

Пусть $(X, \leq)$ и $(Y, \preceq)$ — любые вполне упорядоченные множества. Тогда либо существует $x_* \in X$ такой, что начальный интервал $\{x \in X : x < x_*\}$ множества X порядково изоморфен вполне упорядоченному множеству Y , либо существует $y_* \in Y$ такой, что вполне упорядоченное множество X порядково изоморфно начальному интервалу $\{y \in Y : y \prec y_*\}$ множества Y , либо сами множества $(X, \leq)$ и $(Y, \preceq)$ порядково изоморфны.

Мощность множества X обозначается $|X|$. Два множества X и Y называются **равномощными**, если существует биекция между ними; в этом случае говорят ещё, что мощности X и Y равны, и пишут $|X| = |Y|$. В наивной (канторовской) теории множеств мощность $|X|$ множества X понимается как класс всех множеств Y , для которых существует биекция $X \rightleftharpoons Y$.

Мощности множеств можно сравнивать: $|X| \leq |Y|$, если X равномощно подмножеству Y , т.е. если существует инъекция из X в Y (или, что равносильно, сюръекция из Y на X). Хорошо известная теорема Кантора–Бернштейна гласит, что если $|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |X|$, то $|X| = |Y|$.

Кантор называл мощности множеств **кардиналами** и обозначал бесконечные кардиналы буквой $\aleph$ («алеф», первая буква еврейского алфавита) с индексами; индексы были упорядочены так, что бóльшим индексам соответствовали бóльшие кардиналы. Самый маленький алеф — это $\aleph_0$ (мощность множества натуральных чисел). Все множества мощности $\aleph_0$ (т.е. находящиеся во взаимно однозначном соответствии с множеством натуральных чисел) называются **счётными**, а не являющиеся счётными бесконечные множества называются **несчётными**. Наименьшая мощность несчётного множества обозначается $\aleph_1$, наименьшая мощность, бóльшая $\aleph_1$, обозначается $\aleph_2$ и т.д.

Чем индексировать кардиналы?

Чтобы ответить на этот вопрос, вдобавок ко взаимно однозначным соответствиям между множествами Кантор рассмотрел порядковые изоморфизмы между вполне упорядоченными множествами. Классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств он назвал **порядковыми типами**, или **ординалами**.

Теорема об изоморфизме для вполне упорядоченных множеств даёт прекрасный инструмент для сравнения ординалов — достаточно заметить, что никакое вполне упорядоченное множество $(X, \leq)$ не изоморфно никакому своему собственному начальному интервалу $\{x \in X : x < x^*\}$, где $x^* \in X$. После этого останется лишь объявить, что порядковый тип вполне упорядоченного множества $(X, \leq)$ меньше порядкового типа вполне упорядоченного множества $(Y, \leq)$, если $(X, \leq)$ порядково изоморфно начальному интервалу множества $(Y, \leq)$. Именно ординалами Кантор и индексировал алефы.

В современной (аксиоматической) теории множеств теория кардиналов и ординалов вполне формализована. Под ординалами понимаются не классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств, а конкретные вполне упорядоченные множества. В определении ординала фигурирует понятие транзитивности: множество X **транзитивно**, если каждый элемент x является его подмножеством; иными словами, для каждого $y \in x$ все элементы множества y являются также элементами X . **Ординал** (другие названия — **порядковый тип** и **порядковое число**) — это любое транзитивное множество, строго вполне упорядоченное отношением $\in$. Соответствующий нестрогий порядок обозначается стандартным символом $\leq$, а сами ординалы обычно обозначаются первыми буквами греческого алфавита.

Из определения видно, что каждый элемент ординала сам является ординалом: если α — ординал и $\beta \in \alpha$, то β — тоже ординал, причём $\beta = \{\gamma \in \alpha : \gamma < \beta\}$. Иными словами, любой элемент ординала является начальным интервалом этого ординала и наоборот.

Из теоремы об изоморфизме для вполне упорядоченных множеств вытекает, что если α и β — два неизоморфных ординала, то либо один из них изоморфен начальному интервалу (= элементу) другого, либо наоборот. Легко видеть, что в данном случае изоморфизм означает равенство: если α и β — два разных ординала, то либо $\alpha \in \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Таким образом, отношение $\in$ (и $\leq$) упорядочивает не только сами ординалы, но и позволяет сравнивать любые ординалы друг с другом; допуская некоторую вольность, можно сказать, что это отношение является порядком на классе всех ординалов.

Итак, для любых двух ординалов α и β либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$, причём записи $\alpha < \beta$ и $\alpha \in \beta$ означают ровно одно и то же, а запись $\alpha \leq \beta$ означает, что либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$. Кроме того, в силу аксиомы регулярности в любом непустом множестве ординалов имеется наименьший элемент, т.е. класс ординалов строго вполне упорядочен отношением $\in$.

Из теоремы Цермело и того, что всякое вполне упорядоченное множество изоморфно ординалу, следует, что мощность любого множества равна мощности некоторого ординала, а значит, и мощности некоторого ω_α . Отсюда немедленно вытекает сравнимость мощностей любых множеств и существование наименьшего несчётного кардинала $\aleph_1$ (а также и существование всех прочих алефов). В современной теории множеств кардиналы (мощности множеств) определяются как ординалы вида ω_α ; другими словами, **кардинал** — это любой ординал α с тем свойством, что мощность всякого ординала $\beta < \alpha$ меньше мощности α , т.е. никакой ординал $\beta < \alpha$ нельзя сюръективно отобразить на α ; можно ещё сказать, что ординал является кардиналом, если он равен своей собственной мощности.

Таким образом, символы ω_α и обозначают одно и то же, и сейчас ω_α используются для обозначения кардиналов даже чаще, чем $\aleph_\alpha$ (хотя использовать $\aleph_\alpha$ для обозначения соответствующих ординалов, когда они рассматриваются именно как ординалы, а не кардиналы, не принято). Итак, кардиналы — это конкретные ординалы, и класс всех кардиналов вполне упорядочен тем же отношением $\leq$, что и ординалы. Кардиналы обычно обозначаются буквами из середины греческого алфавита или алефом с индексами. Кардиналы отличаются от ординалов арифметикой.

Фильтры и ультрафильтры

Определение

Центрированное семейство множеств — это любое семейство $\mathcal{C}$ с тем свойством, что пересечение любого конечного множества его элементов непусто: если $n \in \mathbb{N}$ и $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$, то $C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$.

Определение

Фильтром на множестве X называется непустое семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

- 1 $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- 2 если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$ (а значит, и любое конечное пересечение элементов $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$);
- 3 если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathcal{F}$. В частности, $X \in \mathcal{F}$.

Фильтр $\mathcal{F}$ называется **свободным**, если $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ является **базой** фильтра $\mathcal{F}$, если любое множество $F \in \mathcal{F}$ содержит множество $B \in \mathcal{B}$.

Определение

Максимальный (по включению) фильтр называется **ультрафильтром**.

Ультрафильтр $\mathcal{U}$ называется **главным**, если $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Теорема

Любое центрированное семейство $\mathcal{C}$ на произвольном множестве X содержится в некотором ультрафильтре $\mathcal{U}$ на X .

Доказательство. Упорядочим множество $\mathfrak{C}$ всех центрированных семейств на X , содержащих $\mathcal{C}$, отношением включения $\subset$. Если $\mathfrak{L}$ — любое линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{C}$, то $\bigcup \mathfrak{L}$ — центрированное семейство: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $F_1, \dots, F_n \in \bigcup \mathfrak{L}$ найдутся $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \in \mathfrak{L}$ такие, что $F_i \in \mathcal{F}_i$ для $i \leq n$, и поскольку $\mathfrak{L}$ линейно упорядочено, без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n$ (иначе перенумеруем $F_1, \dots, F_n$). Значит, $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_n$, так что $\bigcap F_i \neq \emptyset$.

По лемме Цорна существует максимальное центрированное семейство $\mathcal{U}$, содержащее $\mathcal{C}$. Ясно, что $\mathcal{U}$ — ультрафильтр. □

Теорема (основное свойство ультрафильтров)

Фильтр $\mathcal{F}$ на множестве X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{F}$ — ультрафильтр на X , и пусть $A \subset X$. Если $F \setminus A = \emptyset$ для некоторого $F \in \mathcal{F}$, то $F \subset A$, так что $A \in \mathcal{F}$. Предположим, что для любого $F \in \mathcal{F}$ имеем $F \setminus A \neq \emptyset$. Если $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, то

$$(F_1 \setminus A) \cap \dots \cap (F_n \setminus A) = (F_1 \cap \dots \cap F_n) \setminus A \neq \emptyset,$$

т.е. семейство $\{F \setminus A : F \in \mathcal{F}\}$ центрировано. Оно содержится в некотором ультрафильтре $\mathcal{U}$ на X . Для каждого $F \in \mathcal{F}$ имеем $F \setminus A \in \mathcal{U}$ и, значит, $F \in \mathcal{U}$. Следовательно, $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, и из максимальной $\mathcal{F}$ вытекает, что $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

Осталось заметить, что $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр с тем свойством, что для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо $X \setminus A \in \mathcal{F}$, и пусть $\mathcal{U}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F} \neq \mathcal{U}$, то найдется $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$. По предположению $X \setminus A \in \mathcal{F}$, а поскольку $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, имеем $X \setminus A \in \mathcal{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathcal{U}$. Значит, $\mathcal{F} = \mathcal{U}$, так что $\mathcal{F}$ — ультрафильтр. □

Следствие (основное свойство ультрафильтров)

Если $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве X , $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_m \subset X$ и существует $A \in \mathcal{U}$ такой, что $A \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$, то $A_i \in \mathcal{U}$ для некоторого $i \leq m$. В частности, если $A_1, \dots, A_m$ — любые подмножества X со свойством $A_1 \cup \dots \cup A_m = X$, то $A_i \in \mathcal{U}$ для некоторого $i \leq m$.

Доказательство. Предположим, что $A_i \notin \mathcal{U}$ для всех $i \leq m$. Тогда по доказанной теореме $X \setminus A_i \in \mathcal{U}$ для $i \leq m$. Значит, $(X \setminus A_1) \cap \dots \cap (X \setminus A_m) = X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m) \in \mathcal{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathcal{U}$ и $A \cap (X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m)) = \emptyset$. □

Отображения фильтров

Определение

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — любое отображение и $\mathcal{F}$ — любой фильтр на X . Семейство множеств $\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\} = \{A \subset Y : \exists F \in \mathcal{F} (f(F) \subset A)\}$ называется **образом фильтра** $\mathcal{F}$ при отображении f .

Предложение

Образ любого фильтра при любом отображении является фильтром. Образ любого ультрафильтра при любом отображении является ультрафильтром.

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — любое отображение, и пусть $\mathcal{F}$ — фильтр на X . То, что образ $\mathcal{F}$ при отображении f является фильтром, ясно: выполнение условий ① и ③ из определения фильтра очевидно, а выполнение условия ② вытекает из того, что $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ для любых множеств $A, B \subset Y$. Если при этом $\mathcal{F}$ является ультрафильтром, то из основного свойства ультрафильтров и очевидного равенства $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus (f^{-1}(A))$ следует, что образ $\mathcal{F}$ тоже является ультрафильтром. □

Определение

Фильтр $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве X **сходится** к некоторой точке $x \in X$, если любая окрестность этой точки принадлежит $\mathcal{F}$. Для сходимости $\mathcal{F}$ к x используется обозначение $\mathcal{F} \rightarrow x$. Фильтр **сходится**, или является **сходящимся**, если он сходится к некоторой точке.

Теорема

Для топологического пространства X , множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ следующие условия равносильны:

- а) x является точкой прикосновения множества A ;
- б) существует фильтр $\mathcal{F}$ на X , который содержит A и сходится к x ;
- в) существует ультрафильтр $\mathcal{U}$ на X , который содержит A и сходится к x .

Доказательство. а) $\Rightarrow$ в): Семейство $\mathcal{B}(x)$ всех окрестностей точки x в X центрировано. Поскольку x — точка прикосновения множества A , семейство $\{A \cap U : U \in \mathcal{B}(x)\}$ тоже центрировано и, значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathcal{U}$. Из свойства ③ вытекает, что $\mathcal{U}$ содержит как все окрестности x (а значит, $\mathcal{U} \rightarrow x$), так и множество A .

в) $\Rightarrow$ б): тривиально.

б) $\Rightarrow$ а): Поскольку фильтр $\mathcal{F}$ сходится к точке x , он содержит все окрестности x . То, что он содержит также и множество A , означает, что пересечение A с любой окрестностью x непусто (в силу свойства ①), т.е. x является точкой прикосновения множества A .



Теорема

Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда образ при f любого ультрафильтра, сходящегося к x , сходится к $f(x)$.

Следствие

Отображение топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда образ при этом отображении любого сходящегося ультрафильтра сходится.

Доказательство теоремы. Предположим, что образ при f любого сходящегося к точке $x \in X$ ультрафильтра сходится к $f(x)$. Пусть V — любая окрестность точки $f(x)$. Если её прообраз $f^{-1}(V)$ не является окрестностью (= не содержит ни одной окрестности) точки x в X , то семейство

$$\mathcal{F} = \{X \setminus f^{-1}(V)\} \cup \{U : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

центрировано, а значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathcal{U}$ на X . Этот ультрафильтр сходится к точке x , значит, его образ $\beta f(\mathcal{U})$ должен сходиться к $f(x)$. Однако $X \setminus f^{-1}(V) \in \mathcal{U} \implies f(X \setminus f^{-1}(V)) = Y \setminus V \in \beta f(\mathcal{U}) \implies V \notin \beta f(\mathcal{U})$. Это противоречие показывает, что $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x в X , т.е. f непрерывно в x .

Обратно, пусть f непрерывно в $x \in X$. Рассмотрим любой ультрафильтр $\mathcal{U}$ на X , сходящийся к x . Если $\beta f(\mathcal{U})$ на Y не сходится к $f(x)$, то у этой точки есть окрестность $V \notin \beta f(\mathcal{U})$. По основному свойству ультрафильтров имеем $Y \setminus V \in \beta f(\mathcal{U})$, а по определению отображения ультрафильтров βf

$$f^{-1}(X \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$$

в противоречие с тем, что $\mathcal{U} \rightarrow x$ и $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x .



Определение

Пусть X — произвольное множество и $Y \subset X$. **Покрыв**ие множества Y — это любое индексированное семейство $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств X , которое **покрывает** Y , т.е. удовлетворяет условию $\bigcup \mathcal{C} \supset Y$.

Если X — топологическое пространство и покрытие состоит из открытых (замкнутых, открыто-замкнутых) множеств, то его называют **открытым** (**замкнутым**, **открыто-замкнутым**) покрытием.

Пусть $\mathcal{C}'$ — ещё одно покрытие множества Y . Говорят, что $\mathcal{C}'$ **вписано** в $\mathcal{C}$, и пишут $\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}$ или $\mathcal{C}' \prec \mathcal{C}$, если всякий элемент C' покрытия $\mathcal{C}'$ содержится в некотором $C \in \mathcal{C}$.

Частный случай вписанного покрытия — подпокрытие: семейство $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ называется **подпокрытием** покрытия $\mathcal{C}$, если оно само является покрытием, т.е. $\bigcup \mathcal{C}' \supset Y$.

Иногда вместо покрытия множества X удобнее рассматривать двойственное семейство, состоящее из всех дополнений до элементов покрытия. Из законов де Моргана немедленно вытекает, что семейство $\mathcal{C}$ подмножеств X является покрытием множества X тогда и только тогда, когда двойственное семейство $\mathcal{F} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$ имеет пустое пересечение.

Определение

Топологическое пространство **компактно**, если любое его открытое покрытие содержит конечное открытое подпокрытие. Хаусдорфовы компактные пространства называются **компактами**.

Определение (равносильное)

Топологическое пространство **компактно**, если любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

Предложение

Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{B}$ — любая база его топологии. Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любое открытое покрытие X элементами базы $\mathcal{B}$ содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. В доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — любое открытое покрытие X . Для каждой точки $x \in X$ выберем элемент $U_{\alpha(x)}$ покрытия $\mathcal{U}$, содержащий эту точку, и зафиксируем элемент базы $V_x \in \mathcal{B}$, который содержит точку x и содержится в выбранном элементе покрытия $U_{\alpha(x)}$. Семейство $\{V_x : x \in X\}$ представляет собой открытое покрытие пространства X элементами $\mathcal{B}$. По предположению оно содержит конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$. Поскольку каждое множество V_{x_i} содержится в соответствующем $U_{\alpha(x_i)}$, имеем $U_{\alpha(x_1)} \cup \dots \cup U_{\alpha(x_n)} = X$, так что $\{U_{\alpha(x_1)}, \dots, U_{\alpha(x_n)}\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathcal{U}$. □

Теорема

Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве X сходится.

Доказательство

Необходимость. $\exists$ ультрафильтр $\mathcal{U}$ на X , который не сходится ни к одной точке $x \in X \iff \forall x \in X \exists$ открытая окрестность $U_x \notin \mathcal{U}$. Окрестности U_x образуют открытое покрытие компактного пространства X ; пусть $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ — его конечное подпокрытие. В силу основного свойства ультрафильтров имеем $U_{x_i} \in \mathcal{U}$ для некоторого $i \leq m$, однако по построению $U_{x_i} \notin \mathcal{U}$ для всех i . Значит, ультрафильтра, который не сходится ни к какой точке, существовать не может.

Достаточность. Если существует открытое покрытие $\mathcal{V}$ пространства X , которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathcal{F} = \{X \setminus V : V \in \mathcal{V}\}$ центрировано. Оно содержится в ультрафильтре $\mathcal{U}$ на X . По условию $\mathcal{U}$ сходится к некоторой точке x . Пусть $x \in V \in \mathcal{V}$. Тогда $V \in \mathcal{U}$, поскольку $\mathcal{U} \rightarrow x$, и $X \setminus V \in \mathcal{U}$ по определению семейства $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Этого быть не может по свойствам ① и ②. Значит, всякое открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие. □

Декартово произведение произвольного семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — это множество

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : \forall \alpha \in A (f(\alpha) \in X_\alpha)\},$$

и элементы $f: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ принято записывать в виде $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где для каждого $\alpha \in A$ $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ — α -я координата элемента $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Каноническая проекция произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на сомножитель X_β , где $\beta \in A$, — это отображение $\pi_\beta: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Диагональное произведение, или **диагональ**, семейства отображений $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — это отображение $f = \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha: X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, определённое правилом $f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in A}$.

В случае, когда множества X_α снабжены топологией, естественно попытаться определить каким-нибудь очевидным образом топологию и на произведении $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Первое, что приходит в голову — объявить базой топологии X всевозможные произведения вида $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, где каждое U_α открыто в X_α .

Топология, которая получается в результате, называется **ящичной топологией**, и произведение X с этой топологией обозначается $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Однако такой способ определения топологии не вполне удачен — произведение бесконечного числа неметризуемых пространств редко обладает хорошими свойствами. Например, такое произведение никогда не бывает метризуемым (и даже никогда не удовлетворяет первой аксиоме счётности), редко бывает связным, никогда не сепарабельно и т.п. (Зато с использованием ящичных произведений было построено множество полезных контрпримеров в топологии.) Кроме того, диагональное произведение непрерывных отображений не всегда непрерывно относительно ящичной топологии, а его непрерывность очень важна.

Помимо всего прочего, произведение топологических пространств с ящичной топологией не является произведением в смысле теории категорий.

Категория определяется аксиоматически как класс объектов, связанных морфизмами («стрелками»), удовлетворяющими естественным условиям (существование и ассоциативность композиции морфизмов и существование тождественных морфизмов). Категории придумали, чтобы рассматривать конструкции, отношения и отображения, сохраняющие структуру математических объектов, независимо от того, что это за объекты и какова их структура. Обычно (но не всегда) роль объектов играют множества, а роль морфизмов — отображения множеств. Например, в категории множеств объекты — это произвольные множества, а морфизмы — любые отображения множеств, в категории топологических пространств объекты — топологические пространства, а морфизмы — непрерывные отображения, а в категории групп объекты — группы, а морфизмы — групповые гомоморфизмы.

В теории категорий произведение объектов X_α , $\alpha \in A$, определяется как объект X вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ (называемых **каноническими проекциями**) с тем свойством, что для любого объекта Y этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ существует единственный морфизм $f: Y \rightarrow X$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow f & \downarrow \pi_\alpha \\ Y & \xrightarrow{f_\alpha} & X_\alpha \end{array}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ диагональное произведение

$\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha: Y \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

Обычно произведения топологических пространств рассматриваются с топологией, которая называется **топологией произведения**, или **тихоновской топологией**, и определяется как самая слабая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны. Такая топология существует на произведении любого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ топологических пространств; она порождена предбазой, состоящей из всех множеств вида

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\beta \in U_\beta\},$$

где $\beta \in A$ — любой фиксированный индекс, а U_β — любое открытое множество в X_β . Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются **топологическими**, или **тихоновскими произведениями**. Иногда, особенно если речь идёт о пространствах функций, т.е. подпространствах произведений вида $\mathbb{R}^X$, топологию произведения называют **топологией поточечной сходимости**: последовательность функций $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, определённых на X , поточечно сходится к функции f , если для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ найдётся $N(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $n > N(x)$, а это как раз и означает сходимость в тихоновской топологии.

Предложение

Для любого семейства пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ все множества вида $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, где каждое U_α — открытое подмножество X_α и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, индексов α , образуют базу топологического произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Доказательство. Из определения тихоновской топологии вытекает, что семейство всех множеств вида $\bigcap_{i \leq k} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ и каждое U_{α_i} открыто в X_{α_i} , является базой топологического произведения $\prod X_\alpha$. Поэтому для доказательства утверждения достаточно заметить, что для любых $\beta \in A$ и $U_\beta \subset X_\beta$

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\beta \in U_\beta\} = \prod U_\alpha, \quad \text{где } U_\alpha = X_\alpha \text{ для } \alpha \neq \beta,$$

и что $\prod A_\alpha \cap \prod B_\alpha = \prod (A_\alpha \cap B_\alpha)$ для любых $A_\alpha, B_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$.



Следствие

Если для каждого α зафиксирована некоторая база $\mathcal{B}_\alpha$ пространства X_α , то множества вида $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, где $U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ для конечного числа индексов α и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех остальных индексов, тоже образуют базу топологического произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Ясно, что для конечных произведений тихоновская топология (впрочем, как и ящичная) совпадает с топологией, порождённой базой, состоящей из всевозможных произведений открытых множеств. Очевидно также, что евклидова топология на $\mathbb{R}^n$ совпадает с топологией произведения на $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$.

Теорема Тихонова о компактности произведений

Теорема

Топологическое произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ непустых пространств компактно тогда и только тогда, когда все X_α компактны.

Доказательство. Необходимость немедленно вытекает из непрерывности всех канонических проекций $\pi_\beta: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta$.

Для доказательства достаточности воспользуемся критерием компактности в терминах ультрафильтров. Пусть $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — топологическое произведение семейства компактных пространств и $\mathcal{U}$ — любой ультрафильтр на множестве $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Нам нужно показать, что $\mathcal{U}$ сходится к некоторой точке. Для каждого $\alpha \in A$ положим $\mathcal{U}_\alpha = \{Y \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(Y) \in \mathcal{U}\}$.

Семейство $\mathcal{U}_\alpha$ является ультрафильтром на X_α , и поскольку X_α компактно, $\mathcal{U}_\alpha$ сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$. Положим $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ и покажем, что $\mathcal{U}$ сходится к точке x .

Пусть U — любая окрестность точки x в $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Она содержит каноническую окрестность $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$. По определению канонической окрестности найдётся конечное множество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ такое, что $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ (и V_{α_i} — окрестность точки x_{α_i} для $i \leq n$).

Для каждого $i \leq n$ ультрафильтр $\mathcal{U}_{\alpha_i}$ сходится к x_{α_i} , поэтому $V_{\alpha_i} \in \mathcal{U}_{\alpha_i}$ и $\pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathcal{U}$. Из того, что пересечение конечного числа элементов любого фильтра принадлежит этому фильтру, вытекает, что $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcap_{i \leq n} \pi_{\alpha_i}^{-1} V_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$, а из того, что вместе с каждым своим элементом всякий фильтр содержит все большие множества — что $U \in \mathcal{U}$.

Мы показали, что любая окрестность точки x принадлежит ультрафильтру $\mathcal{U}$, а это и означает, что $\mathcal{U}$ сходится к x . □

Топологическое пространство ультрафильтров

Пусть X — множество. Обозначим множество всех ультрафильтров на X через βX . Для каждого $A \subset X$ положим

$$\bar{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}.$$

Скажем, что $W \subset \beta X$ — **окрестность** ультрафильтра p в X , если $\exists A \in p$, для которого $\bar{A} \subset W$. Тем самым определена топология на βX . В дальнейшем мы будем рассматривать βX только с этой топологией.

Свойства пространства βX

- 1 Множество X можно отождествить с подпространством βX , состоящим из главных ультрафильтров:

$$X \ni x \equiv p_x = \{A \subset X : x \in A\}.$$

Подпространство X дискретно, открыто и всюду плотно в βX .

- ② Для любого $A \subset X$ множество $\overline{A}$ открыто-замкнуто.
- ③ Для всякого $A \subset X$ множество $\overline{A}$ является замыканием A в βX .
- ④ Пространство βX хаусдорфово.
- ⑤ Пространство βX компактно.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие βX . Можно считать без ограничения общности, что $\mathcal{U} = \{\overline{U}_\alpha : \alpha \in A\}$.

Положим $\mathcal{F} = \{X \setminus U_\alpha : \alpha \in A\}$.

Предположим, что $\mathcal{F}$ центрировано. Тогда $\mathcal{F}$ содержится в некотором ультраfiltре $p \in \beta X$. Поскольку $\mathcal{U}$ — покрытие, имеем $p \in \overline{U}_\alpha$ (т.е. $U_\alpha \in p$) для некоторого $\alpha \in A$. С другой стороны, $X \setminus U_\alpha \in p$.

Значит, $\mathcal{F}$ не центрировано. Для $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ таких, что $(X \setminus U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap (X \setminus U_{\alpha_n}) = \emptyset$ имеем $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} = X$. По основному свойству ультраfiltров для всякого $p \in \beta X$ имеем $U_{\alpha_i} \in p$, т.е. $p \in \overline{U}_{\alpha_i}$, для некоторого $i \leq n$.



- 6 Любое отображение $f: X \rightarrow Y$ множества X в хаусдорфов компакт Y продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}: \beta X \rightarrow Y$.

Доказательство. Для любого ультрафильтра $p \in \beta X$ $\beta f(p)$ — ультрафильтр на Y . Он сходится к единственной точке y в Y . Положим $\hat{f}(p) = y$. Ясно, что $\hat{f}$ продолжает f .

Покажем, что $\hat{f}$ непрерывно. Пусть V — любая замкнутая окрестность точки $y = \hat{f}(p)$. Имеем $V \in \beta f(p)$, потому что $\beta f(p) \rightarrow y$, и $f^{-1}(V) \in p$ по определению отображения βf . Значит, $\overline{f^{-1}(V)}$ — окрестность точки p в βX . Покажем, что $\hat{f}(\overline{f^{-1}(V)}) \subset V$.

Предположим, что $q \in \overline{f^{-1}(V)}$ (т.е. $f^{-1}(V) \in q$) и $\beta f(q) \notin V$. Возьмём окрестность U точки $\hat{f}(q)$ в Y , которая не пересекается с V . По построению $\beta f(q) \rightarrow \hat{f}(q)$; значит, $U \in \beta f(q)$ и $f^{-1}(U) \in q$. Однако $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, так как $U \cap V = \emptyset$, а значит, $f^{-1}(V) \notin q$. □

В частности, любое отображение $f: X \rightarrow \beta X$ продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}: \beta X \rightarrow \beta X$.

7 Для отображения $f: Y \rightarrow X \subset \beta X$ $\beta f = \hat{f}$.

Доказательство. Пусть $f': Y \rightarrow \beta X$ — надотображение отображения f (оно совпадает с f во всех точках, но формально имеет другую область значений). По определению $\hat{f}$ для $p \in \beta Y$ имеем $\beta f'(p) \rightarrow \hat{f}(p)$, т.е. любая окрестность $\bar{A}$ ультрафильтра $\hat{f}(p)$ в βX принадлежит $\beta f'(p)$, т.е. $f'^{-1}(\bar{A}) \in p$. Поскольку $\bar{A} \cap X = A$, имеем $f'^{-1}(\bar{A}) = f'^{-1}(A) = f^{-1}(A)$, т.е. $A \in \beta f(p)$. Значит, $\beta f(p) \in \bar{A}$. Таким образом, ультрафильтр $\beta f(p) \in \beta X$ принадлежит любой окрестности ультрафильтра $\hat{f}(p)$ в βX , а потому совпадает с ним. □

8 Для любого отображения $f: X \rightarrow \beta X$ и любого $p \in \beta X$ образ $\hat{f}(p)$ имеет каноническую базу

$$\left\{ \bigcup \{F_x : x \in P\} : P \in p, F_x \in f(x) \right\}.$$

Доказательство. Пусть q — ультрафильтр на X с указанной базой. Надо показать, что $\beta f(p) \rightarrow q$, т.е. любая окрестность $\bar{Q}$, $Q \in q$, точки q в βX принадлежит $\beta f(p)$. Имеем $Q \supset \bigcup \{F_x : x \in P\}$ для некоторых $P \in p$ и $F_x \in f(x)$, $x \in P$. Для $x \in P$ имеем $F_x \subset Q$, откуда $Q \in f(x)$ и $f(x) \in \bar{Q}$. Значит, $f^{-1}(\bar{Q}) \supset P$. Поэтому $f^{-1}(\bar{Q}) \in p$, так что $\bar{Q} \in \beta f(p)$. □

Пусть S — полугруппа. Для каждого $a \in S$ определим отображение

$$L_a: S \rightarrow S \quad (\subset \beta S)$$

правилом

$$L_s(x) = s \cdot x \quad \text{для всех } x \in S.$$

Рассмотрим непрерывное продолжение

$$\hat{L}_s: \beta S \rightarrow \beta S.$$

Для $\hat{L}_s(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $s \cdot p$.

Ультрафильтр $s \cdot p$ имеет каноническую базу

$$\left\{ \bigcup \{F_x : x \in P\} : P \in p, F_x \in L_s(x) \right\}.$$

Поскольку $L_s(x) = s \cdot x \in S$ для всякого $s \in P \in p$, все ультрафильтры $L_s(x)$ главные, так что база имеет вид

$$\{s \cdot P : P \in p\}.$$

Теперь для каждого $q \in \beta S$ рассмотрим отображение

$$R_q: S \rightarrow \beta S,$$

определённое правилом

$$R_q(x) = x \cdot q \quad \text{для всех } x \in S.$$

Рассмотрим непрерывное продолжение

$$\hat{R}_q: \beta S \rightarrow \beta S.$$

Для $\hat{R}_q(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $p \cdot q$. Этот ультрафильтр называется **произведением ультрафильтров** p и q в βS . Он имеет каноническую базу

$$\left\{ \bigcup \{F_x : x \in P\} : P \in p, F_x \in R_q(x) \right\}.$$

Заменяя произвольные элементы $F_x \in R_q(x) = x \cdot q$ на (меньшие) множества вида $x \cdot Q_x$, где $Q_x \in q$, мы получим **каноническую базу произведения** $p \cdot q$:

$$\left\{ \bigcup \{x \cdot Q_x : x \in P\} : P \in p, Q_x \in q \right\}.$$

Умножение непрерывно по первому аргументу, а если первый аргумент — элемент S , то и по второму. Из этой непрерывности вытекает ассоциативность, так что βS — компактная правотопологическая полугруппа.

Две теоремы о компактных полугруппах

Теорема (Эллис–Нумакура)

Любая компактная хаусдорфова полугруппа S , умножение в которой непрерывно по первому аргументу, содержит идемпотент.

Доказательство. Компактность $\implies$ к семейству (непустых) замкнутых подполугрупп S , упорядоченному обратному включению, применима лемма Цорна. Пусть H — минимальная замкнутая подполугруппа S и $e \in H$. Тогда $H \cdot e$ — замкнутая подполугруппа, и $H \cdot e \subset H$. Значит, $H \cdot e = H$. Положим

$$E = \{x \in H : x \cdot e = e\}.$$

Имеем $E \neq \emptyset$ и E — подполугруппа. Поскольку E — прообраз $\{e\}$ при непрерывном отображении $x \mapsto x \cdot e$, E замкнута. $E \subset H \implies E = H \implies e \cdot e = e$.



Теорема

Если S — компактная хаусдорфова полугруппа S , умножение в которой непрерывно по первому аргументу, то любой левый идеал L в S содержит минимальный левый идеал и любой минимальный левый идеал замкнут.

Доказательство. Пусть L — левый идеал в S , т.е. $S \cdot L \subset L$. Для любого $a \in L$ имеем $S \cdot a \subset L$. Из компактности, хаусдорфовости и непрерывности правых сдвигов следует замкнутость $S \cdot a$.

Итак, любой левый идеал содержит замкнутый идеал. Пересечение любой цепи замкнутых левых идеалов в S непусто, поскольку S компактно, и является замкнутым левым идеалом. По лемме Цорна существует минимальный замкнутый левый идеал K , содержащийся в L . Это также и минимальный левый идеал, потому что если $K' \subset K$ — другой левый идеал, то для любого $a \in K'$ имеем $S \cdot a \subset K' \subset K$ и $S \cdot a$ — замкнутый левый идеал. □

Определение

Пусть $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность элементов полугруппы S . Положим

$$FP((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \{a_{n_1} \cdot \dots \cdot a_{n_k} : k \in \mathbb{N}, n_1 < \dots < n_k\}.$$

Множество $A \subset S$ называется **FP-множеством**, если существует последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ разных элементов A , для которой $FP((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset A$.

Если полугруппа S коммутативна и операция обозначается $+$, то вместо FP пишут FS.

Лемма

Если свободный ультрафильтр p на полугруппе S является идемпотентом в βS , то любой элемент $A \in p$ является FP -множеством.

Доказательство. Положим $A_0 = A$. Поскольку $p \cdot p = p$ и $p \in \bar{A}_0$, непрерывность умножения по первому аргументу $\implies \exists B \in p: B \subset A_0$ и $\bar{B} \cdot p \subset \bar{A}_0$. Выберем любой $a_1 \in B$. Имеем $a_1 \cdot p \in \bar{A}_0$ и $a_1 \in S$. Непрерывность умножения по второму аргументу $\implies \exists A_1 \in p: a_1 \cdot \bar{A}_1 \subset \bar{A}_0$, $A_1 \subset A_0$ и $a_1 \notin A_1$, т.е.

$$a_1 \cdot A_1 \subset A_0, \quad A_1 \subset A_0, \quad a_1 \in A_0 \setminus A_1.$$

Продолжая, получим $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ и $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ такие, что

$$A_n \in p, \quad a_n \cdot A_n \subset A_{n-1}, \quad A_n \subset A_{n-1}, \quad a_n \in A_{n-1} \setminus A_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $n_1 < \dots < n_k$. Заметим: $a_m \cdot a_n \in A_l$ для $l < m < n$. Покажем: $a_{n_1} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \in A_{n_1-1}$. Для $k = 1$ очевидно. Пусть $k > 1$ и для меньших верно.

Тогда $a_{n_2} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \in A_{n_2-1}$. $A_{n_2-1} \subset A_{n_1}$ и $a_{n_1} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \in A_{n_2-2} \implies$

$$a_{n_1} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \in A_{n_1-1}.$$



Теорема (Хиндман)

Если бесконечная полугруппа S либо не имеет идемпотентов, либо допускает левые сокращения (т.е. из $a \cdot x = a \cdot y$ следует $x = y$ для любого $a \in S$), то любое конечное разбиение S содержит элемент, являющийся FP -множеством.

Доказательство. В силу леммы достаточно показать, что на S есть свободный ультрафильтр, который является идемпотентом в βS . Если S не содержит идемпотентов, то идемпотент, который обязан существовать в компактной правотопологической полугруппе βS , автоматически свободен. Если S допускает левые сокращения, то $\beta S \setminus S$ — замкнутая подполугруппа в βS , так что в $\beta S \setminus S$ есть идемпотент. □

Следствие (теорема Шура)

Для любой раскраски $\chi: \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ уравнение $x + y = z$ имеет одноцветное решение.

Определение

Пусть X — множество и m — натуральное число. Семейство $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется **m -регулярным относительно $Y \subset X$** , если для всякого разбиения $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ множества Y найдутся $k \leq m$ и $A \in \mathcal{A}$ такие, что $A \subset Y_k$.

Теорема (компактности для разбиений)

Если $\mathcal{A} \subset 2^X$ m -регулярно относительно X и любой элемент A конечен, то существует конечное $Y \subset X$ такое, что $\mathcal{A}$ m -регулярно относительно Y .

Доказательство. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$ и M_x — копия M для каждого $x \in X$. Рассмотрим тихоновское произведение

$$M^X = \prod_{x \in X} M_x$$

дискретных пространств M_x . Предположим, что теорема неверна. Тогда для всякого конечного $Y \subset X$ существует разбиение $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ множества Y , для которого нарушается условие m -регулярности. Положим $h(x) = i$, если $x \in Y_i$. Продолжим h на X до отображения $f_Y \in M^X$. Пусть

$$F_Y = \{f_K : Y \subset K, K \text{ — конечное подмножество } X\}.$$

Ясно, что семейство $\{F_Y : Y \text{ — конечное подмножество } X\}$ центрировано.

Продолжим его до ультрафильтра $\mathcal{U}$ на M^X . По теореме Тихонова $\mathcal{U} \rightarrow f \in M^X$. Рассмотрим разбиение

$$X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_m, \quad \text{где } X_i = f^{-1}(\{i\}).$$

По условию теоремы $\exists k \leq m, A \in \mathcal{A} : A \subset X_k$, т.е. $f(x) = k$ для всех $x \in A$.

Поскольку $\mathcal{U} \rightarrow f$, $\exists$ конечное $Y \subset X$, для которого $A \subset Y$ и $f_Y(x) = f(x) \forall x \in A$.

Сужение $f_Y|_Y$ определяет нерегулярное разбиение $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_m$. Однако $f_Y(x) = k$ для всех $x \in A$, откуда $A \subset Y$. Противоречие. □

Теорема (конечная версия теоремы Шура)

$\forall m \in \mathbb{N} \exists S(m) \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \geq S(m)$ и $\forall$ раскраски $\chi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ уравнение $x + y = z$ имеет одноцветное решение в множестве $\{1, \dots, n\}$.

Следствие

Для любых $m \in \mathbb{N}$ и любого простого $p > S(m)$ тождество $x^m + y^m = z^m \pmod{p}$ имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Пусть $\mathbb{F}_p^* = \{1, \dots, p-1\}$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{F}_p$, g — порождающий элемент. $\forall k \in \mathbb{F}_p^* \exists! t \leq p-1$, для которого $k \equiv g^t \pmod{p}$.

Представим t как $t = i + mj$, где $0 \leq i < m$, и рассмотрим раскраску

$$\chi: \mathbb{F}_p^* \rightarrow \{0, \dots, m-1\}, \quad \chi(k) = i, \text{ если } k = g^{i+mj} \pmod{p}.$$

Теорема $\implies \exists a, b, c \in \mathbb{F}_p^*$ и $i < m$: $a + b = c$ и $\chi(a) = \chi(b) = \chi(c) = i$, т.е.

$$a \equiv g^{i+mj_a} \pmod{p}, \quad b \equiv g^{i+mj_b} \pmod{p}, \quad c \equiv g^{i+mj_c} \pmod{p},$$

$$g^{i+mj_a} + g^{i+mj_b} \equiv g^{i+mj_c} \pmod{p}.$$

Умножая это тождество на g^{-i} в группе $\mathbb{F}_p^*$, получим решение $x = g^{j_a}$, $y = g^{j_b}$, $z = g^{j_c}$. □

Счётная нетопологизируемая группа G (А.Ю. Ольшанский)

Группа G содержит конечное множество $Z = \{1, z_1, \dots, z_k\}$ с тем свойством, что для всякого $g \in G \setminus \{1\}$ существует $n_g \in \mathbb{N}$, для которого $g^{n_g} \in Z \setminus \{1\}$, причём все числа n_g ограничены в совокупности одним числом $N \in \mathbb{N}$.

Таким образом, каждый отличный от единицы элемент g является решением одного из уравнений $x^i = z_j$, где $i \leq N$ и $j \leq k$. Множество решений любого такого уравнения замкнуто в любой отделимой групповой топологии на G , потому что оно является прообразом одноточечного (и следовательно, замкнутого в любой T_1 -топологии) множества $\{z_j\}$ при отображении $f: x \mapsto x^i$, которое обязано быть непрерывным в силу непрерывности умножения. Стало быть, дополнение до единицы в группе G является конечным объединением замкнутых множеств и потому замкнуто в любой групповой топологии. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ (а значит, и все остальные одноточечные множества, так как топологические группы однородны) открыто в любой отделимой групповой топологии, т.е. любая отделимая групповая топология на G дискретна.

Теорема Арнаутова (следствие теоремы Хиндмана)

Никакое бесконечное кольцо не имеет алгебраически изолированных точек.

(Т.е. если R — бесконечное кольцо и $x \in R$, то $R \setminus \{x\}$ не есть конечное объединение множеств корней кольцевых многочленов.)

Доказательство. Очевидно, точка x алгебраически изолирована тогда и только тогда, когда 0 (и все прочие точки) алгебраически изолированы. Поэтому будем доказывать теорему для $x = 0$.

Лемма 1

Пусть R — кольцо, $f(x) \in R[x]$, $\deg f = n > 0$ и $a \in R$. Тогда существует многочлен $g(x) \in R[x]$ такой, что $\deg g < n$ и

$$f(x + a) = f(x) + f(a) + g_a(x)$$

для всех $x \in R$.

Лемма 2

Пусть $f \in R[x]$, $\deg f = n \geq 0$, $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\} \subset R$ и $f(b) = 0$ для любого $b \in FS(A)$. Тогда $f(0) = 0$.

Доказательство. Индукция по n . Если $n = 0$, то $f = \text{const}$ и из $f(a_1) = 0$ вытекает $f(0) = 0$.

Предположим, что $n > 0$ и для меньших n утверждение доказано. Положим $A' = \{a_1, \dots, a_n\}$. Ясно, что $FS(A') \subset FS(A)$ и $FS(A') + a_{n+1} \subset FS(A)$.

Рассмотрим многочлен $g_{a_{n+1}}$ из леммы 1. Для всякого $b \in FS(A')$ имеем $b + a_{n+1} \in FS(A)$ и

$$f(b + a_{n+1}) = f(b) + f(a_{n+1}) + g_{a_{n+1}}(b).$$

По условию $f(b + a_{n+1}) = f(b) = f(a_{n+1})$; значит, $g_{a_{n+1}}(b) = 0$ для всех $b \in FS(A')$. По индуктивному предположению $g_{a_{n+1}}(0) = 0$. Подставляя $b = 0$, получаем $f(0) = 0$. □

Доказательство теоремы. Предположим, что точка 0 алгебраически изолирована и многочлены $f_1, \dots, f_m \in R[x]$ таковы, что

$$R \setminus \{0\} = A_1 \cup \dots \cup A_m, \quad \text{где } A_i = \{a \in R : f_i(a) = 0\}.$$

По теореме Хиндмана для аддитивной группы кольца R найдется $i \leq m$, для которого существует бесконечная последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ разных элементов R такая, что $FS((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset A_i \cup \{0\}$. Пусть $\deg f_i = k$. Если $a_1 \neq 0$, положим $a'_1 = a_1$. Если $a_1 = 0$, то положим $a'_1 = a_2$. Предположим, что $a'_1, \dots, a'_r$ определены. Выберем a_s с наименьшим номером $s > r$, для которого $-a_s \notin FS(\{a'_1, \dots, a'_r\})$ и положим $a'_{r+1} = a_s$. В результате мы получим множество $A = \{a'_1, \dots, a'_{k+1}\}$ такое, что $FS(A) \subset A_i$, т.е. $f_i(b) = 0$ для всех $b \in FS(A)$. По лемме 2 имеем $f_i(0) = 0$. Противоречие. □

Теорема ван дер Вардена

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $S = (\beta\mathbb{N})^m$ ($\mathbb{N}$ с операцией $+$). Элементы S — векторы $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$.

S — компактная хаусдорфова правотопологическая полугруппа относительно покомпонентного сложения.

Положим

$$E^* = \{(a, a + d, \dots, a + (m - 1)d) : a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

$$I^* = \{(a, a + d, \dots, a + (m - 1)d) : a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}\},$$

$$E = \overline{E^*} \quad \text{и} \quad I = \overline{I^*}.$$

Лемма 1

E — подполугруппа в S и I — двусторонний идеал в S .

Доказательство. Пусть $\vec{p}, \vec{q} \in E$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $U_1 \times \dots \times U_m$ элемента $\vec{p} + \vec{q}$ в S . Непрерывность сложения по первому аргументу $\implies \exists$ окрестность $V_1 \times \dots \times V_m$ элемента $\vec{p}$, для которой $V_1 \times \dots \times V_m + \vec{q} \subset U_1 \times \dots \times U_m$.

E — подполугруппа:

1. Выберем $a \in \mathbb{N}$ и $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $(a, a + d, \dots, a + (m - 1)d) = \vec{x} \in V_1 \times \dots \times V_m$. $\vec{x} + \vec{q} \in U_1 \times \dots \times U_m$ и $a, a + d, \dots, a + (m - 1)d \in \mathbb{N} \implies \exists$ окрестность $W_1 \times \dots \times W_m$ элемента $\vec{q}$, для которой $\vec{x} + W_1 \times \dots \times W_m \subset U_1 \times \dots \times U_m$.

2. Выберем $b \in \mathbb{N}$ и $e \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, что $(b, b + e, \dots, b + (m - 1)e) = \vec{y} \in W_1 \times \dots \times W_m$. Имеем $\vec{x} + \vec{y} \in U_1 \times \dots \times U_m$ и $\vec{x} + \vec{y} = (a + b, a + b + d + e, \dots, a + b + (m - 1)(d + e)) \in \mathbb{N}$. Значит, $\vec{x} + \vec{y} \in E^*$ и $\vec{p} + \vec{q} \in E$ (так как окрестность $U_1 \times \dots \times U_m$ произвольна). □

Лемма 2

Если $p \in \mathbb{N}$, то $\vec{p} = (p, \dots, p) \in E$.

Доказательство. Пусть $U_1 \times \dots \times U_m$ — любая окрестность $\vec{p}$ в S . Тогда $U = \bigcap_{i \leq m} U_i$ — окрестность p в $\beta\mathbb{N}$. Для $a \in \mathbb{N} \cap U$ имеем $(a, \dots, a) \in (U_1 \times \dots \times U_m) \cap E^*$.



Лемма 3

Если L — минимальный левый идеал в $\beta\mathbb{N}$, $p \in L$ и $\vec{p} = (p, \dots, p)$, то $\vec{p} \in I$.

Доказательство. Вторая теорема о компактных полугруппах $\implies \exists$ минимальный левый идеал F в левом идеале $E + \vec{p}$ полугруппы E , и F замкнут. $\implies \exists$ идемпотент $\vec{q} \in F$. Поскольку $\vec{q} = E + \vec{p}$, имеем $\vec{q} = \vec{r} + \vec{p}$ для некоторого $\vec{r} \in E$.

Пусть $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$ и $\vec{r} = (r_1, \dots, r_m)$. Тогда $q_i = r_i + p \in \beta\mathbb{N} + p$ для $i \leq m$.
 L — минимальный левый идеал в $\beta\mathbb{N}$, $p \in L \implies \beta\mathbb{N} + p = L$.

Имеем $q_i \in L$ и $\beta\mathbb{N} + q_i \in L$. Выберем $t_i \in \beta\mathbb{N}$, для которого $t_i + q_i = p$.

Имеем $t_i + q_i + q_i = t_i + q_i = p \implies p + q_i = p \implies \vec{p} + \vec{q} = \vec{p}$.

$\vec{q} \in F$, F — левый идеал $\implies \vec{p} \in F$.

Покажем: $F \subset I$. F — левый идеал в $E + \vec{p} \implies$ в E , I — правый идеал в E
 $\implies IF \subset F$, $IF \subset I \implies IF \subset F \cap I \neq \emptyset$.

F и I — левые идеалы в $E \implies F \cap I$ — левый идеал в E .

Минимальность $F \implies F \subset I$.



Теорема

Если L — минимальный левый идеал в $\beta\mathbb{N}$ и $p \in L$, то любое множество $A \in p$ содержит произвольно длинные арифметические прогрессии.

Доказательство. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $A \in p$. Рассмотрим окрестность $\bar{A} \times \cdots \times \bar{A}$ элемента $\vec{p} = (p, \dots, p)$ в $(\beta\mathbb{N})^m$.

Лемма 3 $\implies \vec{x} \in I^* \cap (\bar{A} \times \cdots \times \bar{A})$. Имеем $\vec{x} = (a, a + d, \dots, a + (m - 1)d)$ для некоторых $a, d \in \mathbb{N}$.

$a, a + d, \dots, a + (m - 1)d$ — арифметическая прогрессия, содержится в A . □

Определение

Идемпотент полугруппы S , принадлежащий минимальному левому идеалу, называется **минимальным**.

Определение

Для произвольной полугруппы S

$$K(S) = \bigcup \{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\}.$$

Теорема

Если $K(S) \neq \emptyset$, то K — наименьший двусторонний идеал в полугруппе S .

Доказательство. Любой минимальный левый идеал L содержится в любом двустороннем идеале I : $I \in L, i \in I \Rightarrow i \cdot I \in L \cap I \Rightarrow L \cap I \neq \emptyset$. Это левый идеал, L минимален $\Rightarrow L \subset L \cap I \Rightarrow L \subset I$.

Итак, $K(S)$ содержится в любом двустороннем идеале. Это левый идеал.

Покажем, что $K(S)$ — правый идеал. Надо проверить: $\forall s \in S \quad K(S) \cdot s \subset K(S)$.

Заметим: если L — минимальный левый идеал, то $L \cdot s$ тоже:

Если $L' \subset L \cdot s, I \in L$ и $I \cdot s \in L'$, то $S \cdot I = L \Rightarrow S \cdot I \cdot s = L \cdot s$. С другой стороны, $S \cdot I \cdot s \subset L'$.

Итак,

$$K(S) \cdot s = \bigcup \{L \cdot s : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\} \subset K(S).$$

$\Rightarrow K(S)$ — правый идеал $\Rightarrow K(S)$ — двусторонний идеал. Знаем: $K(S)$ содержится в любом другом двустороннем идеале.



Определение

Через $E(S)$ обозначается множество всех идемпотентов полугруппы S . Для $e, f \in E(S)$ $e \leq f$, если $e \cdot f = f \cdot e = e$. Отношение $\leq$ на $E(S)$ — частичный порядок.

Замечание

Равенство $e \cdot f = e$ равносильно включению $S \cdot e \subset S \cdot f$.

Теорема

Пусть S — компактная правотопологическая полугруппа и $e \in E(S)$.

- 1 Каждый минимальный левый идеал $L \subset S \cdot e$ содержит идемпотент $f \leq e$.
- 2 Идемпотент e $\leq$ -минимален в $E(S)$ $\iff e \in K(S)$.
- 3 Идемпотент e $\leq$ -минимален в $E(S)$ $\iff L = S \cdot e$ — минимальный левый идеал.
- 4 Существует $\leq$ -минимальный идемпотент $f \leq e$.

Доказательство. ① $\exists \varepsilon \in L \cap E(S)$. Положим $f = e \cdot \varepsilon$.

$f \in L \iff L$ — левый идеал.

$\varepsilon \cdot e = \varepsilon \iff \varepsilon \in L \subset S \cdot e$, т.е. $\varepsilon = s \cdot e$, откуда $\varepsilon \cdot e = s \cdot e \cdot e = s \cdot e = \varepsilon$.

f — идемпотент: $f^2 = e \cdot \varepsilon \cdot e \cdot \varepsilon = e \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon = e \cdot \varepsilon = f$.

$e \cdot f = e \cdot e \cdot \varepsilon = e \cdot \varepsilon = f$ и $f \cdot e = e \cdot \varepsilon \cdot e = e \cdot \varepsilon = f$.

② Пусть e — $\leq$ -минимальный идемпотент и $L \subset S \cdot e$ — минимальный левый идеал. По доказанному $\exists f \in L \cap E(S)$: $f \leq e$. e $\leq$ -минимален $\implies f = e \implies e \in L$.

Обратно, пусть L — минимальный левый идеал, $e \in L$, $x \in E(S)$, $x \leq e$.

Замечание $\implies S \cdot x \subset S \cdot e$. L минимален $\implies L = S \cdot e = S \cdot x \implies e = s \cdot x$.

$x \leq e \implies x = e \cdot x \implies x = s \cdot x \cdot x = s \cdot x = e$.

③ Если L — минимальный левый идеал и $e \in L$, то $e \in K(S)$.

Если $e \in L$ и L — минимальный левый идеал, то $S \cdot e = L$.

④ S компактна $\implies \exists$ минимальный левый идеал $L \subset S \cdot e$ и $\exists$ идемпотент $f \in L$ такой, что $f \leq e$. Второе свойство $\implies f$ $\leq$ -минимален. □

Следствие

Для компактной правотопологической полугруппы S минимальные идемпотенты — это в точности $\leq$ -минимальные идемпотенты.

Теорема

Пусть S — полугруппа, L — минимальный левый идеал в S , e — идемпотент, $e \in L$. Тогда $R = e \cdot S$ — минимальный правый идеал в S , и $e \in R$.

Доказательство. Главная идея: $G = e \cdot S \cdot e$ — группа с единицей e .

Очевидно: $G \subset L$, $e \in G$, G замкнута относительно умножения и $e \cdot x = x \cdot e = x$ для всех $x \in G$.

$\forall x \in G \exists y \in G$ такое, что $y \cdot x = e$: $x \in L \implies L = S \cdot x \implies e = s \cdot x \implies y = e \cdot s \cdot e \in G$ и $y \cdot x = e \cdot s \cdot e \cdot x = e \cdot s \cdot x = e \cdot e = e$.

$\forall x \in G \exists y \in G$ такое, что $x \cdot y = y \cdot x = e$: Пусть $y \cdot x = e$, $z \in G$, $z \cdot y = e$.

Имеем $x \cdot y = e \cdot x \cdot y = z \cdot y \cdot x \cdot y = z \cdot e \cdot y = z \cdot y = e$.

Пусть $J \subset e \cdot S$ — правый идеал, $t \in J$. Имеем $t \in e \cdot S$ и $t \cdot e \in e \cdot S \cdot e = G$. Возьмём $y \in G$, для которого $t \cdot e \cdot y = e$. Имеем $e \in J$, потому что J — правый идеал и $t \in J$. Значит, $R = e \cdot S \subset J$.



Следствие

Если полугруппа S имеет минимальный левый идеал, содержащий идемпотент, то

$$\begin{aligned} K(S) &= \bigcup \{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\} \\ &= \bigcup \{R : R \text{ — минимальный правый идеал в } S\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Предыдущая теорема $\implies S$ имеет минимальный правый идеал.



Коидеалы в булевой алгебре и семейства, определённые ультрафильтрами

Определение

Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества X называется

- **замкнутым вверх**, если $\forall A \in \mathcal{A}$ имеем $A \subset B \subset X \implies B \in \mathcal{A}$;
- **регулярным относительно разбиений**, если $\forall A \in \mathcal{A}$ имеем $A = B \sqcup C \implies B \in \mathcal{A}$ или $C \in \mathcal{A}$;
- **кoiдеалом**, если оно замкнуто вверх и регулярно относительно разбиений;
- **определённым множеством ультрафильтров** $M \subset \beta X$, если

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : \bar{A} \cap M \neq \emptyset\},$$

т.е. если $A \in \mathcal{A} \iff A \in p$ для некоторого $p \in M$, т.е. $\mathcal{A} = \bigcup M$.

Предложение

Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества X является коидеалом тогда и только тогда, когда оно определяется некоторым множеством ультрафильтров $M \subset \beta X$, т.е. $\mathcal{A} = \bigcup M$.

Доказательство. Необходимость: Пусть $\mathcal{A}$ — коидеал. Положим $M = \{p \in \beta X : p \subset \mathcal{A}\}$. Имеем $\bigcup M \subset \mathcal{A}$. Обратно: пусть $A \in \mathcal{A}$, но ни для какого ультрафильтра $p \ni A$ не выполнено $p \subset \mathcal{A}$, т.е. $\forall p \in \bar{A} \exists B_p \in p: B_p \notin \mathcal{A}$. Компакт $\bar{A} \subset \beta X$ покрыт открытыми множествами $\bar{B}_p$, $p \in \bar{A}$; пусть $F \subset \bar{A}$ — конечное множество, для которого $\bar{A} \subset \bigcup_{p \in F} \bar{B}_p$; тогда $\bigcup_{p \in F} B_p \in \mathcal{A}$, и регулярность относительно разбиений $\implies B_p \in \mathcal{A}$ для некоторого $p \in F$. □

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутое вверх семейство подмножеств множества X , и пусть $\mathcal{B}$ — **двойственное** семейство, т.е. $\mathcal{B} = \{Y \subset X : Y \cap A \neq \emptyset \forall A \in \mathcal{A}\}$. Тогда семейство $\mathcal{C} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ регулярно относительно разбиений (и является коидеалом).

Доказательство. Достаточно рассмотреть разбиение на два множества. Пусть $C = A \cap B$, где $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$, и пусть $C = C_1 \sqcup C_2$. Положим $A' = C_1 \cup (A \setminus C)$. Имеем $C_1 = A' \cap B$, значит, если $A' \in \mathcal{A}$, то $C_1 \in \mathcal{C}$. Пусть $A' \notin \mathcal{A}$. Тогда $B' = X \setminus A' \in \mathcal{B}$, и $C_2 = B' \cap A$, откуда $C_2 \in \mathcal{C}$.

Толстые множества в полугруппах

Пусть S — произвольная полугруппа. Для $x \in S$ и $A \subset S$

$$x \cdot A = \{x \cdot a : a \in A\}, \quad A \cdot x = \{a \cdot x : a \in A\}, \quad x^{-1} \cdot A = \{s \in S : x \cdot s \in A\}.$$

Для любого ультрафильтра p на S имеем

$$x^{-1} \cdot A \in p \iff x \cdot W \subset A \text{ для некоторого } W \in p \iff A \in x \cdot p \iff x \cdot p \in \bar{A}.$$

Определение

Подмножество $T \subset S$ называется **толстым**, если семейство $\{x^{-1} \cdot T : x \in S\}$ центрировано.

Теорема (о толстых множествах)

Для подмножества T полугруппы S следующие условия равносильны:

- 1 T толстое;
- 2 для любого конечного $F \subset S$ найдётся $y \in S$ такое, что $F \cdot y \subset T$;
- 3 для некоторого $p \in \beta S$ (замкнутый) левый идеал $\beta S \cdot p$ полугруппы βS содержится в $\overline{T}$;
- 4 существует минимальный левый идеал L в βS , для которого $L \subset \overline{T}$.

Доказательство. 1 $\Leftrightarrow$ 2: Множество T толстое $\Leftrightarrow \forall$ конечного $F \subset S$
 $\exists y \in \bigcap_{x \in F} x^{-1} \cdot T$. Это означает, что $\forall x \in F$ имеем $x \cdot y \in T$, т.е. $F \cdot y \subset T$.

1 $\Leftrightarrow$ 3: Семейство $\{x^{-1} \cdot T : x \in S\}$ центрировано $\Leftrightarrow$ оно содержится в ультрафильтре p на S . $\forall x \in S, \forall A \in p$ имеем $x \cdot A \cap T \neq \emptyset \Rightarrow T \in x \cdot p$, т.е. $S \cdot p \subset \overline{T}$. Умножение непрерывно по первому аргументу $\Rightarrow \beta S \cdot p \subset \overline{T}$. Все импликации обратимы.

3 $\Leftrightarrow$ 4: По второй теореме о компактных полугруппах (минимальные идеалы).



Пример

Рассмотрим аддитивную полугруппу $(\mathbb{N}, +)$.

1. Любое конечное множество $F \subset \mathbb{N}$ содержится в начальном интервале $\{1, \dots, k\}$ для некоторого k , и для $y \in \mathbb{N}$ $\{1, \dots, k\} + y$ — это интервал длины k . По доказанной теореме множество $A \subset \mathbb{N}$ толстое $\iff$ оно содержит произвольно длинные конечные интервалы.

2. Из этого критерия следует, что семейство толстых множеств не регулярно относительно разбиений.

Синдетические множества в полугруппах

Определение

Подмножество A полугруппы S называется **синдетическим**, если существует конечное $F \subset S$, для которого

$$\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A = S.$$

$A \subset S$ синдетическое $\iff$ существует конечное $F \subset S$ такое, что $\forall s \in S \exists t \in F: t \cdot s \in A$.

Полезное равенство: для всех $x \in S, X \subset S$

$$S \setminus (x^{-1} \cdot X) = x^{-1} \cdot (S \setminus X)$$

Теорема (о синдетических множествах)

Пусть S — произвольная полугруппа и $A, T \subset S$.

- ① A синдетическое $\iff A$ пересекает все толстые множества.
- ② T толстое $\iff T$ пересекает все синдетические множества.
- ③ A синдетическое $\iff \bar{A}$ пересекает все (минимальные) левые идеалы в βS .

Доказательство. ①, ②, необходимость: Пусть $T \subset S$ толстое и $A \subset S$ синдетическое. Выберем конечное $F \subset S$, для которого $\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A = S$. Для

$s \in \bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T$ и $t \in F$ такого, что $s \in t^{-1} \cdot A$, имеем $t \cdot s \in A \cap T$.

①, достаточность: A не синдетическое $\implies \bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot (S \setminus A) \neq \emptyset$ для любого конечного $F \subset S$, так что $S \setminus A$ толстое.

②, достаточность: T не толстое $\implies \bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T = \emptyset$ для некоторого конечного $F \subset T$. Значит, $\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot (S \setminus T) = S$, т.е. $S \setminus T$ синдетическое.

③ вытекает из ① и утверждения ④ предыдущей теоремы.



Пример

Рассмотрим полугруппу $(\mathbb{N}, +)$.

1. Множество $A \subset \mathbb{N}$ синдетическое $\iff$ оно обладает **свойством ограниченных промежутков**: существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что всякий интервал длины k пересекает A (т.е. расстояние между любым $x \in \mathbb{N}$ и наименьшим $y \in A$, для которого $x < y$, не больше k).

2. Семейство $\mathcal{A}$ синдетических множеств в $\mathbb{N}$ не регулярно относительно разбиения $\mathbb{N}$ на объединения отрезков $I_n = [2^n, 2^{n+1} - 1] \cap \mathbb{N}$ с чётными и нечётными номерами.

Определение

Подмножество A полугруппы S называется **кусочно синдетическим**, если найдётся конечное $F \subset S$, для которого множество $\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A$ толстое в S .

Полугруппа S — толстое синдетическое множество в себе $\implies$

Предложение

Всякое синдетическое множество является кусочно синдетическим. Всякое толстое множество является кусочно синдетическим.

Из доказанной ниже теоремы следует, что семейство кусочно синдетических множеств регулярно относительно разбиений (и является коидеалом).

Предложение

Если A — кусочно синдетическое множество в полугруппе S , то существуют $x \in S$ и минимальный идемпотент e в βS такие, что $x^{-1} \cdot A \in e$. При этом e и $x \cdot e$ содержатся в минимальном идеале $K(\beta S)$ и $x \cdot e \in \bar{A}$, т.е. $\bar{A} \cap K(\beta S) \neq \emptyset$.

Доказательство. Зафиксируем конечное $F \subset S$, для которого множество $T = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A$ толстое. Теорема о толстых множествах $\implies \exists$ минимальный левый идеал L в βS , для которого $L \subset \overline{T}$. Выберем идемпотент e в L . По теореме об идемпотентах e минимален в βS . Имеем

$$e \in L \subset \overline{T} = \overline{\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A},$$

и $\exists x \in F$, для которого $e \in \overline{x^{-1} \cdot A}$. Это означает, что $x^{-1} \cdot A \in e$, т.е. $A \in x \cdot e$. При этом $x \cdot e \in x \cdot L = L \subset K(\beta S)$. □

Теорема

Подмножество A полугруппы S кусочно синдетическое $\iff A \in p$ для некоторого ультрафильтра $p \in K(\beta S)$, т.е. $\overline{A} \cap K(\beta S) \neq \emptyset$.

Доказательство. Необходимость вытекает из предложения.

Достаточность: Для любого $p \in K(\beta S)$ такого, что $A \in p$, единственный минимальный левый идеал $M = \beta S \cdot p$ в βS , содержащий p , удовлетворяет условию $M \subset \bigcup_{t \in E} \overline{t^{-1} \cdot A}$ для некоторого конечного $E \subset S$. Действительно, пусть $q \in M$. Поскольку M минимален, имеем $M = \beta S \cdot q$. Имеем также $p \in M$, $M = \overline{S \cdot q}$ (замыкание в βS) и $\overline{A}$ — окрестность p . Значит, для некоторого $t \in S$ имеем $t \cdot q \in \overline{A}$, т.е. $q \in t^{-1} \cdot \overline{A} = \overline{t^{-1} \cdot A}$. $M \subset \beta S$ компактно, множества $\overline{t^{-1} \cdot A}$ открыты $\implies \exists$ конечное $E \subset S$, для которого $p \in M \subset \bigcup_{t \in E} \overline{t^{-1} \cdot A}$.

По теореме о толстых множествах множество $\bigcup_{t \in E} \overline{t^{-1} \cdot A}$ толстое, значит, A кусочно синдетическое.



Теорема

- 1 Пусть G — группа или полугруппа $(\mathbb{N}, +)$. Если множество $A \subset G$ кусочно синдетическое, то $A = S \cap T$, где S синдетическое и T толстое.
- 2 Пусть G — произвольная полугруппа. Если $A = S \cap T$, где S синдетическое и T толстое, то A кусочно синдетическое.

Доказательство. 1 Пусть $F \subset G$ конечно, $\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A = T'$ толстое. В группе (в $\mathbb{N}$) $t^{-1} \cdot A$ — обычное произведение (пересечение $(A - t) \cap \mathbb{N}$) $\implies A \subset \bigcap_{t \in F} t \cdot T'$.

$\forall$ конечного $E \subset G$ имеем

$$\bigcap_{s \in E} s^{-1} \cdot \left(\bigcap_{t \in F} t \cdot T' \right) = \bigcap_{s \in E} \bigcap_{t \in F} s^{-1} \cdot t \cdot T' = \bigcap_{\substack{t \in F \\ s \in E}} (t^{-1} \cdot s)^{-1} \cdot T' \neq \emptyset.$$

Положим $T = \bigcap_{t \in F} t \cdot T'$ (толстое). Для $S = A \cup (G \setminus \bigcap_{t \in F} t \cdot T')$ имеем

$$\begin{aligned} \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot S &= \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A \cup \bigcup_{t \in F} t^{-1} (G \setminus \bigcap_{t \in F} t \cdot T') = \\ &= T' \cup \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot \left(\bigcup_{t \in F} (G \setminus t \cdot T') \right) = T' \cup \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot \left(\bigcup_{t \in F} (t \cdot (G \setminus T')) \right) = G. \end{aligned}$$



② Пусть $A = S \cap T$, S синдетическое и T толстое. Пусть $F \subset G$ конечно, $\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot S = G$. Положим $T' = \bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T$. Множество T' толстое:

- $x^{-1} \cdot (y^{-1} \cdot T) = (y \cdot x)^{-1} \cdot T$, потому что $y^{-1} \cdot T = \{s : y \cdot s \in T\}$ и $x^{-1} \cdot (y^{-1} \cdot T) = \{s : x \cdot s \in y^{-1} \cdot T\} = \{s : y \cdot x \cdot s \in T\} = (y \cdot x)^{-1} \cdot T$;
- $s^{-1} \left(\bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T \right) = \bigcap_{t \in F} (t \cdot s)^{-1} \cdot T$, потому что $x \in s^{-1} \cdot \left(\bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T \right) \iff s \cdot x \in \bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T$, т.е. $t \cdot s \cdot x \in T$ для всех $t \in F \iff x \in \bigcap_{t \in F} (t \cdot s)^{-1} \cdot T$.

Следовательно, для любого конечного $E \subset G$ имеем

$$\bigcap_{s \in E} \left(\bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T \right) = \bigcap_{\substack{t \in F \\ s \in E}} (t \cdot s)^{-1} \cdot T \neq \emptyset.$$

Покажем, что $\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A \supset T'$:

$$\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot (S \cap T) = \bigcup_{t \in F} (t^{-1} \cdot S \cap t^{-1} \cdot T) \supset \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot S \cap \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot T = G \cap T' = T'.$$



Теорема (Hales–Jewett)

Пусть V — полугруппа, $W \subset V$ — подполугруппа такая, что $R = V \setminus W$ — двусторонний идеал в V , и пусть Σ — конечное множество ретракций из V на W . Тогда для любого кусочно синдетического множества B в W найдётся $v \in R = V \setminus W$ такое, что $\{\sigma(v) : \sigma \in \Sigma\} \subset B$.

Доказательство. Предложение $\implies \exists x \in W$, для которого $x^{-1} \cdot B \in q$, где q — минимальный идемпотент в βW . Зафиксируем минимальный идемпотент p в βV , для которого $p \leq q$. Теорема об идемпотентах + теорема о $K(S) \implies p \in \bar{R}$. Имеем $\sigma(p) = q$ для всех $\sigma \in \Sigma$, потому что $\sigma(p)$ — идемпотент и $p \leq q, \implies$

$$\sigma(p \cdot q) = \sigma(q \cdot p) = \sigma(p) \cdot q = q \cdot \sigma(p) = \sigma(p),$$

т.е. $\sigma(p) \leq q$. Идемпотент q минимален в $\beta W \implies \sigma(p) = q$. Возьмём

$$a \in R \cap \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \sigma^{-1}(x^{-1} \cdot B)$$

(это пересечение принадлежит p и потому непусто). Имеем $a \in R$ и $x \cdot \sigma(a) \in B$ для всех $\sigma \in \Sigma$. В качестве v можно взять $x \cdot a$: имеем $v \in R$, потому что R — (двусторонний) идеал в V , и $\sigma(v) = x \cdot \sigma(a) \in B$, потому что $x \in W, \implies \sigma(x) = x$.



Следствие

Пусть $(S, +)$ — коммутативная полугруппа, $A \subset S$ — кусочно синдетическое множество и E — конечное подмножество S . Тогда найдутся $a \in S$ и $d \in \mathbb{N}$, для которых $\{a + d \cdot e : e \in E\} \subset A$.

Доказательство. Рассмотрим $V = S \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$, $W = S \times \{0\}$ и $\sigma_e(a, d) = (a + de, 0)$.



Следствие

Любое кусочно синдетическое подмножество $(\mathbb{N}, +)$ содержит арифметические прогрессии произвольной длины.

Следствие

Пусть $k \in \mathbb{N}$, A — кусочно синдетическое множество в $(\mathbb{N}^k, +)$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда A содержит гомотетичный образ k -мерного куба $\{1, \dots, n\}^k$.

Динамические системы

Определение

Пусть X — любое множество и S — моноид (полугруппа с единицей 1_S). Действие S на X — это отображение $\mu: S \times X \rightarrow X$ (вместо $\mu(s, x)$ будем писать $s \cdot x$ или sx) со свойствами

- $1_S \cdot x = x$ для всех $x \in X$;
- $s \cdot (t \cdot x) = (s \cdot t) \cdot x$ для всех $x \in X$ и $s, t \in S$.

Если задано действие μ моноида S на X , то мы говорим, что моноид S действует на X посредством μ .

Определение

Пусть S — моноид. **Динамическая система** над S , или S -система, — это пара (X, μ) , где

- X — непустой хаусдорфов компакт;
- μ — действие S на X ;
- отображение $m_s: X \rightarrow X$, $x \mapsto s \cdot x$, непрерывно для всех $s \in S$.

Пространство X называется **фазовым пространством** S -системы.

Каждое отображение $\mu: S \times X \rightarrow X$ индуцирует отображение $m: S \rightarrow X^X$ по правилу $m(s) = m_s$ для $s \in S$, и обратно, для любого отображения $m: S \rightarrow X^X$ можно определить отображение $\mu: S \times X \rightarrow X$, полагая $\mu(s, x) = m_s(x)$.

Это отображение — действие $\iff m$ — гомоморфизм моноида S в моноид $(X^X, \circ)$, т.е. $m(1_S) = \text{id}_X$ и $m_{s \cdot t} = m_s \circ m_t$ для всех $s, t \in S$.

Для топологического пространства X $C(X) \subset (X^X, \circ)$ — подполугруппа, состоящая из всех непрерывных отображений $X \rightarrow X$. Динамическая система (X, μ) над S — это пара, где X — компакт и действие μ порождает гомоморфизм $m: S \rightarrow C(X)$. Элементы S можно интерпретировать как моменты времени.

Дискретные динамические системы

$$\omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Определение

Динамические системы над моноидом $(\omega, +)$ называются **дискретными**.

Пусть X — компакт и $t: X \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Для $n \in \omega$ обозначим через t^n n -ю итерацию отображения t : $t^n = \underbrace{t \circ \dots \circ t}_{n \text{ раз}}$. Полагая

$n \cdot x = t^n(x)$, получаем динамическую систему с фазовым пространством X .

Все дискретные динамические системы (X, μ) получаются таким образом: определим $f: X \rightarrow X$ правилом $t(x) = 1 \cdot x$. Для любых $n \in \omega$ и $x \in X$ имеем

$$n \cdot x = (1 + \dots + 1) \cdot x = (t \circ \dots \circ t)(x) = t^n(x).$$

По этой причине дискретная динамическая система с фазовым пространством X обычно отождествляется с парой (X, t) , где t — непрерывное отображение.

Если X — компакт и S — подмоноид $C(X)$, то (X, μ) , где $\mu: (s, x) \mapsto s(x)$, — динамическая система над S . Таким образом, любое множество $T \subset C(X)$ порождает динамическую систему над $S = \langle T \rangle$ с фазовым пространством X .

Определение

Пусть (X, μ) — динамическая система над S .

Подмножество $Y \subset X$ **инвариантно**, если для всех $y \in Y$ имеем $s \cdot y \in Y$ для $s \in S$, т.е. $\bigcup_{s \in S} m_s(Y) \subset Y$.

$(Y, \mu|_{S \times Y}) \subset (X, \mu)$ — **подсистема** X над S , или **S -подсистема**, если Y непусто, замкнуто и инвариантно. S -подсистема сама является S -системой над S .

Если $X = [0, 1]$ и $t = x/2$, то любой отрезок $[0, a]$ — подсистема (над ω).

Определение

Пусть X — динамическая система над S и $x \in X$.

Множество $\text{orb}(x) = \{s \cdot x : s \in S\}$ называется **орбитой** точки x . Это наименьшее инвариантное множество, содержащее x .

Множество $\bar{x} = \overline{\text{orb}(x)}^X$ — наименьшая подсистема X , содержащая x .

Подсистема Y системы X называется **транзитивной**, если $Y = \bar{x}$ для некоторого $x \in X$.

Определение

Пусть X — динамическая система над S . Подсистема M системы X называется **минимальной**, если любая подсистема M совпадает с M .

Примеры: неподвижная точка, орбита периодической точки (в дискретной системе).

Теорема

Всякая динамическая система X над S содержит минимальную подсистему.

Доказательство. Пусть $(\mathbb{P}, \supset)$ — множество всех S -подсистем Y , частично упорядоченное обратным включению. Для любой цепи $\mathcal{C}$ в $\mathbb{P}$ множество $Z = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ является S -подсистемой. По лемме Цорна в $\mathbb{P}$ есть максимальный (минимальный по включению) элемент. □

Для $U \subset X$ и $s \in S$ полагаем $s^{-1} \cdot U = \{x \in X : s \cdot x \in U\}$.

Теорема

Для любой динамической системы X над S следующие условия равносильны:

- ① X — минимальная система над S ;
- ② для любого $x \in X$ $\bar{x} = X$ (т.е. орбита $\text{orb}(x)$ плотна в X);
- ③ для любого непустого открытого $U \subset X$ существует конечное $F \subset S$, для которого $X = \bigcup_{s \in F} s^{-1} \cdot U$.

Доказательство. ① $\Leftrightarrow$ ② очевидно.

Докажем, что ② $\Leftrightarrow$ ③. ② $\Rightarrow$ для каждого непустого открытого $U \subset X$ имеем $X = \bigcup_{s \in S} s^{-1} \cdot U$. X компактно $\Rightarrow$ ③. □

Следствие

Все минимальные динамические системы транзитивны.

Примеры

- В дискретной системе $X = [0, 1]$, $t(x) = x/2$ единственная неподвижная точка $0 \implies \{0\}$ — минимальная подсистема. $\forall x \in X$ имеем $0 \in \bar{x}$, так что $\{0\}$ — единственная минимальная подсистема.
- Для $X = [0, 1]$ и $t = x^2$ минимальные подсистемы — $\{0\}$ и $\{1\}$.
- Рассмотрим $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ с полярными координатами и действие $\mu: \mathbb{R}_{\geq 0} \times K \rightarrow K$:

$$t \cdot (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = (r \cdot e^{-t} \cos(\varphi + t), r \cdot e^{-t} \sin(\varphi + t)).$$

Для $x \in K$ $\text{orb}(x)$ — спираль $L(x)$, которая начинается в x и сходится к 0 , и $\bar{x} = L(x) \cup \{0\}$. Единственная минимальная подсистема — $\{0\}$.

- $X = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$, $x_\varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Зафиксируем $\alpha \in [0, 2\pi)$ и положим $t(x) = x \cdot x_\alpha$ (поворот на угол α).

Если $\alpha = q \cdot 2\pi$, где $q = m/n$ (несократимая дробь), то $x_\alpha^n = 1$ и $x_\alpha^k \neq 1$ для $k < n$, так что $t^n = \text{id}_X$, каждая точка $x \in X$ периодическая (орбита состоит из n точек $x \cdot x_\alpha^k$) и X — объединение минимальных подсистем $\text{orb}(x)$, $x \in X$.

Если $\alpha = p \cdot 2\pi$, где p иррационально, то $\{x_\alpha^n : n \in \omega\}$ плотно в X и все орбиты плотны, так что X — минимальная система.

- Пусть $c = \{0, \dots, r-1\}$ конечное множество цветов, и пусть $X = c^\omega$; это компакт. Функцию $x \in X$ можно рассматривать как раскраску ω . Определим сдвиг $t: X \rightarrow X$ правилом

$$t(x)(i) = x(i+1) \quad \text{для } x \in X \text{ и } i \in \omega.$$

Будем писать x_i вместо $x(i)$. Тогда t отображает $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ в $t(x) = (x_1, x_2, \dots)$. Это отображение непрерывно. Таким образом, (X, t) — дискретная динамическая система (сдвига).

Эту конструкцию можно обобщить, заменив ω на любой моноид S и сдвиг на умножение на $s \in S$:

$$X = c^S \quad \text{и} \quad s \cdot x(i) = x(i \cdot s) \quad \text{для } x \in X, s \in S \text{ и } i \in S.$$

Динамическая система βS

Если S — моноид с единицей 1_S , то βS — моноид с той же единицей 1_S .

Определение

βS — динамическая система над S относительно действия

$$\mu: S \times \beta S \rightarrow \beta S, \quad \mu(s, p) = s \cdot p.$$

Свойства

- Для $p \in \beta S$ имеем $\text{orb}(p) = \{s \cdot p : s \in S\} = S \cdot p$. Непрерывность умножения по первому аргументу $\implies \bar{p} = \beta S \cdot p$. $\implies$ Транзитивные подсистемы $\beta S =$ (замкнутые) левые идеалы $\beta S \cdot p$ полугруппы βS для $p \in \beta S$. S -подсистемы $\beta S =$ замкнутые левые идеалы βS .
- Значит, минимальные подсистемы $\beta S =$ минимальные левые идеалы полугруппы βS , т.е. идеалы $\beta S \cdot p$ для $p \in K(\beta S)$.
- $\bar{1}_S = \beta S \cdot 1_S = \beta S$. Значит, динамическая система βS транзитивна.

Определение

Пусть X и Y — динамические системы над моноидом S . Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется **S -гомоморфизмом**, или просто **гомоморфизмом**, если оно непрерывно и

$$f(s \cdot x) = s \cdot f(x)$$

для всех $x \in X$ и $s \in S$.

Теорема

Для любой динамической системы X над S и любого $x \in X$ существует единственный S -гомоморфизм $f = f_x: \beta S \rightarrow X$, переводящий 1_S в x . Образом f_x является $\bar{x}$.

В частности, любая транзитивная S -система является гомоморфным образом βS .

Доказательство. *Единственность.* Пусть f и g — S -гомоморфизмы из βS в X , отображающие 1_S в x . Тогда множество $M = \{p \in \beta S : f(p) = g(p)\}$ содержит 1_S и все $s \in S$, и M замкнуто в βS , т.е. $M = \beta S$ и $f \equiv g$.

Существование. Рассмотрим отображение $h: S \rightarrow X$, определённое правилом $h(s) = s \cdot x$, и покажем, что в качестве f_x можно взять βh . Это непрерывное отображение и $f_x(1_S) = h(1_S) = 1_S \cdot x$; нужно показать, что $f_x(s \cdot p) = s \cdot f_x(p)$ для всех $p \in \beta S$ и $s \in S$.

Это так, если $p = t \in S$, поскольку $f_x(s \cdot t) = h(s \cdot t) = (s \cdot t) \cdot x$ и $s \cdot f_x(t) = s \cdot h(t) = s \cdot (t \cdot x)$; на произвольные $p \in \beta S$ требуемое свойство распространяется по непрерывности.

Образ S при отображении h — это $S \cdot x$, т.е. орбита x в S -системе X ; значит, образ βS при f_x — замыкание орбиты x . □

Для отображения $f: S \rightarrow X$ и ультрафильтра p на S **предел f вдоль ультрафильтра p** — это такая точка $x \in X$, что для любой её окрестности U $\exists P \in p$, для которого $f(P) \subset U$. Обозначается $\lim_p f$ или $p\text{-}\lim_{s \in S} f$.

Пусть X — динамическая система над моноидом S .

- Для $p \in \beta S$ и $x \in X$ положим $p \cdot x = \lim_p s \cdot x$. Получим S -гомоморфизм, переводящий 1_S в x . Значит, это и есть f_x .
- Отображение, которое каждому $p \in \beta S$ сопоставляет $p \cdot x$ (при фиксированном x) непрерывно — это f_x . Однако отображение, которое каждому $x \in X$ сопоставляет $p \cdot x$ (при фиксированном $p \in \beta S$), вообще говоря, не непрерывно.
- Отображение $\mu: \beta S \times X \rightarrow X$, $\mu(p, x) = p \cdot x$, продолжает действие S на X (потому что $\overline{S} = \beta S$).
- В частном случае $X = \beta S$ отображение μ совпадает с умножением в βS : для $p, q \in \beta S$ $\mu(p, q) = \lim_p (s \cdot q)$.
- Утверждение теоремы, что $f_x(\beta S) = \overline{x}$, можно переписать так:
 $\overline{x} = \{p \cdot x : p \in \beta S\} = \beta S \cdot x$, так как $\overline{x} = f_x(\beta S)$ и $f_x(p) = p \cdot x$ для $p \in \beta S$.

Множества возврата и рекуррентные точки

Пусть S — моноид и X — динамическая система над S .

Определение

Для точки $x \in X$ и множества $U \subset X$ **множество возврата** точки x в U определяется так:

$$R(x, U) = \{s \in S : s \cdot x \in U\}.$$

Точка x называется **рекуррентной**, если $R(x, U) \neq \{1_S\}$ для любой окрестности U точки x .

Любое подмножество полугруппы S является множеством возврата.

Пример

Рассмотрим динамическую систему сдвига над S , где фазовое пространство X — это произведение $\{1, \dots, r\}^S$ для некоторого $r \geq 2$. Для любого $R \subset S$ найдутся x и U такие, что $R(x, U) = R$: надо выбрать $x \in X$ так, что $x(s) = 1 \iff s \in R$ (т.е. x — характеристическая функция множества R). $U = \{z \in X : z(1_S) = 1\}$ — открыто-замкнутое подмножество X . Для $s \in S$ имеем $s \in R(x, U) \iff (s \cdot x)(1_S) = 1$, т.е. $x(s) = 1$.

Пусть X — динамическая система над S , $x \in X$ и p — ультрафильтр на S (так что $p \cdot x \in X$), и пусть $U \subset X$.

- ❶ Если U — окрестность $p \cdot x$, то $R(x, U) \in p$. Действительно, $p \cdot x$ — это p -предел функции $s \cdot x$ (для фиксированного x), так что если U — окрестность $p \cdot x$, то $\exists R \in p$ такой, что $s \cdot x \in U$ при каждом $s \in R$, т.е. $R \subset R(x, U)$ и $R(x, U) \in p$.
- ❷ Если $R = R(x, U) \in p$ и U замкнуто, то $p \cdot x \in U$, потому что

$$\lim_p (s \cdot x) \in \overline{\{s \cdot x : s \in R\}} \subset U.$$
- ❸ Таким образом, если U открыто-замкнуто, то $R(x, U) \in p \iff p \cdot x \in U$.

Свойства множеств возврата и рекуррентность точек зависят от алгебраических свойств моноида S .

В дискретной динамической системе (X, t) рекуррентность точки $x \in X$ равносильна формально более сильному условию бесконечности множества

$$R(x, U) = \{k \in \omega : t^k(x) \in U\}$$

для любой окрестности U точки x .

Действительно, если x — периодическая точка, т.е. $t^k(x) = x$ для некоторого $k \geq 1$, то $\{k, 2k, 3k, \dots\} \subset R(x, U)$. Если x не периодическая, то для каждого $k \in \mathbb{N}$ можно выбрать окрестность U^k точки x , не пересекающуюся с $\{t(x), t^2(x), \dots, t^k(x)\}$, и число $n_k \in R(x, U_k)$, $n_k \geq 1$. Тогда $n_k > k$ и $\{n_k : k \geq 1\}$ — бесконечное подмножество $R(x, U)$.

Откуда берутся рекуррентные точки: 1) все периодические (в частности, неподвижные) точки; 2) если в βS есть идемпотент p , отличный от 1_S , то $\forall y \in X$ $x = p \cdot y$ — рекуррентная точка (будет доказано). Такой идемпотент существует $\iff$ в βS есть замкнутая подполугруппа, не содержащая 1_S (достаточность вытекает из теоремы о компактных полугруппах, а необходимость — из того, что $\beta S \cdot p$ — замкнутая подполугруппа βS , не содержащая 1_S : если $q \cdot p = 1_S$, то $q \cdot p \cdot p = 1_S \cdot p = p = q \cdot p$). В частности, он существует, если для любых $s, t \in S$ из $s \cdot t = 1_S$ вытекает, что либо $s = 1_S$, либо $t = 1_S$: в этом случае $A = S \setminus \{1_S\}$ — подполугруппа S и $\bar{A}$ — замкнутая подполугруппа βS .

Теорема

Пусть x — точка динамической системы над S .

- ① Точка x рекуррентна, т.е. $R(x, U) \neq \{1_S\}$ для любой её окрестности U , $\iff \exists p \in \beta S: p \neq 1_S$ и $p \cdot x = x$. Если, вдобавок, $s \cdot t \neq 1_S$ для всех $s, t \in S \setminus \{1_S\}$, то p можно выбрать идемпотентом.
- ② Множество $R(x, U)$ бесконечно для любой окрестности U точки $x \iff \exists p \in \beta S \setminus S$, для которого $p \cdot x = x$.

Доказательство. ① Пусть x — рекуррентная точка. Тогда все множества в семействе

$$\mathcal{R} = \{R(x, U) \setminus \{1_S\} : U \text{ — замкнутая окрестность } x\}$$

непусты. $\mathcal{R}$ центрировано: U и V — окрестности $x \implies$

$R(x, U \cap V) \subset R(x, U) \cap R(x, V)$. Выберем ультрафильтр $p \in \beta S$, содержащий $\mathcal{R}$.

Ясно, что $p \neq 1_S$. Для любой замкнутой окрестности U точки x имеем $p \cdot x \in U \implies p \cdot x = x$.

Обратно, пусть $p \neq 1_S$ и $p \cdot x = x$, и пусть U — любая окрестность x . Надо показать: $R(x, U) \neq \{1_S\}$. U — окрестность $p \cdot x \implies R(x, U) \in p \implies R(x, U) \setminus \{1_S\} \in p \implies R(x, U) \setminus \{1_S\} \neq \emptyset$.

Если $s \cdot t \neq 1_S$ для $s, t \in S \setminus \{1_S\}$ и $p \neq 1_S$ таково, что $p \cdot x = x$, то $T = \{p \in \beta S \setminus \{1_S\} : p \cdot x = x\}$ — замкнутая подполугруппа в $\beta S \setminus \{1_S\}$, и в качестве p можно взять идемпотент.

② Доказательство аналогично пункту ①. Если $\mathcal{R}$ состоит из бесконечных множеств, то ультрафильтр p можно выбрать свободным.



Синдетические множества возврата

Пусть X — динамическая система над S , $U \subset X$ и $x \in X$.

① Для любого $t \in S$ $t^{-1} \cdot R(x, U) = R(x, t^{-1} \cdot U)$.

② Для любого $E \subset S$

$$S \cdot x \subset \bigcup_{t \in E} t^{-1} \cdot U \iff S = \bigcup_{t \in E} t^{-1} \cdot R(x, U).$$

③ Если $t, s \in S$ и $s = t \cdot y$, то

$$t^{-1} \cdot R(x, y^{-1} \cdot U) = s^{-1} \cdot R(x, U).$$

④ Если $E \subset S$, $y \in S$ и $F = E \cdot y$, то

$$\bigcup_{t \in E} t^{-1} \cdot R(x, y^{-1} \cdot U) = \bigcup_{s \in F} s^{-1} \cdot R(x, U).$$

Теорема

Для любой точки x динамической системы X над S и любого минимального левого идеала L в βS следующие условия равносильны:

- ① множество $R(x, U)$ синдетическое для любой окрестности U точки x ;
- ② замыкание $\bar{x}$ орбиты x — минимальная подсистема в X ;
- ③ существует минимальная подсистема X , содержащая x ;
- ④ существует $p \in L$ такой, что $x = p \cdot x$;
- ⑤ существует идемпотент $e \in L$ такой, что $x = e \cdot x$;
- ⑥ существуют идемпотент $e \in L$ и точка $y \in X$ такие, что $x = e \cdot y$;
- ⑦ существуют $r \in K(\beta S)$ и $y \in X$ такие, что $x = r \cdot y$.

Доказательство. ② $\Leftrightarrow$ ③: очевидно.

③ $\Rightarrow$ ①: Пусть M — минимальная подсистема X и $x \in M$. Тогда $M = \beta S \cdot x$. Возьмём окрестность U точки x и конечное $F \subset S$, для которого $M \subset \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot U$.

Имеем $S = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot R(x, U) \Rightarrow R(x, U)$ синдетическое.

① $\Rightarrow$ ②: Пусть x — такая точка, что $R(x, U)$ синдетическое для любой её окрестности U . Покажем: $M = \bar{x}$ — минимальная подсистема. Рассмотрим открытое $V \subset X$, пересекающее M . Выберем открытое $W \subset X$ такое, что $\overline{W} \subset V$ и $W \cap M \neq \emptyset$. $M = \bar{x} \Rightarrow \exists r \in S$ такое, что $r \cdot x \in W$. $\Rightarrow U = r^{-1} \cdot W$ — открытая окрестность x . По предположению $R(x, U)$ синдетическое, т.е. $S = \bigcup_{t \in E} t^{-1} \cdot R(x, U)$ для конечного $E \subset S$. Для $F = E \cdot r$ имеем

$$S = \bigcup_{t \in E} t^{-1} \cdot R(x, r^{-1} \cdot W) = \bigcup_{s \in F} s^{-1} \cdot R(x, W) \subset \bigcup_{s \in F} s^{-1} \cdot \overline{W}.$$

$$\Rightarrow S \cdot x \subset \bigcup_{s \in F} s^{-1} \cdot \overline{W}. \quad \overline{W} \text{ замкнуто} \Rightarrow$$

$$M = \beta S \cdot x \subset \bigcup_{s \in F} s^{-1} \cdot \overline{W} \subset \bigcup_{s \in F} s^{-1} \cdot V.$$

Лемма

Пусть X и Y — динамические системы над S , $f: X \rightarrow Y$ — S -гомоморфизм, Z и T — подсистемы X и Y . Тогда

- а) $f(Z)$ — подсистема Y и $f^{-1}(T)$ — подсистема X ;
- б) если система Y минимальна, то f сюръективно;
- в) если подсистема Z системы X минимальна, то подсистема $f(Z)$ системы Y тоже минимальна.

Доказательство. Утверждения а) и б) проверяются непосредственно.

в): Рассмотрим $f|_Z$. Это S -гомоморфизм из Z на $f(Z)$. Для любой собственной подсистемы T системы $f(Z)$ прообраз T при $f|_Z$ — собственная подсистема Z .

Противоречие. □

② $\Rightarrow$ ④: Рассмотрим минимальную подсистему $M = \bar{x}$ системы X и S -гомоморфизм $f: \beta S \rightarrow X$, отображающий 1_S в x . Имеем $f(q) = q \cdot x$ для каждого $q \in \beta S$. L — подсистема βS и M — минимальная подсистема X . Лемма $\Rightarrow f|_L$ отображает L на M . Для $p \in L$ такого, что $f(p) = x$, имеем $p \cdot x = x$.

④ $\Rightarrow$ ⑤: Пусть $p \in L$ и $p \cdot x = x$. Тогда множество $G = \{r \in L : r \cdot x = x\}$ непусто и является замкнутой подполугруппой в L . Можно взять любой идемпотент.

⑦ $\Rightarrow$ ③: Пусть $x = r \cdot y$, где $y \in X$ и $r \in K(\beta S)$. Рассмотрим минимальный левый идеал L' , содержащий r , и S -гомоморфизм $f: \beta S \rightarrow X$, действующий по правилу $f(q) = q \cdot y$ для $q \in \beta S$. Поскольку L' — минимальная подсистема системы βS , её образ $M = f(L')$ — минимальная подсистема X (по лемме), причём $r \in L'$, так что $x = r \cdot y = f(r) \in M$. □

Следствие

Транзитивная динамическая система минимальна $\iff$ все множества $R(x, U)$ синдетические.

③ $\implies$ существование точек, для которых все $R(x, U)$ синдетические.

В универсальной динамической системе βS минимальные подсистемы — минимальные левые идеалы $\implies$ точки, для которых все множества возврата синдетические = точки из $K(\beta S)$. $\implies$ Если $A \in p$ для некоторого $p \in K(\beta S)$, то множество точек возврата p в A синдетическое.

Минимальность и рекуррентность в дискретных системах

Следствие

- ❶ Если дискретная динамическая система (X, t) минимальна, то для любого открытого множества $U \subset X$ и любой точки $x \in U$ множество $R(x, U)$ синдетическое.
- ❷ Если (X, t) — транзитивная дискретная динамическая система и для любого открытого множества $U \subset X$ и любой точки $x \in U$ множество $R(x, U)$ синдетическое, то (X, t) минимальна.

Пусть $A \subset \mathbb{N}$. Характеристическая функция χ_A множества A — это точка в компактном пространстве $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Некоторые свойства A можно описать в терминах динамической системы $(\bar{\chi}_A, T)$, где T — сдвиг.

Теорема

Множество $A \subset \mathbb{N}$ кусочно синдетическое $\iff$ динамическая система $(\bar{\chi}_A, T)$ содержит минимальную подсистему, не совпадающую с $\{(0, 0, \dots)\}$.

Лемма

$A \subset \mathbb{N}$ кусочно синдетическое $\iff \exists$ синдетическое $S \subset \mathbb{N}$ такое, что для любого конечного $F \subset S$ найдётся $m = m_F \in \mathbb{N}$ с тем свойством, что $F + m_F \subset A$.

Доказательство. $\Leftarrow$: Пусть $\mathcal{F} = \{\text{все непустых конечных подмножества } \mathbb{N}\}$, $F_1 \subset \mathbb{N}$ и $S - F_1 = \bigcup_{t \in F_1} -t + S = \mathbb{N}$. Положим

$$T = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (F + m_{(F+F_1) \cap S}) \quad \text{и} \quad S' = A \cup \mathbb{N} \setminus T.$$

Ясно, что $A \supset S' \cap T$ и T толстое, так что достаточно доказать, что S' синдетическое. Покажем, что $S' - F_1 = \mathbb{N}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если $n \notin S'$, то $n \in T$, $\implies \exists F \in \mathcal{F}$ такое, что $n \in F + m_{(F+F_1) \cap S}$. Пусть $l \in F_1$ таково, что $n - m_{(F+F_1) \cap S} + l \in S$. Тогда $n - m_{(F+F_1) \cap S} + l \in (F + F_1) \cap S \implies n + l \in ((F + F_1) \cap S) + m_{(F+F_1) \cap S} \implies n + l \in A \subset S'$.

$\Rightarrow$: Пусть $A = S' \cap T$, где S' синдетическое и T толстое, и пусть $S' - F = \mathbb{N}$, где $F \subset \mathbb{N}$ конечно. Положим $F_1 = F$ и $F_i = F_{i-1} + F$ для $i \in \mathbb{N}$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ выберем $n_i \in \mathbb{N}$ так, что $n_i + s_j \in S'$. Построим последовательности $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $s_j \in F_j$, и $\mathbb{N} \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ такие, что для любых $j \in \mathbb{N}$ и $i \in I_j$ имеем $n_i + s_j \in S'$. Для $j \geq i$ имеем $n_i + s_j \in T \Rightarrow n_i + s_j \in A$. Шаг 1: найдём бесконечное $I_1 \subset \mathbb{N}$ и $I_1 \in F$ такие, что для каждого $i \in I_1$ имеем $n_i + I_1 \in S'$. Положим $s_1 = I_1$. Шаг $j > 1$: выберем бесконечное $I_j \subset I_{j-1}$ и $I_j \in F$ такие, что для всех $i \in I_j$ имеем $n_i + I_1 + \dots + I_{j-1} + I_j \in S'$, и положим $s_j = s_{j-1} + I_j$. Положим $S = \{s_1, s_2, \dots\}$.

Ясно, что S синдетическое (любые два последовательных элемента отличаются не более чем на $\max F$). Если $G \subset S$ конечно, т.е. $G \subset \{s_1, \dots, s_j\}$, где $j \in \mathbb{N}$, то для всякого $i \in I_j$, $j > i$, имеем $n_i + s_k \in A$ при $k \leq j$. Значит, $n_i + G \subset A$. □

Доказательство теоремы. Пусть $A \subset \mathbb{N}$ кусочно синдетическое. Лемма $\implies \exists$ синдетическое $S \subset \mathbb{N}$ такое, что $\forall$ конечного $F \subset S \exists m \in \mathbb{N}$ со свойством $F + m \subset A$. Для $n \in \mathbb{N}$ пусть $m_n \in \mathbb{N}$ таково, что $(S \cap \{1, \dots, n\}) + m_n \subset A$. Тогда $T^{m_n} \chi_A(k) \geq \chi_S(k)$ для каждого $k \leq n$. Значит, если $x \in X$ — любая предельная точка последовательности $T^{m_n} \chi_A$, то $x \geq \chi_S(k) \implies x$ — характеристическая функция синдетического множества. Пусть Y — любая минимальная система, содержащаяся в $\bar{x}$; тогда $Y \subset \bar{\chi}_A$. Покажем, что $(0, 0, \dots) \notin \bar{x}$. Положим $R = \{n \in \mathbb{N} : x(n) = 1\}$ и возьмём $F \subset \mathbb{N}$, для которого $\mathbb{N} = R - F$. Пусть $U = \{y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : y|_F \equiv 0\}$. Это окрестность точки $(0, 0, \dots)$. Предположим, что $T^n x \in U$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x(n + m) = 0$ для каждого $m \in F$ в противоречие с тем, что $n = r - m$ для некоторых $r \in R$ и $m \in F$.

Обратно, пусть (X, T) — минимальная подсистема в $(\bar{\chi}_A, T)$, не совпадающая с $\{(0, 0, \dots)\}$. Положим $U = \{y \in X : y(1) = 1\}$. Это непустое открытое множество. Возьмём $x \in U$ и положим $S = \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\} = R(x, U)$. X минимальна $\implies S$ синдетическое. Лемма $\implies$ достаточно показать, что любое конечное $F \subset S$ можно сдвинуть в A . Положим $V = \{y \in X : y(n + 1) = 1 \text{ для } n \in F\}$. Это открытая окрестность x . Поскольку $x \in \bar{\chi}_A$, $\exists m \in \mathbb{N}$, для которого $T^m \chi_A \in V$. Значит, $F + m \subset A$. □

Порядок Рудин–Кейслера

Порядок Рудин–Кейслера — это отношение (классов) $\leq_{\text{RK}}$ на классе всех ультрафильтров, которое определяется так: если $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве X и $\mathcal{V}$ — ультрафильтр на множестве Y , то

$\mathcal{V} \leq_{\text{RK}} \mathcal{U}$ означает, что $\exists f \in Y_X$ такое, что $\mathcal{V} = \beta f(\mathcal{U})$.

Если существуют $U \in \mathcal{U}$ и $f: X \rightarrow Y$ такие, что $f|_U$ взаимно однозначно и $\beta f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, то мы говорим, что ультрафильтры $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ **эквивалентны**, и пишем $\mathcal{U} \equiv_{\text{RK}} \mathcal{V}$.

- Отношение $\leq_{\text{RK}}$ рефлексивно и транзитивно.
- Отношение $\equiv_{\text{RK}}$ является отношением эквивалентности.

Отношение $\leq_{\text{RK}}$ — порядок на классах эквивалентных ультрафильтров (эти классы называются **типами** ультрафильтров).

Лемма

Пусть α — кардинал и $f: \alpha \rightarrow \alpha$ таково, что $f(\beta) \neq \beta$ для $\beta < \alpha$. Тогда найдутся множества $A_0, A_1, A_2 \subset \alpha$ такие, что

- ❶ $\alpha = A_0 \cup A_1 \cup A_2$;
- ❷ $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i, j \leq 2, i \neq j$, и
- ❸ $A_i \cap f(A_j) = \emptyset$ для $i \leq 2$.

Доказательство. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на α :

$$\xi \sim \zeta \iff f^n(\xi) = f^m(\zeta) \quad \text{для некоторых } m, n < \omega.$$

Пусть $\mathcal{R}$ — множество $\sim$ -классов. Ясно, что если $R \in \mathcal{R}$, то $f(R) \subset R$. Для $R \in \mathcal{R}$ есть две возможности.

Случай 1: Найдутся $\xi_R \in R$ и $n > 0$, для которых $f^n(\xi_R) = \xi_R$. Положим

$$n_R = \min\{n < \omega : n > 0 \text{ и } f^n(\xi_R) = \xi_R\} \quad \text{и} \quad C_R = \{f^k(\xi_R) : k < n_R\}.$$

Если $\xi \in R \setminus C_R$, то $\exists k < n_R$ и $m < \omega$: $f^m(\xi) = f^k(\xi_R)$. Для $\xi \in R \setminus C_R$ положим

$$k(\xi) = \min\{k < n_R : \exists m < \omega \text{ такое, что } f^m(\xi) = f^k(\xi_R)\},$$

$$m(\xi) = \min\{m < \omega : f^m(\xi) = f^{k(\xi)}(\xi_R)\}.$$

Покажем, что

$$\text{если } \xi \in R \setminus C_R \text{ и } m(\xi) > 1, \text{ то } k(f(\xi)) = k(\xi) \text{ и } m(f(\xi)) = m(\xi) - 1. \quad (\star)$$

Ясно, что $k(\xi) \leq k(f(\xi))$, и из равенства $f^{k(\xi)}(\xi_R) = f^{m(\xi)-1}(f(\xi))$ следует, что

$k(f(\xi)) \leq k(\xi)$; ясно также, что $m(\xi) \leq m(f(\xi)) + 1$, и из равенства

$f^{k(f(\xi))}(\xi_R) = f^{k(\xi)}(\xi_R) = f^{m(\xi)-1}(f(\xi))$ следует, что $m(f(\xi)) \leq m(\xi) - 1$.

Положим

$$A_{R,0} = \{f^k(\xi_R) : k \text{ чётно и } k < n_R - 1\} \cup \{\xi \in R \setminus C_R : k(\xi) + m(\xi) \text{ чётно}\},$$

$$A_{R,1} = \{f^k(\xi_R) : k \text{ нечётно и } k < n_R - 1\} \cup \{\xi \in R \setminus C_R : k(\xi) + m(\xi) \text{ нечётно}\},$$

$$A_{R,2} = \{f^{n_R-1}(\xi)\}.$$

Имеем $R = A_{R,0} \cup A_{R,1} \cup A_{R,2}$ и $A_{R,i} \cap A_{R,j} = \emptyset$ для $i, j \leq 2, i \neq j$.

Если $\xi \in A_{R,i}$ и либо $\xi \in C_R$, либо $\xi \in R \setminus C_R$ и $m(\xi) = 1$, то $f(\xi) \notin A_{R,i}$ для $i \leq 2$.

То, что $f(\xi) \notin A_{R,i}$, если $\xi \in A_{R,i} \setminus C_R$ и $m(\xi) > 1$, вытекает из $(\star)$ для $i \leq 2$.

Случай 2: Случай 1 не имеет места. Пусть $\xi_R \in R$; тогда $\forall \xi \in R \exists k, m < \omega$ такие, что $f^m(\xi) = f^k(\xi_R)$. Для $\xi \in R$ положим

$$k(\xi) = \min\{k < \omega : \exists m < \omega \text{ такое, что } f^m(\xi) = f^k(\xi_R)\},$$

$$m(\xi) = \min\{m < \omega : f^m(\xi) = f^{k(\xi)}(\xi_R)\}.$$

Если $m(\xi) = 0$, то $m(f(\xi)) = 0$ и $k(f(\xi)) = k(\xi) + 1$.

Если $m(\xi) > 0$, то $m(f(\xi)) = m(\xi) - 1$ и $k(f(\xi)) = k(\xi)$.

Вывод: $k(\xi) + m(\xi)$ чётно $\iff k(f(\xi)) + m(f(\xi))$ нечётно.

Положим

$$A_{R,0} = \{\xi \in R : k(\xi) + m(\xi) \text{ чётно}\},$$

$$A_{R,1} = \{\xi \in R : k(\xi) + m(\xi) \text{ нечётно}\},$$

$$A_{R,2} = \emptyset.$$

Имеем $R = A_{R,0} \cup A_{R,1} \cup A_{R,2}$, $A_{R,i} \cap A_{R,j} = \emptyset$ для $i, j \leq 2$, $i \neq j$, и

$A_{R,i} \cap f(A_{R,i}) = \emptyset$ для $i \leq 2$.

Положим $A_i = \bigcup\{A_{R,i} : R \in \mathcal{R}\}$ для $i \leq 2$.



Лемма

Пусть α — кардинал, $f: \alpha \rightarrow \alpha$ и $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на α . Тогда

- ① $\beta f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \iff \{\xi < \alpha : f(\xi) = \xi\} \in \mathcal{U};$
- ② $\beta f(\mathcal{U}) \equiv_{\text{RK}} \mathcal{U} \iff$ существует биекция $\pi: \alpha \xrightarrow{\sim} \alpha$ такая, что $\beta\pi(\beta(\mathcal{U})) = \mathcal{U}.$

① Положим $A = \{\xi < \alpha : f(\xi) = \xi\}$. Отображения βf и id_A непрерывны и совпадают на $A \implies$ они совпадают на $\bar{A}$. Если $A \in \mathcal{U}$, то $\mathcal{U} \in \bar{A}$ и $\beta f(\mathcal{U}) = \text{id}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Пусть $A \notin \mathcal{U}$. Тогда $\alpha \setminus A \in \mathcal{U}$ и $f(\xi) \neq \xi$ для $\xi \in \alpha \setminus A$. Будем считать, что $A = \emptyset$. Предыдущая лемма $\implies \exists A_0, A_1, A_2 \subset \alpha$ такие, что $\alpha = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i, j \leq 2$, $i \neq j$, и $A_i \cap f(A_j) = \emptyset$ для $i \leq 2$. $\alpha \in \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}$ — ультрафильтр $\implies A_i \in \mathcal{U}$ для $i = 1, 2$ или 3 . Имеем $\mathcal{U} \in \bar{A}_i$, f непрерывно $\implies \beta f(\mathcal{U}) \in \overline{f(A_i)} \subset \bigcup \{A_j : j \leq 2, j \neq i\}$ $\beta f(\mathcal{U}) \neq \mathcal{U}$.

② Пусть $\exists \pi : \alpha \rightleftarrows \alpha$ такая, что $\beta \pi(\beta f(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. Имеем $\beta(\pi \circ f)(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \implies A = \{\xi < \alpha : \pi \circ f(\xi) = \xi\} \in \mathcal{U}$. $f|_A$ взаимно однозначно.

Пусть $\exists A \in \mathcal{U}$: $f|_A$ взаимно однозначно. Если $\mathcal{U} \in \alpha$ ($\mathcal{U}$ главный), то $\beta f(\mathcal{U}) = f(\mathcal{U}) \in \alpha \implies \mathcal{U} \equiv_{\text{RK}} \beta f(\mathcal{U})$. Если $\mathcal{U} \in \beta \alpha \setminus \alpha$, то A бесконечно $\implies \exists A_0, A_1 \subset A$ такие, что $A = A_0 \cup A_1$, $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, $|A| = |A_0| = |A_1|$ и $A_0 \in \mathcal{U}$. Имеем $|\alpha \setminus A_0| = |\alpha \setminus f(A_0)|$ и если π — биекция, $\pi(\alpha \setminus A_0) = \alpha \setminus f(A_0)$ и $\pi|_{A_0} = f|_{A_0}$, то $\pi(\mathcal{U}) = \beta f(\mathcal{U})$ и $\pi^{-1}(f(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. □

Теорема

Ультрафильтры $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ на α эквивалентны $\iff \mathcal{U} \leq_{\text{RK}} \mathcal{V}$ и $\mathcal{V} \leq_{\text{RK}} \mathcal{U}$.

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{U} \equiv_{\text{RK}} \mathcal{V} \implies \mathcal{U} \leq_{\text{RK}} \mathcal{V}$ и $\mathcal{V} \leq_{\text{RK}} \mathcal{U}$.

Если $\mathcal{U} \leq_{\text{RK}} \mathcal{V}$ и $\mathcal{V} \leq_{\text{RK}} \mathcal{U}$, то $\exists f, g: \alpha \rightarrow \alpha$ такие, что $\beta f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ и $\beta f(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Значит, $\beta(g \circ f)(\mathcal{U}) = \beta g(\beta f(\mathcal{U})) = \beta g(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$, и по лемме

$$A = \{\xi < \alpha : g \circ f(\xi) = \xi\} \in \mathcal{U}.$$



Определение

Ультрафильтр $\mathcal{U}$ на ω называется

- **P -ультрафильтром**, если для любого разбиения $\{A_n : n \in \omega\}$, где $A_n \notin \mathcal{U}$ для каждого n , существует элемент $A \in \mathcal{U}$ такой, что $|A \cap A_n| < \aleph_0$ для каждого n ;
- **Q -ультрафильтром**, если для любого разбиения $\{A_n : n \in \omega\}$, где все A_n конечны, существует элемент $A \in \mathcal{U}$ такой, что $|A \cap A_n| \leq 1$ для каждого n ;
- **рамсеевским (селективным)**, если он $P + Q$: для любого разбиения $\{A_n : n \in \omega\}$, где $A_n \notin \mathcal{U}$ для каждого n , существует элемент $A \in \mathcal{U}$ такой, что $|A \cap A_n| \leq 1$ для каждого n ;
- **быстрым**, если для любого разбиения $\{A_n : n \in \omega\}$, где все A_n конечны, существует элемент $A \in \mathcal{U}$ такой, что $|A \cap A_n| \leq n$ для каждого $n \iff$ всякая функция $\omega \rightarrow \omega$ мажорируется возрастающей нумерацией некоторого элемента ультрафильтра $\mathcal{U}$.

Замечание

Ультрафильтр $\mathcal{U}$ на $\mathbb{N}$ селективен $\iff \forall f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ либо $\exists A \in \mathcal{U}$ такой, что $f|_A = \text{const}$, либо $\exists A \in \mathcal{U}$ такой, что $f|_A$ взаимно однозначно. Аналогично для P - и Q -ультрафильтров.

Замечание

Неглавный ультрафильтр $\mathcal{U}$ на $\mathbb{N}$ является P -ультрафильтром $\iff$ он является P -точкой в $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, т.е. если $U_1, U_2, \dots$ — окрестности $\mathcal{U}$ в $\mathbb{N}^*$, то $\bigcap U_n$ — тоже окрестность $\mathcal{U}$ (см. доказательство ниже).

$\text{CH} \implies \exists$ селективные ультрафильтры, $P \neq Q \neq$ селективность $\neq P$

$\text{ZFC} \implies \exists$ ультрафильтр, который не является ни P -ультрафильтром, ни Q -ультрафильтром

Shelah: Существует модель ZFC в которой $\nexists P$ -ультрафильтры

Miller: Существует модель, в которой $\nexists Q$ -ультрафильтры (но $\exists P$ -points)

Старая проблема: Существует ли модель ZFC , в которой нет ни P -ультрафильтров, ни Q -ультрафильтров?

Теорема

- ① Если $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ селективен и $\mathcal{V} \leq_{\text{RK}} \mathcal{U}$, то $\mathcal{V} \equiv_{\text{RK}} \mathcal{U}$.
- ② Любой $\leq_{\text{RK}}$ -минимальный ультрафильтр на $\mathbb{N}$ селективен.

Доказательство. ① $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что $\beta f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ селективен $\implies \exists A \in \mathcal{U}$ такой, что сужение $f|_A$ постоянно или взаимно однозначно. Если $f|_A$ постоянно, то $f(\mathcal{U})$ главный — противоречие.

② Пусть $\mathcal{U}$ — $\leq_{\text{RK}}$ -минимальный ультрафильтр на $\mathbb{N}$, и пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — любое отображение. Поскольку $\beta f(\mathcal{U}) \leq_{\text{RK}} \mathcal{U}$, существует $A \in \mathcal{U}$, для которого $f|_A$ взаимно однозначно. □

Вместо $\leq_{\text{RK}}$ -минимальный, $\leq_{\text{RK}}$ -несравнимый и т.п. обычно пишут просто RK-минимальный, RK-несравнимый и т.п.

Теорема Рамсея

Пусть $k, m \in \mathbb{N}$ и $[\mathbb{N}]^k$ — множество всех k -элементных подмножеств $\mathbb{N}$. Для любой раскраски $c: [\mathbb{N}]^k \rightarrow \{1, \dots, m\}$ существует бесконечное **однородное** множество $A \subset \mathbb{N}$ (т.е. такое, что $[A]^k$ одноцветно).

Доказательство. Положим $C_i = c^{-1}(i)$. Применим индукцию по k . Для $k = 1$ верно. Пусть верно для n и $k = n + 1$. Выберем $n_0 \in \mathbb{N}$. Теорема для $k = n \implies \exists$ бесконечное $A_0 \subset \mathbb{N}$ и $i_0 \leq m$, для которых $F \in [A_0]^n \implies (\{n_0\} \cup F) \in C_{i_0}$. Выберем $n_1 \in A_0$ Получаем бесконечные $A_0 \supset A_1 \supset \dots$, $n_i \in A_{i-1}$ и $i_0, i_1, \dots \leq m$ такие, что $\forall F \in [A_j]^n$ имеем $(\{n_j\} \cup F) \in C_{i_j}$. Найдём $i \leq m$ и бесконечное $J \subset \mathbb{N}$ такие, что $i_j = i$ для всех $j \in J$. Ясно, что $\{n_j : j \in J\}$ — бесконечное множество, все k -элементные подмножества которого принадлежат C_i . □

Определение

Ультрафильтр $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ называется **рамсеевским**, если для любых $k, m \in \mathbb{N}$ и любой раскраски $c: [\mathbb{N}]^k \rightarrow \{1, \dots, m\}$ существует $A \in \mathcal{U}$ такое, что $c|_{[A]^k} = \text{const}$. (Такие множества A называются **однородными**, или **c-однородными**.)

Определение

Ультрафильтр $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ называется **селективным**, если для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$, где $C_i \notin \mathcal{U}$, существует **селектор** в $\mathcal{U}$, т.е. множество $A \in \mathcal{U}$ такое, что $|A \cap C_i| = 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Эквивалентное условие: для любого отображения $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ либо существует $A \in \mathcal{U}$ такое, что $f|_A = \text{const}$, либо существует $A \in \mathcal{U}$ такое, что $f|_A$ взаимно однозначно.

Теорема

Для ультрафильтра $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ следующие условия равносильны:

- 1 $\mathcal{U}$ рамсеевский;
- 2 у любой последовательности $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ элементов $\mathcal{U}$ имеется **квазидиагональное пересечение** в $\mathcal{U}$, т.е. множество $A \in \mathcal{U}$ такое, что для любых $i, j \in A$, $i < j$, выполнено условие $j \in A_i$;
- 3 $\mathcal{U}$ селективный.

1 $\Rightarrow$ 3: Пусть $\mathcal{U}$ — рамсеевский ультрафильтр на $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$, где $C_i \notin \mathcal{U}$.

Рассмотрим раскраску $c: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$, определённую правилом: $c(\{i, j\}) = 1$ для $i < j$ тогда и только тогда, когда $i \in C_n$, $j \in C_m$ и $n < m$. Пусть $A \in \mathcal{U}$ — однородное множество. Предположим, что $c|_{[A]^2} \equiv 0$. Положим $k = \min(A)$. Пусть $k \in C_n$. Для каждого $i \in A$, $i \neq k$, имеем $i \in C_1 \cup \dots \cup C_n$. Значит, $\exists A' \subset A$, $A' \in \mathcal{U}$, такое, что $A' \subset C_m$ для некоторого $m < n$, т.е. $C_m \in \mathcal{U}$. Это противоречие доказывает, что $c|_{[A]^2} \equiv 1$. Очевидно, A — селектор.

③ $\Rightarrow$ ②: Пусть A_i , $i \in \mathbb{N}$, — элементы $\mathcal{U}$. Будем считать, что $A_{i+1} \subset A_i$. Используя селективность $\mathcal{U}$ применительно к разбиению на множества $C_i = A_{i-1} \setminus A_i$ (где $A_0 = \mathbb{N}$), найдём $B \in \mathcal{U}$ такой, что $B \setminus A_i$ конечно для всех i . Пусть $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, $b_n < b_{n+1}$. Положим

$$f(m) = \min\{n : B \setminus A_m \subset \{1, \dots, b_n\}\}$$

для $m \in \mathbb{N}$. Получили функцию $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Положим $C_0 = \mathbb{N} \setminus B$ и $C_{k+1} = \{b \in B : f^k(1) < b \leq f^{k+1}(1)\}$, где $f^0 \equiv 0$, $f^1 = f$ и $f^{k+1} = f \circ f^k$. В силу селективности $\exists A' \in \mathcal{U}$ такое, что $|A' \cap C_i| = 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Пусть $A' = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $a_{n+1} > a_n$. Предположим для определённости, что $A = \{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}$ (когда $\{a_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}$, рассуждения аналогичны). Если $i, j \in A$, $i < j$, то $j \in B$ и $j > f(i)$ (по построению), откуда $j \in A_i$.

② $\Rightarrow$ ①: Индукция по k . Пусть $k > 1$ и для меньших k верно. Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим раскраску $c_n : [\mathbb{N}]^{k-1} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, определённую правилом: $c_n(\{n_1, \dots, n_{k-1}\}) = c(\{n\} \cup \{n_1, \dots, n_{k-1}\})$, если $n \notin \{n_1, \dots, n_k\}$, и $c_n(\{n_1, \dots, n_{k-1}\}) = 1$, если $n \in \{n_1, \dots, n_k\}$. По предположению $\forall n \in \mathbb{N} \exists A_n \in \mathcal{U}$ и $j_n \in \{1, \dots, m\}$ такие, что $c_n|_{[A_n]^{k-1}} = j_n$. Можно считать, что $\min(A_n) > n$ и $A_{n+1} \subset A_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Найдём $A \in \mathcal{U}$ и $j \leq m$ такие, что $j_n = j$ для всех $n \in A$ и A — квазидиагональное пересечение для $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ясно, что A однородно. □

Замечание

Из доказательства теоремы видно, что ультрафильтр $\mathcal{U}$ на $\mathbb{N}$ рамсеевский $\iff$ для любой раскраски $c: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ существует $A \in \mathcal{U}$ такое, что $c|_{[A]^2} = \text{const}$.

Теорема

$CH \implies \exists$ неглавный рамсеевский ультрафильтр на $\mathbb{N}$.

Перенумеруем все раскраски $c: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ как $\{c_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Возьмём бесконечное c_0 -однородное $A_0 \subset \mathbb{N}$. Пусть $\alpha > 0$ и мы уже построили бесконечные множества A_β , $\beta < \alpha$, так, что

- если $\beta, \gamma < \alpha$ и $\beta < \gamma$, то $A_\gamma \subset^* A_\beta$ (т.е. $A_\gamma \setminus A_\beta$ конечно);
- если $\beta < \alpha$, то A_β c_β -однородно.

Пусть $A'_\alpha \subset^* A_\beta \ \forall \beta < \alpha$ (перенумеруем все A_β как A_{β_n} , $n \in \mathbb{N}$, и выберем по точке в каждом пересечении $\bigcap_{n \leq k} A_{\beta_n}$, $k \in \mathbb{N}$). $\exists$ c_α -однородное бесконечное $A_\alpha \subset A'_\alpha$.

Центрированное семейство $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ содержит c -однородное множество для любой раскраски $c: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0, 1\}$. Ультрафильтр, содержащий это семейство, искомым. □

Если CH не выполнена, рамсеевские ультрафильтры могут не существовать.

Shelah: существует модель ZFC, в которой нет P -ультрафильтров на $\mathbb{N}$.

Miller: существует модель ZFC, в которой

- нет быстрых фильтров на $\mathbb{N}$;
- ультрафильтр $\mathcal{U}$ является P -ультрафильтром $\iff$ он имеет базу мощности $\aleph_1$;
- любые два ультрафильтра на $\mathbb{N}$ почти когерентны, т.е. $\forall$ неглавных ультрафильтров $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ существует конечнократное отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такое, что $\beta f(\mathcal{U}) = \beta f(\mathcal{V})$;
- в частности, для любого ультрафильтра $\mathcal{U}$ на $\mathbb{N}$ существуют P -ультрафильтр $\mathcal{V}$ и конечнократное отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что $\beta f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

Замечание

Пусть $\forall f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — любое отображение. Если $\mathcal{U}$ — селективный ультрафильтр на $\mathbb{N}$, то $\beta f(\mathcal{U})$ селективный, если $\mathcal{U}$ — P -ультрафильтр, то $\beta f(\mathcal{U})$ тоже, если f конечнократно и $\mathcal{U}$ — быстрый или Q -ультрафильтр, то βf тоже.

(Достаточно рассмотреть разбиение прообраза $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(C_i)$ для любого разбиения образа $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$.)

Теорема

Каждое бесконечное замкнутое множество $F \subset \beta\mathbb{N}$ содержит подмножество, гомеоморфное $\beta\mathbb{N}$.

Доказательство. $\beta\mathbb{N} \in T_2 \implies \exists$ точка $x_1 \in F$, у которой есть открытая в $\beta\mathbb{N}$ окрестность U_1 с бесконечным дополнением $F \setminus U_1$ в F . Найдём окрестность V_1 точки x_1 в $\beta\mathbb{N}$, для которой $\overline{V_1} \subset U_1$ Найдём последовательности точек $x_1, x_2, \dots \in F$ и открытых множеств $V_1, V_2, \dots$ в $\beta\mathbb{N}$ такие, что $x_i \in V_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $V_i \cap V_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Положим $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. X дискретно. Покажем, что $\overline{X} = \beta X$, т.е. любая непрерывная функция $X \rightarrow [0, 1]$ продолжается на $\overline{X}$.

Для $g: X \rightarrow [0, 1]$ функция $g_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$:

$$g_{\mathbb{N}}(n) = \begin{cases} g(x_i), & \text{если } n \in \mathbb{N} \cap V_i, \\ 0, & \text{если } n \in \mathbb{N} \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i, \end{cases}$$

имеет непрерывное продолжение $\hat{g}_{\mathbb{N}}: \beta\mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$. $\overline{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N} \implies \forall i \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{V_i} = \overline{V_i} \cap \overline{\mathbb{N}}$. Постоянная функция на $\overline{V_i}$, равная $g(x_i)$, совпадает с $\hat{g}_{\mathbb{N}}|_{\overline{V_i}} \implies \hat{g}_{\mathbb{N}} \equiv g(x_i)$ на $\overline{V_i}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Значит, $\hat{g}_{\mathbb{N}}|_X = g$, и сужение $\hat{g} = \hat{g}_{\mathbb{N}}|_{\overline{X}}$ является непрерывным продолжением функции g на $\overline{X}$. □

Предложение

$$|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\aleph_0}}.$$

Доказательство. Рассмотрим тихоновский куб $[0, 1]^{2^{\aleph_0}}$ (он как раз имеет мощность $2^{2^{\aleph_0}}$). По теореме Хьюитта–Марчевского–Пондицери $[0, 1]^{2^{\aleph_0}}$ содержит счётное плотное множество A . Как-нибудь перенумеруем его элементы: $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]^{2^{\aleph_0}}$, определённое правилом $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывно (потому что $\mathbb{N}$ дискретно); значит, оно продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}: \beta\mathbb{N} \rightarrow [0, 1]^{2^{\aleph_0}}$, причём продолжение сюръективно, поскольку непрерывный образ компакта $\beta\mathbb{N}$ должен быть компактен и, значит, замкнут в $[0, 1]^{2^{\aleph_0}}$, а наименьшее замкнутое подмножество куба $[0, 1]^{2^{\aleph_0}}$, содержащее плотное множество $A = f(\mathbb{N}) \subset \hat{f}(\beta\mathbb{N})$ — это сам куб. Значит, $|\beta\mathbb{N}| \geq 2^{2^{\aleph_0}}$.

Пространство $\beta\mathbb{N}$ хаусдорфово $\implies \forall x \in \beta\mathbb{N}$ имеем $\{x\} = \bigcap \{\bar{U} : U \text{ — открытая окрестность } x\}$. Для любого открытого $U \subset \beta\mathbb{N}$ имеем $\bar{U} = \overline{U \cap \mathbb{N}} \implies \{x\} = \bigcap \{\overline{U \cap \mathbb{N}} : U \text{ — открытая окрестность } x\}$. Значит, $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{2^{\aleph_0}}$. □

Замечание

Для каждого неглавного ультрафильтра $\mathcal{U}$ на $\mathbb{N}$ мощность множества всех ультрафильтров, RK -сравнимых с $\mathcal{U}$, равна $2^{\aleph_0}$.

Следствие

Существует $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно RK -несравнимых ультрафильтров на $\mathbb{N}$.

Предложение

$CH \implies \exists 2^{\aleph_0}$ попарно несравнимых рамсеевских ультрафильтров на $\mathbb{N}$.

Доказательство. Будем строить последовательность РК-несравнимых рамсеевских ультрафильтров $\mathcal{U}_\alpha$, $\alpha < \omega_1 = 2^{\aleph_0}$, по трансфинитной индукции. Пусть $\mathcal{U}_0$ — какой-нибудь рамсеевский ультрафильтр. Предположим, что $\alpha < \omega_1$ и $\mathcal{U}_\beta$, $\beta < \alpha$, построены. Множество всех неглавных ультрафильтров, РК-сравнимых с ультрафильтрами $\mathcal{U}_\beta$, имеет мощность $2^{\aleph_0} = \omega_1$. Как-нибудь перенумеруем его элементы счётными ординалами: $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

В доказательстве существования рамсеевских ультрафильтров на каждом шаге α будем выбирать бесконечное c_α -однородное множество A_α , которое удовлетворяет дополнительному условию $A_\alpha \notin \mathcal{V}_\alpha$ (для этого достаточно разбить A'_α на два бесконечных подмножества, взять то из них, которое не принадлежит $\mathcal{V}_\alpha$, и выбрать бесконечное c_α -однородное множество A_α в этом подмножестве).

В конце построения мы получим рамсеевский ультрафильтр $\mathcal{U}_\alpha$, несравнимый со всеми ультрафильтрами $\mathcal{U}_\beta$ для $\beta < \alpha$.

В результате мы получим РК-несравнимые рамсеевские неглавные ультрафильтры $\mathcal{U}_\alpha$, $\alpha < \omega_1$.



Проблема (Уолтер Рудин, 1956)

Верно ли, что всякий однородный компакт содержит сходящуюся последовательность?

(Пространство X **однородно**, если $\forall x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$ такой, что $f(x) = y$.)

Определение

Пространство X называется **экстремально несвязным**, если непересекающиеся открытые подмножества X имеют непересекающиеся замыкания, и **F -пространством**, если непересекающиеся функционально открытые подмножества X функционально отделимы.

Всякое экстремально несвязное пространство является F -пространством.

F -пространства характеризуются тем свойством, что кольцо непрерывных функций на таком пространстве является F -кольцом, т.е. все конечно порожденные идеалы в нем являются главными.

У каждого компакта X есть **абсолют** — это компакт aX такой, что X является его неприводимым непрерывным образом, причём любой компактный неприводимый непрерывный прообраз aX гомеоморфен aX . Абсолют aX любого компакта определён однозначно (с точностью до гомеоморфизма) и всегда экстремально несвязен. Каждый экстремально несвязный компакт является своим собственным абсолютom. Если Y является сюръективным неприводимым непрерывным образом компакта X , то $aX \cong aY$.

Если X и Y — компакты, $f: Y \rightarrow X$ — непрерывная сюръекция, Z — экстремально несвязный компакт и $g: Z \rightarrow X$ непрерывное отображение, то существует непрерывное отображение $\bar{g}: Z \rightarrow Y$ такое, что $g = \bar{g} \circ f$:

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \downarrow \bar{g} & \searrow g & \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Иными словами, экстремально несвязные компакты — **проективные объекты** в категории компактных пространств и непрерывных отображений.

Всё сказанное об экстремально несвязных компактах переносится на регулярные пространства с заменой непрерывных отображений на совершенные. В частности, экстремально несвязные регулярные пространства — проективные объекты в категории (вполне) регулярных пространств и совершенных отображений.

Факт

Экстремальная несвязность наследуется счётными подпространствами.

Следствие

Экстремально несвязное пространство не содержит сходящихся последовательностей.

Факт

Замыкание любого счётного дискретного множества в экстремально несвязном компакте гомеоморфно $\beta\mathbb{N}$.

Определение

Последовательность точек (x_n) в топологическом пространстве X **сходится к точке $x \in X$ по ультрафильтру $p \in \beta\mathbb{N}$** , если для любой окрестности U точки x множество $\{n : x_n \in U\}$ принадлежит p . Обозначение: $x = \lim_p x_n$ или $x_n \xrightarrow[p]{} x$.

Теорема

Пусть X — экстремально несвязное пространство, $x \in X$, $\{d_m : m \in \mathbb{N}\}$ и $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ — дискретные подмножества X , $p, q \in \omega^*$ и $d_m \xrightarrow{p} x$, $e_n \xrightarrow{q} x$. Тогда ультрафильтры p и q RK-сравнимы.

Следствие

Бесконечный экстремально несвязный компакт не может быть однородным.

Доказательство. Возьмём любое счётное дискретное множество $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ в экстремально несвязном компакте X и RK-несравнимые ультрафильтры p и q на $\mathbb{N}$. Поскольку X — компакт, имеем $d_n \xrightarrow{p} x$ и $d_n \xrightarrow{q} y$ для некоторых точек $x, y \in X$ (см. факты). Пусть $f : X \rightarrow X$ — гомеоморфизм такой, что $f(x) = y$. Тогда к точке x является пределом дискретных последовательностей $(d_n)_n$ и $(f(d_n))_n$ по RK-несравнимым ультрафильтрам. Противоречие. □

Определение

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — ультрафильтры на $\mathbb{N}$. Положим

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \{n : \{m : (n, m) \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Иными словами, $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ — ультрафильтр, порождённый множествами вида

$$\left\{ \bigcup_{u \in U} \{u\} \times V_u : U \in \mathcal{U}, V_u \in \mathcal{V} \text{ для } u \in U \right\}.$$

Его называют **тензорным произведением** ультрафильтров $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

Замечание

Ультрафильтры вида $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ для свободных $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ не бывают Q - и P -ультрафильтрами: достаточно рассмотреть разбиения $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на множества $\{(n, m) : n \geq m\}$ и $\{n : n < m\} \times \{m\}$, $n \in \mathbb{N}$, в случае Q и на множества $\{n\} \times \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, в случае P .

Теорема

Для любого ультрафильтра $\mathcal{U}$ и любого быстрого ультрафильтра $\mathcal{V}$ на $\mathbb{N}$ ультрафильтр $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ быстрый.

Пусть $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \sqcup C_k$, где все C_k конечны. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем $n_k \in \mathbb{N}$ так, что $C_k \subset \{1, \dots, n_k\} \times \{1, \dots, n_k\}$. Пусть $V \in \mathcal{V}$ таково, что $|\{1, \dots, n_k\} \cap V| \leq k$. Положим $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\} \times \{m : m \in V, m \geq n_k\}$; тогда $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, и пересечение

$$\begin{aligned} A \cap C_k &\subset A \cap \{1, \dots, n_k\} \times \{1, \dots, n_k\} \subset \bigcup_{i \leq n_k} \{i\} \times (V \cap \{n_i, \dots, n_k\}) \subset \\ &\subset \bigcup_{i \leq k} \{i\} \times (V \cap \{n_i, \dots, n_k\}) \end{aligned}$$

(так как $V \cap \{n_i, \dots, n_k\} = \emptyset$ для $i > k$) имеет мощность $\leq k^2$ для всякого k .
Значит, $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ быстрый (лёгкое упражнение). □

Следствие

Для любого ультрафильтра $\mathcal{U}$ и любого быстрого ультрафильтра $\mathcal{V}$ на $\mathbb{N}$ ультрафильтр $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ быстрый.

Доказательство. По определению операции сложения ультрафильтров сумма $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ является образом $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ при отображении $\beta+$, где $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — обычное сложение чисел. Ясно, что $+$ конечнократно. □

Следствие

Если существует быстрый ультрафильтр, то существует и быстрый ультрафильтр-идемпотент.

Предложение

Неглавные Q -ультрафильтры не бывают идемпотентами.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — неглавный идемпотент, и пусть $U \in \mathcal{U}$. Теорема Хиндмана $\implies \exists$ последовательность $(a_n)_n$ такая, что $a_i < a_j$ для $i < j$ и $FS((a_n)_n) \subset U$. Значит, $\exists k \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ существуют $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условиям $n_1, n_2, n_3 > n$ и $|n_i - n_j| < k$ (можно взять $k = a_3$ и $n_i = a_i + a_n$ для достаточно большого n). Если C_i — интервалы растущей длины, то C_i с достаточно большими номерами содержат по меньшей мере две точки из U . □

Теорема

Неглавный ультрафильтр $\mathcal{U}$ на $\mathbb{N}$ является P -ультрафильтром $\iff$ он является P -точкой в $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, т.е. если $U_1, U_2, \dots$ — окрестности $\mathcal{U}$ в $\mathbb{N}^*$, то $\bigcap U_n$ — тоже окрестность $\mathcal{U}$.

Доказательство. Ультрафильтр $\mathcal{U}$ является P -ультрафильтром $\iff$ для любой убывающей последовательности $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов $\mathcal{U}$ $\exists U \in \mathcal{U}$ такой, что $U \setminus U_n$ конечно $\forall n \in \mathbb{N}$ (достаточно рассмотреть разбиение $\mathbb{N}$ на множества $A_1 = \mathbb{N} \setminus U_1$ и $A_i = U_{i-1} \setminus U_i$, $i \in \mathbb{N}$).

Рассмотрим окрестности U_n точки $\mathcal{U}$ в $\mathbb{N}^*$. Можно считать, что $U_n = \bar{A}_n \setminus \mathbb{N}$ для $A_n \in \mathcal{U}$ и $A_{n+1} \subset A_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Возьмём $A \in \mathcal{U}$, для которого все $A \setminus A_n$ конечны. Пусть $\mathcal{V} \in \bar{A} \setminus \mathbb{N}$. Тогда $A \in \mathcal{V}$ и $q \in \mathbb{N}^*$. Если $A_n \notin \mathcal{V}$ для некоторого n , то $A \setminus A_n \in \mathcal{V}$ — противоречие. Значит, $A_n \in \mathcal{V}$ для всех n , т.е. $\mathcal{V} \in \bigcap \bar{A}_n \setminus \mathbb{N} = \bigcap (\bar{A}_n \setminus \mathbb{N})$.

Обратно, если $\mathcal{U}$ — P -точка в $\mathbb{N}^*$ и $(A_n)_n$ — убывающая последовательность его элементов, то $U = \bigcap (\bar{A}_n \setminus \mathbb{N})$ — окрестность $\mathcal{U}$ в $\mathbb{N}^*$. Пусть $A \in \mathcal{U}$, $\bar{A} \setminus \mathbb{N} \subset U$. Если $A \setminus A_n$ бесконечно, то $\exists \mathcal{V} \in \mathbb{N}^*$ такой, что $A \setminus A_n \in \mathcal{V}$. Имеем $\mathcal{V} \in \bar{A} \setminus \mathbb{N}$ и $\mathcal{V} \notin \bigcap \bar{A}_n \implies \mathcal{V} \in U \setminus (\bigcap U_n)$ — противоречие. □

Следствие

Неглавные P -ультрафильтры не бывают идемпотентами.

Доказательство. Если $\mathcal{U}$ — идемпотент, то $\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$, и из непрерывности сложения по первому аргументу следует, что любая окрестность точки $\mathcal{U}$ содержит множество вида $\bar{A} + \mathcal{U} \supset A + \mathcal{U}$, где $A \subset \mathbb{N}$. Значит, $\mathcal{U}$ принадлежит замыканию множества $\{n + \mathcal{U} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^*$. Однако P -ультрафильтр $\mathcal{U}$ не может быть предельной точкой никакого счетного множества $X = \{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^*$, где $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}$, так как для окрестностей $U_n = \mathbb{N}^* \setminus \{\mathcal{U}_n\}$ точки $\mathcal{U}$ пересечение $U = \bigcap U_n$ — тоже окрестность, и $U \cap X = \emptyset$. □