

Вторая половина XIX века: развитие канторовской теории множеств и теоретико-множественного подхода — «рай для математиков», «симфония бесконечного» (Гильберт). Принцип свёртывания: для любого свойства считается существующим множество, состоящее из тех и только тех объектов, которые обладают этим свойством (если $\mathcal{P}(x)$ — любое свойство, то $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ — множество).

Рубеж XIX–XX веков: кризис оснований математики.

Программа Гильберта

- *Формализация всей математики*: все математические утверждения должны быть написаны на точном формальном языке и управляться четко определёнными правилами.
- *Полнота*: доказательство того, что все истинные математические утверждения могут быть формально доказаны.
- *Непротиворечивость*: доказательство того, что в формализме математики не может быть получено никакого противоречия. Желательно, чтобы оно использовало только «конечные» рассуждения о конечных математических объектах.
- *Экономность*: любой результат о «реальных объектах», полученный с использованием рассуждений об «идеальных объектах» (таких как несчётные множества), может быть доказан без использования идеальных объектов.
- *Алгоритмическая разрешимость*: для любого математического утверждения существует алгоритм, определяющий его истинность или ложность.

Формальная система (**формальная теория, дедуктивная система**) — это совокупность абстрактных объектов вместе с чисто синтаксическими правилами оперирования символами.

Формальная система считается определённой, если

- задано конечное или счётное число произвольных символов (*язык*);
- выделены конечные последовательности символов (*выражения*), которые считаются *формулами*;
- выделены формулы, которые называются *аксиомами*;
- задано конечное число отношений между формулами, называемых *правилами вывода*.

Мы возьмём за основу *аксиоматическую формальную систему* (гильбертовского типа), где основное ударение делается на аксиомы, а правила вывода сведены к минимуму; бывают ещё, например, *системы естественного вывода* (генценовского типа), где аксиом нет вообще, но много правил вывода.

Логика первого порядка

Логика высказываний

Язык логики высказываний:

- символы P, Q, R, \dots для «первичных высказываний» (**атомов**) произвольной природы, которые играют роль переменных;
- **пропозициональные связки** — символы
 - \wedge — конъюнкция (логическое «и»),
 - \vee — дизъюнкция (логическое «или»),
 - \neg — отрицание (логическое «не»),
 - \rightarrow — импликация («влечёт за собой»);
- служебные символы — скобки (и).

Пропозициональные формулы определяются рекурсивно:

- 1) все атомы — формулы;
- 2) если A и B — формулы, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $\neg A$ и $A \rightarrow B$ — формулы.

Соглашение о скобках: $(A) \rightsquigarrow A$, $(A \wedge B) \wedge C \rightsquigarrow A \wedge B \wedge C$,
 $(A \vee B) \vee C \rightsquigarrow A \vee B \vee C$. Скобки также опускаются, если их можно однозначно восстановить по приоритетам: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow .

Длина формулы — число символов (считая повторения и опущенные скобки).

Тавтологии

Введём два «внешних» символа И («истина») и Л («ложь»).

Истинностная оценка на множестве \mathcal{P} первичных высказываний — это любая функция $\nu: \mathcal{P} \rightarrow \{И, Л\}$. Для каждой истинностной оценки определяется её продолжение $\bar{\nu}$ на все пропозициональные формулы индукцией по длине формулы с помощью общеизвестных таблиц истинности.

Пропозициональная формула A называется **тавтологией**, если $\bar{\nu}(A) = И$ для любой истинностной оценки $\nu: \mathcal{P} \rightarrow \{И, Л\}$.

Тавтологии играют роль аксиом в логике высказываний.

Достаточный набор тавтологий:

$$\begin{array}{lll} A \wedge B \rightarrow A, & A \vee \neg A, & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)), \\ A \wedge B \rightarrow B, & A \rightarrow (B \rightarrow A), & (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)), \\ A \rightarrow (A \vee B), & \neg A \rightarrow (A \rightarrow B), & (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A), \\ B \rightarrow (A \vee B) & A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)), & \end{array}$$

Единственное правило вывода в логике высказываний — **modus ponens**, или **правило отделения**, — переход от любых двух формул вида A и $A \rightarrow B$ к одной формуле B . Запись: $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$.

Логика первого порядка

Язык логики первого порядка:

- символы $x, y, z, u, v \dots$ для переменных;
- пропозициональные связки;
- служебные символы — скобки (и) и запятая;
- символ равенства $=$;
- кванторы существования \exists («существует») и всеобщности \forall («для всех»);
- *сигнатура* — набор Σ нелогических символов, который может включать *предикатные* символы и *функциональные* символы, каждому из которых сопоставлена «арность» — число аргументов. 0-арные функциональные символы называются также *константными* символами.

Термы сигнатуры Σ определяются рекурсивно:

- 1) все символы переменных и константные символы — термы;
- 2) если t_1, \dots, t_n — термы и f — n -арный функциональный символ из Σ , то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

Формулы первого порядка определяются рекурсивно:

- 1) любое выражение вида $(t_1 = t_2)$ и вида $R(t_1, \dots, t_2)$, где t_i — термы и R — n -арный предикатный символ — формулы (они называются *атомными формулами* или *атомами*);
- 2) если φ и ψ — формулы, то $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg \varphi$ и $\varphi \rightarrow \psi$ — формулы;
- 3) если φ — формула и x — символ переменной, то $(\exists x\varphi)$ и $(\forall x\varphi)$ — формулы.

Свободные переменные формулы φ определяются так:

- 1) если φ — атом, то свободные переменные формул φ и $\neg\varphi$ — это все переменные, которые встречаются в φ ;
- 2) свободные переменные формул $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ и $\varphi \rightarrow \psi$ — это $\{\text{свободные переменные } \varphi\} \cup \{\text{свободные переменные } \psi\}$;
- 3) свободные переменные формул $(\exists x\varphi)$ и $(\forall x\varphi)$ — это все свободные переменные формулы φ , кроме x .

Когда пишут $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, обычно имеют в виду, что все свободные переменные формулы содержатся среди x_1, \dots, x_n .

Высказывание (или **предложение**) — это любая формула, не содержащая свободных переменных.

Логические аксиомы первого порядка:

- Все тавтологии.
- *Аксиомы равенства*:
 - $(x = x)$, $(x = y) \rightarrow (y = x)$, $(x = y) \wedge (y = x) \rightarrow (x = z)$;
 - для любого функционального символа f
 $(x = y) \rightarrow (f(\dots, x, \dots) = f(\dots, y, \dots))$;
 - для любой формулы φ , в которой x свободна,
 $(x = y) \rightarrow (\varphi(\dots, x, \dots) \rightarrow \varphi(\dots, y, \dots))$, если y остаётся свободной.
- Все формулы вида $(\forall x\varphi(x)) \rightarrow \varphi(t/x)$ и $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$ ($\varphi(t/x)$ — формула, которая получается подстановкой t вместо свободных вхождений переменной x , t — любой терм, ни одна переменная которого не становится связанной в процессе подстановки).

Правила вывода в логике первого порядка:

- *Modus ponens* (правило отделения): $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$.
- *Правила обобщения*: если переменная x не входит в формулу φ в качестве свободной переменной, то

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi(x)}{\varphi \rightarrow \forall y \psi(y)} \quad \text{и} \quad \frac{\psi(x) \rightarrow \varphi}{\exists y \psi(y) \rightarrow \varphi}$$

Алгебраическая система для произвольной сигнатуры Σ , или **Σ -система**, — это пара (M, σ) , где M — непустое множество и σ — отображение с областью определения Σ такое, что

- если $R \in \Sigma$ — n -арный предикатный символ, то $\sigma(R)$ — n -местное отношение на M (т.е. $\sigma(R) \subset M^n$);
- если $f \in \Sigma$ — n -арный функциональный символ, то $\sigma(f)$ — отображение $M^n \rightarrow M$ (т.е. $\sigma(f) \subset M^{n+1}$ и если $(x_1, \dots, x_n, x), (x_1, \dots, x_n, y) \in \sigma(f)$, то $x = y$);
- в частности, если $c \in \Sigma$ — константный символ, то $\sigma(c) \in M$.

M — **несущее множество**, σ — **семантическая** (интерпретирующая) **функция**. Обычно алгебраическую систему отождествляют с несущим множеством и вместо (M, σ) пишут просто M (наличие семантической функции подразумевается), а вместо $\sigma(R)$ или $\sigma(f)$ — R^M или f^M .

Теперь, когда мы проинтерпретировали все предикатные и функциональные символы в системе M , выясним, чему в этой системе соответствуют термы — символы переменных и констант, выражения вида $f(x_1, \dots, x_n)$, где f — n -арный функциональный символ и x_1, \dots, x_n — символы переменных или констант, выражения вида $g(y_1, \dots, y_k)$, где g — k -арный функциональный символ и y_1, \dots, y_k — символы переменных или констант или выражения, полученные на предыдущем шаге (возможно, $g = f$ и $n = k$), и т.д.

Подстановка в системе M для сигнатуры Σ — это отображение s из множества переменных сигнатуры Σ в M . Другими словами, подстановка — это просто приписывание каждому символу переменной конкретного значения из M .

Для каждого терма t сигнатуры Σ рекурсивно определяется его интерпретация — отображение t^M всех подстановок в элементы M : для каждой подстановки s

- если t — константный символ c , то $t^M(s) = c^M$;
- если t — переменная x , то $t^M(s) = s(x)$;
- если $t = f(t_1, \dots, t_n)$, то $t^M(s) = f^M(t_1^M(s), \dots, t_n^M(s))$.

Таким образом, отображение t^M просто определяет, какие значения принимают функции f^M , когда их аргументы принимают значения, определённые каждой конкретной подстановкой.

Через $s(a/v)$ обозначим подстановку s' , которая приписывает значение a переменной v , а в остальном совпадает с s .

Пусть M — Σ -система и φ — формула сигнатуры Σ .

Определим по индукции естественное отношение $M \models \varphi[s]$ (φ выполняется в M при подстановке s):

- $M \models (t_1 = t_2)[s]$ означает, что $t_1^M(s)$ совпадает с $t_2^M(s)$;
- $M \models R(t_1, \dots, t_n)[s]$ — что $(t_1^M(s), \dots, t_n^M(s)) \in R^M$;
- $M \models \neg\varphi[s]$ — что $M \models \varphi[s]$ не выполняется;
- $M \models (\varphi \rightarrow \psi)[s]$ — что либо $M \models \neg\varphi[s]$, либо $M \models \psi[s]$;
- $M \models (\varphi \wedge \psi)[s]$ — что $M \models \varphi[s]$ и $M \models \psi[s]$;
- $M \models (\varphi \vee \psi)[s]$ — что либо $M \models \varphi[s]$, либо $M \models \psi[s]$;
- $M \models (\exists x\varphi)[s]$ — что $M \models \varphi[s(a/x)]$ для некоторого $a \in M$;
- $M \models (\forall x\varphi)[s]$ — что для всех $a \in M$ выполнено $M \models \varphi[s(a/x)]$.

Справедливость $M \models \varphi[s]$ зависит только от значений $s(x)$ для свободных переменных в φ . Если φ — высказывание, пишем $M \models \varphi$.

Определение

(Формальное) **доказательство** (вывод) формулы φ из набора высказываний A — это конечный список формул $\psi_1, \dots, \psi_n = \varphi$, каждая из которых либо является некоторой аксиомой логики первого порядка, либо входит в набор A , либо получена по одному из трёх правил вывода из формул, предшествующих ей в этом списке. Если формула φ имеет доказательство, то мы говорим, что φ **выводима из A** и пишем $A \vdash \varphi$.

Теория T состоит из фиксированной сигнатуры и набора высказываний в этой сигнатуре. Обычно предполагается, что задан список аксиом — высказываний, которые порождают теорию (т.е. любое высказывание из T выводится из аксиом), и что T включает все высказывания, выводимые из аксиом.

Теория (набор формул) T **непротиворечива**, если не существует формулы φ , для которой $T \vdash \varphi$ и $T \vdash \neg\varphi$.

Определение

Система M называется **моделью** набора формул T , если $M \models \varphi$ для всех $\varphi \in T$.

Теорема Генкина о существовании модели

Любое непротиворечивое множество формул произвольной сигнатуры имеет модель.

Следствие

Теория непротиворечива тогда и только тогда, когда она имеет модель.

Следствие (теорема Гёделя о полноте)

Формула φ выводима из набора высказываний T тогда и только тогда, когда φ истинна во всех моделях T .

Теорема Лёвенгейма–Скулема

Пусть T — любой не более чем счётный набор высказываний первого порядка не более чем счётной сигнатуры. Если у набора T существует модель, то у него существует и счётная модель.

Теоремы Гёделя о неполноте

В любой непротиворечивой формальной системе S , в которой можно определить арифметику Пеано (т.е. натуральные числа и операции над ними), можно построить формулу φ такую, что $S \not\vdash \varphi$ и $S \not\vdash \neg\varphi$.

В любой арифметической формальной системе S можно построить формулу φ , утверждающую непротиворечивость S . Если S непротиворечива, то $S \not\vdash \varphi$.

Теорема компактности (Гёдель–Мальцев)

Множество T высказываний логики первого порядка (или логики высказываний) непротиворечиво тогда и только тогда, когда непротиворечиво каждое конечное подмножество набора T .

Общая теорема Лёвенгейма–Скулема

Если множество высказываний логики первого порядка имеет бесконечную модель, то оно имеет модель произвольной бесконечной мощности.

Теорема Линстрёма

Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно \wedge , \neg и \exists , для которой выполняются теоремы компактности и Лёвенгейма–Скулема.

Теория множеств

Сигнатура теории множеств состоит из единственного предикатного символа \in .

Система аксиом ZFC (Zermelo–Fraenkel–choice)

Аксиома существования: множества существуют.

$$\exists x(x = x)$$

Аксиома объёмности: два множества равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы, т.е. каждый элемент одного множества принадлежит другому и наоборот.

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y)$$

Схема аксиом выделения: любому множеству X и любому свойству φ отвечает множество Y , состоящее в точности из тех элементов множества X , которые обладают свойством φ .

Если φ — формула, свободные переменные которой содержатся среди x, z, u_1, \dots, u_n , то $\forall X \forall u_1, \dots, u_n \exists Y \forall z (z \in Y \leftrightarrow z \in X \wedge \varphi)$

Множество всех $y \in X$, обладающих свойством φ , обозначается

$$\{y \in X : \varphi(y)\}.$$

По техническим причинам бывает удобно рассматривать совокупность всех множеств x , для которых выполнено данное свойство-формула $\varphi(x)$. Такая совокупность называется **классом**. Запись:

$$x \in \mathbf{C} \leftrightarrow \varphi(x) \quad \text{или} \quad \mathbf{C} = \{x : \varphi(x)\}.$$

Классы $\mathbf{C} = \{x : \varphi(x)\}$ и $\mathbf{D} = \{x : \psi(x)\}$ равны, если $\forall x(\varphi(x) = \psi(x))$. Класс, который не равен никакому множеству, называется **собственным**. **Универсальный класс \mathbf{V}** — это класс всех множеств: $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$.

Используя аксиому объёмности и схему аксиом выделения, можно определить

- пересечение $X \cap Y = \{z \in X : z \in Y\}$,
- разность $X \setminus Y = \{z \in X : z \notin Y\}$,
- пустое множество $\emptyset = \{y \in X : y \neq y\}$.

Аксиома пары: для любых множеств x и y существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — x и y (**неупорядоченная пара** элементов x и y).

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

Используя аксиому объёмности и аксиому пары, можно определить

- неупорядоченную пару $\{x, y\}$,
- одноэлементное множество $\{x\} = \{x, x\}$,
- упорядоченную пару $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,
- упорядоченную тройку $(x, y, z) = ((x, y), z)$,
- ...

Аксиома объединения: для любого семейства множеств \mathcal{F} существует множество $X = \bigcup \mathcal{F}$ — объединение семейства \mathcal{F} ; его элементами являются в точности все элементы множеств-элементов семейства \mathcal{F} .

$$\forall \mathcal{F} \exists X \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in X).$$

Обозначения: $X \cup Y = \bigcup \{X, Y\}$, $X \cup Y \cup Z = \bigcup \{X, Y, Z\}$ и т.д.

Схема аксиом подстановки (замещения): если $\varphi(x, y)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества a существует единственное множество b такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества X определено множество Y , элементами которого являются те и только те множества y , для которых $\varphi(x, y)$ истинно при некотором $x \in X$.

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \\ \rightarrow \forall X \exists Y (\forall x \in X) \forall y (\varphi(x, y) \rightarrow y \in Y) \end{aligned}$$

Здесь формулу φ можно воспринимать как класс-отображение, которое каждому a ставит в соответствие то единственное множество b , для которого высказывание $\varphi(a, b)$ истинно; тогда Y — не что иное как образ множества X при этом «отображении».

Аксиома бесконечности: существует множество, которое содержит (в качестве элемента) \emptyset и вместе с каждым элементом x содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$ ($x \cup \{x\}$ — множество, элементами которого являются все элементы множества x и само множество x).

$$\exists X((\emptyset \in X) \wedge \forall x(x \in X \rightarrow (x \cup \{x\}) \in X))$$

Из аксиом объёмности, бесконечности и выделения следует, что существует множество, состоящее из элементов \emptyset (обозначение: 0), $\{\emptyset\}$ (обозначение: 1), $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (обозначение: 2), $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ (обозначение: 3), $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$ (обозначение: 4), ...

Назовём множество Y **подмножеством** множества X (обозначение: $Y \subset X$), если $\forall y(y \in Y \rightarrow y \in X)$. Если $Y \subset X$ и $\neg(Y = X)$, то Y называется **собственным подмножеством** (обозначение: $Y \subsetneq X$).

Аксиома множества подмножеств: для любого множества X существует множество Y , состоящее из всех подмножеств множества X .

$$\forall X \exists Y \forall z(z \subset X \rightarrow z \in Y)$$

Для множества подмножеств множества X используются обозначения $\mathcal{P}(X)$, 2^X и $\exp X$.

Аксиома множества подмножеств позволяет определить **декартово произведение** $X \times Y$ двух (и любого конечного числа) множеств X и Y , а также понятия отношений и отображений:

$$X \times Y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) : (\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = (x, y))\}.$$

Множество R называется (бинарным) **отношением**, если $R \subset X \times Y$ для некоторых множеств X и Y . **Область определения** и **область значений** отношения R — это множества

$$\text{dom } R = \{x \in X : \exists y((x, y) \in R)\} \quad \text{и} \quad \text{ran } R = \{y \in Y : \exists x((x, y) \in R)\}.$$

Отношение f называется **отображением** (или **функцией**), если

$$\forall x \forall y \forall z (((x, y) \in f) \wedge ((x, z) \in f) \rightarrow y = z).$$

В случае, когда $\text{dom } f = X$, используют обозначение $f: X \rightarrow Y$.

Множества можно возводить в степень:

$$Y^X = \{f \subset X \times Y : f \text{ — функция, } \text{dom } f = X, \text{ran } f \subset Y\}.$$

Аксиома регулярности (фундирования): каждое непустое множество X содержит элемент x такой, что $X \cap x = \emptyset$.

$$\forall X (\neg(X = \emptyset) \rightarrow (\exists x \in X)(x \cap X = \emptyset))$$

Следствие: не существует бесконечной последовательности множеств x_0, x_1, x_2, \dots такой, что $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$ (в частности, $\nexists X(X \in X)$) — достаточно рассмотреть $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ и применить аксиому. Из аксиомы выбора следует, что верно и обратное: из несуществования бесконечной последовательности $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$ вытекает аксиома регулярности — иначе $(\exists X \neq \emptyset)(\forall x \in X)(x \cap X \neq \emptyset)$ и по аксиоме выбора существует множество $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, в котором $x_0 \in X$, $x_1 \in X \cap x_0$, $x_2 \in X \cap x_1$ и т.д.

Аксиома выбора (AC): для каждого семейства \mathcal{F} непустых множеств существует **функция выбора** на \mathcal{F} , т.е. отображение $f: \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ с тем свойством, что $f(X) \in X$ для каждого $X \in \mathcal{F}$.

$$\forall \mathcal{F} ((\forall X \in \mathcal{F})(X \neq \emptyset) \rightarrow (\exists f: \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F})(\forall X \in \mathcal{F})(f(X) \in X))$$

Декартово произведение семейства \mathcal{F} — это множество $\prod \mathcal{F}$ всех функций выбора на \mathcal{F} . Если элементы \mathcal{F} заиндексированы как X_α , $\alpha \in A$, то

$$\prod \mathcal{F} = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = (x_\alpha)_\alpha : (\forall \alpha \in A)(f(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha)\}.$$

Ординалы и кардиналы

Порядок

Частичный порядок, или просто **порядок**, на множестве X — это подмножество \leq декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами (мы пишем $x \leq y$ вместо $(x, y) \in \leq$; кроме того, мы иногда пишем $y \geq x$ вместо $x \leq y$):

- $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \rightarrow (x \leq z)$ (**транзитивность**);
- $\forall x \in X (x \leq x)$ (**рефлексивность**);
- $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \rightarrow (x = y)$ (**антисимметричность**).

Множество X вместе с заданным на нём порядком (т.е. пара (X, \leq)) называется (**частично**) **упорядоченным множеством**; про множество X говорят, что оно (**частично**) **упорядочено отношением \leq** . Запись $x \leq y$ читается «элемент x не больше элемента y » или «элемент x не превосходит элемента y », а запись $x \geq y$ — «элемент x не меньше элемента y ».

Для каждого порядка \leq на X однозначно определено соответствующее отношение **< строгого порядка**: $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$. При этом говорят, что элемент x **меньше** элемента y , а **больше** x . И наоборот, по строгому порядку $<$ очевидным образом восстанавливается порядок \leq , которому он соответствует.

Два элемента x и y множества X , упорядоченного отношением \leq , **сравнимы**, если либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Говорят, что $y \in X$ лежит **между** $x \in X$ и $z \in X$, если $x \leq y \leq z$.

Элемент x множества $Y \subset X$ называется **минимальным** (**максимальным**) элементом этого множества, если $\forall y \in Y((y \leq x) \rightarrow (y = x))$ (соответственно $\forall y \in Y((x \leq y) \rightarrow (y = x))$).

Элемент x **ограничивает** множество $Y \subset X$ **сверху** (**снизу**), или является **верхней** (**нижней**) **гранью** множества Y , если $\forall y \in Y(y \leq x)$ (соответственно $\forall y \in Y(x \leq y)$). Если при этом x принадлежит множеству Y , то он называется **наименьшим** (**наибольшим**) элементом Y и обозначается $\min Y$ ($\max Y$).

Множество, у которого есть верхняя (нижняя, верхняя и нижняя) грань называется **ограниченным сверху** (**ограниченным снизу**, **ограниченным**).

Наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) грань множества Y , если она существует, называется также **точной верхней** (**нижней**) **гранью**, или **супремумом** (**инфимумом**), множества Y и обозначается $\sup Y$ ($\inf Y$).

Интервалом упорядоченного множества (X, \leq) называется любое его подмножество I с тем свойством, что для любых $x, y \in I$ всякий элемент $z \in X$ между x и y принадлежит I . Интервалы бывают восьми типов:

- | | |
|-------------------------|---|
| а) $\{x : x < a\}$, | д) $\{x : a \leq x \leq b\} = [a, b]$, |
| б) $\{x : x \leq a\}$, | е) $\{x : a < x < b\} = (a, b)$, |
| в) $\{x : a < x\}$, | ё) $\{x : a \leq x < b\} = [a, b)$, |
| г) $\{x : a \leq x\}$, | ж) $\{x : a < x \leq b\} = (a, b]$, |

где $a, b \in I$. Интервалы типа а) называют **начальными интервалами**.

Порядок \leq на X называется **линейным**, если любые два элемента x и y множества X сравнимы. В этом случае пара (X, \leq) называется **линейно упорядоченным множеством**, а пара $(X, <)$ — **строго линейно упорядоченным множеством**.

Порядок \leq на X **полон**, если он линейен и любое непустое множество $Y \subset X$ содержит наименьший (в Y) элемент. Пара (X, \leq) , где \leq — полный порядок, называется **вполне упорядоченным множеством**, а пара $(X, <)$ — **строго вполне упорядоченным множеством**. Всякое непустое вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент (хотя наибольший элемент существовать не обязан), и для всякого его элемента, который не является наибольшим, определён элемент, непосредственно следующий за ним.

Порядок \leq на X называется **фундированием**, если любое непустое множество $Y \subset X$ содержит минимальный (в Y) элемент.

На каждом подмножестве Y упорядоченного множества (X, \leq) естественно возникает **индуцированный** порядок, или **сужение** порядка \leq на Y — это пересечение порядка \leq (который является подмножеством $X \times X$) с $Y \times Y$. Как легко видеть, индуцированный порядок линейен или полон, если таковым является порядок \leq на X . В дальнейшем, рассматривая подмножества упорядоченных множеств, мы всегда будем считать, что они снабжены индуцированным порядком.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ между упорядоченными множествами (X, \leq) и (Y, \leq) называется **порядковым изоморфизмом**, а сами эти упорядоченные множества — **порядково изоморфными**, если f взаимно однозначно и для любых $x, y \in X$ соотношение $x \leq y$ выполнено тогда и только тогда, когда $f(x) \leq f(y)$. В случае линейно упорядоченных множеств любая сохраняющая порядок (т.е. «монотонно неубывающая») биекция является порядковым изоморфизмом.

Теорема об изоморфизме

Теорема об изоморфизме

Пусть (X, \leq) и (Y, \leq) — любые вполне упорядоченные множества. Тогда либо существует $x_* \in X$ такой, что начальный интервал $\{x \in X : x < x_*\}$ множества X порядково изоморфен вполне упорядоченному множеству Y , либо существует $y_* \in Y$ такой, что вполне упорядоченное множество X порядково изоморфно начальному интервалу $\{y \in Y : y < y_*\}$ множества Y , либо сами множества (X, \leq) и (Y, \leq) порядково изоморфны.

Замечания

1. Пусть $f: P \rightarrow P$ — сохраняющее порядок биективное отображение вполне упорядоченного множества P в себя. Тогда $f(x) \geq x$ для каждого $x \in P$.
2. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему начальному интервалу.

Определение

Множество S **транзитивно**, если оно содержит все элементы всех своих элементов: $\forall x(x \in S \rightarrow x \subset S)$.

Определение

Множество называется **ординалом** (**порядковым числом**), если оно транзитивно и строго вполне упорядочено отношением \in .

Ординалы обычно обозначают буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Вместо $\alpha \in \beta$ часто пишут $\alpha < \beta$. Запись $\alpha \leq \beta$ означает, что либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$.

Класс всех ординалов обозначается Ord или On .

- каждый ординал α — это множество всех ординалов $\beta < \alpha$
- $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ = множество всех ординалов $\beta \leq \alpha$ — наименьший ординал, больший α
- для множества ординалов A $\bigcup A = \sup A$ (очень легко проверить). Множество $\sup A$ иногда обозначают $\lim A$.
- Класс ординалов собственный (по аксиоме регулярности).

Сам Кантор понимал ординалы как классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств и называл их *порядковыми типами*.

Теорема

Каждое вполне упорядоченное множество (P, \leq) порядково изоморфно единственному ординалу.

Доказательство. P вполне упорядочено \implies по аксиоме подстановки можно определить множество S ординалов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь начальному интервалу P . Ординал $\alpha = \sup S = \bigcup S$ изоморфен P .

Действительно, если это не так, то по теореме об изоморфизме либо α изоморфен начальному интервалу $I \not\subseteq P$ (а тогда $\alpha \in \alpha$ в противоречие с аксиомой регулярности), либо P изоморфно начальному интервалу α . Любой начальный интервал α — это некоторый ординал $\beta < \alpha$, который изоморфен начальному интервалу P , а вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему начальному интервалу. Отсюда же вытекает единственность. □

Определение

Ординал α называется **изолированным**, или **непредельным**, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого β . В противном случае α называется **предельным** ординалом.

Замечание

Ординал α является предельным тогда и только тогда, когда $\alpha = \sup \alpha$.

Из аксиом объёмности, бесконечности и выделения следует существование наименьшего непустого предельного ординала ω . Ординалы, меньшие ω (т.е. элементы ω) называются **натуральными числами**, а сам ординал ω называется **множеством натуральных чисел**. Натуральные числа обозначаются $0, 1, 2, \dots, i, j, k, l, m, n, \dots$.

(Привычнее было бы сказать, что натуральные числа — непустые элементы множества ω ; иногда, а за пределами теории множеств почти(?) всегда, под множеством натуральных чисел имеют в виду $\omega \setminus \{\emptyset\}$, и тогда его обозначают \mathbb{N} .)

Трансфинитная индукция и рекурсия

Каждый ординал строго вполне упорядочен отношением \in
 \implies в каждом непустом классе ординалов есть наименьший элемент.

Принцип трансфинитной индукции

Пусть \mathcal{C} — класс ординалов такой, что

- 1 $\emptyset \in \mathcal{C}$,
- 2 $\alpha \in \mathcal{C} \rightarrow \alpha + 1 \in \mathcal{C}$,
- 3 $A \in \mathcal{C} \rightarrow \sup A \in \mathcal{C}$.

Тогда $\mathcal{C} = \text{Ord}$.

Доказательство. Если утверждение неверно, то существует наименьший ординал $\alpha \notin \mathcal{C}$, а это противоречит условиям

1—3.



На практике принцип индукции часто приходится применять к множествам, а не классам множеств. В этом случае следует считать, что класс \mathcal{C} заведомо содержит все ординалы, начиная с некоторого.

Трансфинитная рекурсия похожа на трансфинитную индукцию, но вместо того чтобы *доказывать*, что что-то верно для всех ординалов, мы *строим* последовательность объектов, по одному для каждого ординала.

Принцип трансфинитной рекурсии

Для любой функции-класса $G: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ (где \mathbf{V} — класс всех множеств) существует единственная трансфинитная последовательность ординалов $F: \text{Ord} \rightarrow \mathbf{V}$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ для всех $\alpha \in \text{Ord}$.

Н.К. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*,
Москва: МЦНМО, 2012

Теорема Цермело и лемма Цорна

Теорема Цермело

Любое множество можно вполне упорядочить.

Лемма Цорна

Пусть (X, \leq) — частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества $Y \subset X$, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в X есть максимальный элемент.

Теорема Цермело и лемма Цорна равносильны аксиоме выбора в том смысле, что

$ZFC \vdash ZF + \text{теорема Цермело}, \quad ZF + \text{теорема Цермело} \vdash ZFC$

и

$ZFC \vdash ZF + \text{лемма Цорна}, \quad ZF + \text{лемма Цорна} \vdash ZFC.$

Принцип трансфинитной рекурсии равносильен схеме аксиом подстановки в том же смысле.

Пример

Теорема

В любом векторном пространстве V имеется базис. Более того, всякое линейно независимое множество векторов в V можно дополнить до базиса.

Оригинальная формулировка леммы Цорна: Пусть \mathcal{X} — семейство множеств со свойством: если $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ таково, что для любых $X, Y \in \mathcal{Y}$ либо $X \subset Y$, либо $Y \subset X$, то $\cup \mathcal{Y} \in \mathcal{X}$. Тогда в семействе \mathcal{X} есть максимальный по включению элемент.

Доказательство. Возьмём в качестве \mathcal{X} семейство всех линейно независимых множеств в V , содержащих данное множество S . Пусть $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ удовлетворяет условию в лемме. Возьмём любые $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \cup \mathcal{Y}$. Для $i \in \mathbb{N}$ найдём $S_i \in \mathcal{Y}$, для которых $\mathbf{x}_i \in S_i$. По условию на \mathcal{Y} множества S_1, \dots, S_n можно упорядочить по включению. Пусть $S_{k_1} \subset S_{k_2} \subset \dots \subset S_{k_n}$. Тогда $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in S_{k_n}$. Множество S_{k_n} линейно независимо $\implies \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы $\implies \cup \mathcal{Y}$ линейно независимо. Лемма Цорна \implies в \mathcal{X} есть максимальное линейно независимое множество, содержащее S . □

Понятие вполне упорядоченного множества и теорема Цермело позволяют распространить метод математической индукции на произвольные множества. Пусть X — непустое множество и $\varphi(x)$ — любое высказывание об элементах X . Предположим, что нам удалось ввести полный порядок \leq на X так, что мы умеем доказывать $\varphi(x_0)$ для наименьшего элемента x_0 и умеем выводить утверждение $\varphi(x)$ из утверждения « $\varphi(y)$ верно для всех $y < x$ ». Тогда мы смело можем утверждать, что утверждение $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$. Действительно, если это не так, т.е. если множество $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\}$ непусто, то мы можем взять наименьший элемент в этом множестве и сразу получить противоречие.

То же рассуждение работает в случае, когда \leq — фундирование: если $\varphi(x_0)$ верно для всех минимальных элементов x_0 и из утверждения «для любого $y < x$ $\varphi(y)$ верно» выводится $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$ — если $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\} \neq \emptyset$, то существование минимального элемента в этом множестве приводит к противоречию.

Кардиналы

Для каждого множества X Кантор определял мощность $|X|$ как класс всех множеств, находящихся во взаимно однозначном соответствии с X ($|X| = |Y|$, если существует биекция $X \rightleftarrows Y$). Мощности сравниваются так:

$$|X| \leq |Y|, \quad \text{если существует инъекция } X \rightarrow Y \\ \text{(или сюръекция } Y \rightarrow X)$$

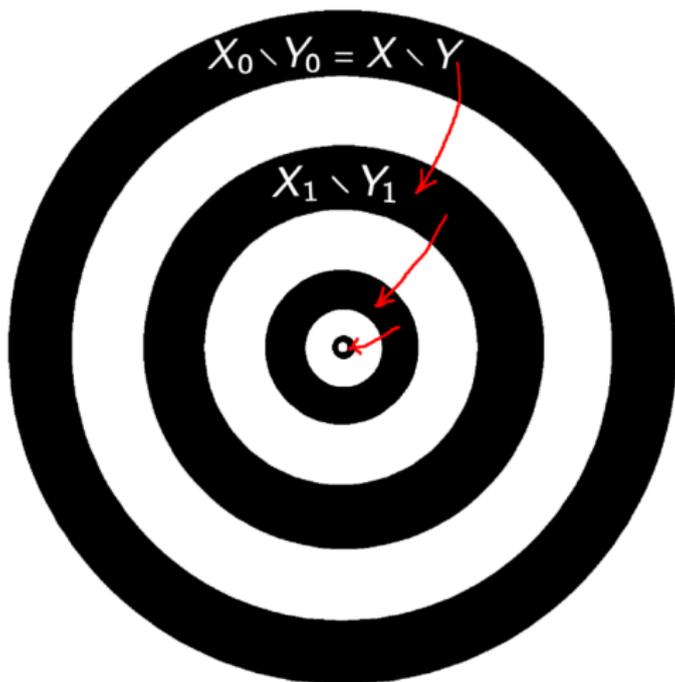
Теорема Кантора–Бернштейна–Шрёдера

Если $|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |X|$, то $|X| = |Y|$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $X_1 \subset Y \subset X$ и $|X_1| = |X|$, то $|X| = |Y|$. Пусть $f: X \rightarrow X_1$ — биекция. Положим

$$\begin{array}{llll} X_0 = X, & X_1 = f(X_0), & X_2 = f(X_1), & \dots; \\ Y_0 = Y, & Y_1 = f(Y_0), & Y_2 = f(Y_1), & \dots \end{array}$$

Для $x \in X$ положим $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } \exists n \in \omega: x \in X_n \setminus Y_n, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$



Отображение $g: X \rightarrow Y$ — биекция.



Определение

Мощность $|X|$ множества X — это наименьший ординал α , для которого существует биекция $X \cong \alpha$.

Определение

Ординал α называется **кардиналом**, если не существует биекции между α и β ни для какого ординала $\beta < \alpha$.

Кардиналы обозначаются буквами κ, λ, \dots .

Кардиналы называются также **алефами**. Кантор использовал для них обозначение $\aleph_\alpha, \alpha \in \text{Ord}$:

- $\aleph_0 = \omega$,
- $\aleph_{\alpha+1}$ = наименьший кардинал, больший \aleph_α ,
- для предельного ординала α $\aleph_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta$.

Сейчас наравне с \aleph_α используется обозначение ω_α (которое сам Кантор использовал только для ординалов):

- $\omega_0 = \omega$,
- $\omega_{\alpha+1}$ = наименьший кардинал, больший ω_α ,
- для предельного ординала α $\omega_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \omega_\beta$.

Мощность определена для каждого множества. Действительно, по теореме Цермело любое множество можно вполне упорядочить, а каждое вполне упорядоченное множество порядково изоморфно единственному ординалу. Порядковый изоморфизм — биекция, поэтому для любого множества X существуют ординал α и биекция $\alpha \cong X$. Значит, множество ординалов $\{\beta \in \alpha + 1 : \text{существует биекция } \beta \cong X\}$ непусто, и $|X|$ — его наименьший элемент.

Для каждого бесконечного множества $X \exists \alpha \in \text{Ord}: |X| = \omega_\alpha$.

Определение

Множество X **счётно**, если $|X| = \omega$. Множество X **несчётно**, если $|X| > \omega$.

Арифметика кардиналов

Для непересекающихся множеств X и Y

- $|X| + |Y| = |X \cup Y|$

- $|X| \cdot |Y| = |X \times Y|$

- $|Y|^{|X|} = |Y^X|$

(напомним: $Y^X = \{f \subset X \times Y : f \text{ — отображение } X \rightarrow Y\}$)

- в частности, $2^{|X|} = |\{\chi_A : A \subset X\}| = |\mathcal{P}(X)|$

($\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств X ,

χ_A — характеристическая функция подмножества $A \subset X$)

Свойства арифметических операций

- $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$, $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$;

- $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;

- $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$;

- если $\kappa \leq \lambda$, то $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$, $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$ и $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$;

- если $1 \leq \kappa$ и $\lambda \leq \mu$, то $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$;

- если κ бесконечен, то $\kappa \cdot \kappa = \kappa$;

- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они отличны от нуля, то $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$;

- $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$, $\kappa^{\lambda \cdot \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu$;

- если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa \geq 2$ и $\lambda \geq 1$, то $\max\{\kappa, 2^\lambda\} \leq \kappa^\lambda \leq \max\{2^\kappa, 2^\lambda\}$;

- в частности, если λ бесконечен, то $2^\lambda = \kappa^\lambda$ для любого $\kappa \leq 2^\lambda$, $\kappa \geq 2$.

Теорема Кантора

Для любого кардинала κ $2^\kappa > \kappa$.

Доказательство. Надо доказать: $|\mathcal{P}(X)| > |X|$ для любого множества X . Ясно, что $|\mathcal{P}(X)| \geq |X|$. Для любого отображения $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$

$$Y = \{x \in X : x \notin f(x)\} \notin \text{ran } f \quad (\text{ran } f \text{ — множество значений } f).$$

Действительно, пусть $Y = f(y)$. По определению множества Y если $y \in Y$, то $y \notin Y$, и если $y \notin Y$, то $y \in Y$.

Не существует сюръекции $X \rightarrow \mathcal{P}(X) \implies |\mathcal{P}(X)| > |X|$. \square

Определение

Кардинал 2^ω называется **мощностью континуума**.

Континуум-гипотеза (CH): $2^\omega = \omega_1$.

CH верна \iff существует сюръекция $\omega_1 \rightarrow \mathcal{P}(\omega)$.

CH неверна \iff существует инъекция $\omega_2 \rightarrow \mathcal{P}(\omega)$.

Кумулятивная иерархия фон Неймана

∈-Индукция

Аксиома регулярности \implies любое непустое множество содержит \in -минимальный элемент (если $X \neq \emptyset$, то $(\exists Y \in X)(Y \cap X = \emptyset)$). Покажем, что любой непустой класс тоже содержит \in -минимальный элемент.

Определение

Транзитивное замыкание множества X — это транзитивное множество $\text{ТС}(X)$ такое, что $X \subset \text{ТС}(X)$ и $\text{ТС}(X) \subset Y$ для любого транзитивного множества $Y \supset X$.

Лемма

Для любого множества X существует транзитивное замыкание $\text{ТС}(X)$.

Доказательство. По индукции: $X_0 = X, \dots, X_{n+1} = \cup X_n, \dots,$
 $\text{ТС}(X) = \bigcup_{n \in \omega} X_n.$ □

Лемма

Если \mathbf{C} — непустой класс, то $(\exists X \in \mathbf{C})(X \cap \mathbf{C} = \emptyset)$.

Доказательство. Возьмём $X \in \mathbf{C}$. Предположим, что $X \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$. Тогда $T = TC(X) \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$. По аксиоме регулярности существует $x \in T$, для которого $x \cap T = \emptyset$. Имеем $x \cap \mathbf{C} = \emptyset$, так как если $y \in x \cap \mathbf{C}$, то $y \in TC(X)$ в силу транзитивности $TC(X)$, так что $y \in x \cap T$. □

Теорема об ϵ -индукции

Если для класса \mathbf{C} выполнено условие $\forall X(X \subset \mathbf{C} \rightarrow X \in \mathbf{C})$, то $\mathbf{C} = \mathbf{V}$.

Доказательство. Если класс $\mathbf{V} \setminus \mathbf{C}$ непуст, то по лемме существует $X \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{C}$, для которого $X \cap (\mathbf{V} \setminus \mathbf{C}) = \emptyset$, т.е. $X \subset \mathbf{C}$. По предположению $X \in \mathbf{C}$. □

Иерархия фон Неймана

Иерархия фон Неймана — это ранжирование всех множеств в соответствии с их принадлежностью к множествам V_α , где α пробегает класс всех ординалов. Классы V_α определяются по трансфинитной рекурсии:

- $V_0 = \emptyset$
- если $\alpha = \beta + 1$, то $V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$
- если α — предельный ординал, то $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$

Положим $\mathbf{\Pi} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha$ (это собственный класс).

Определение

Ранг множества $x \in \mathbf{\Pi}$ — это наименьший ординал α , для которого $x \subset V_\alpha$ (т.е. $x \in V_{\alpha+1}$). Обозначение: $\text{rank } x$.

- 1 $\beta < \alpha \Rightarrow V_\beta \subset V_\alpha$
- 2 $x \in \mathbf{\Pi} \Leftrightarrow x \subset \mathbf{\Pi}$
- 3 $\text{Ord} \subset \mathbf{\Pi}$
- 4 $\forall \alpha \in \text{Ord} \text{ rank } \alpha = \alpha$
- 5 $x \in y \in \mathbf{\Pi} \Rightarrow \text{rank } x < \text{rank } y$
- 6 $\text{rank } X = \sup\{\text{rank } x + 1 : x \in X\}$
- 7 существует формула $\varphi(\alpha, x)$, выражающая « $x \in V_\alpha$ »

Теорема (фон Нейман)

Аксиома регулярности $\iff \mathbf{\Pi} = \mathbf{V}$.

Доказательство

\implies : Если класс $\mathbf{V} \setminus \mathbf{\Pi}$ непуст, то существует $X \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{\Pi}$, для которого $X \cap \mathbf{V} \setminus \mathbf{\Pi} = \emptyset$, т.е. $(\forall x \in X)(x \in \mathbf{\Pi})$. Положим $\alpha = \sup\{\text{rank } x : x \in X\}$. По определению ранга $X \subset V_{\alpha+1}$. Значит, $X \in V_{\alpha+2} \subset \mathbf{\Pi}$.

\impliedby : Если $X \neq \emptyset$, то для элемента $x \in X$ наименьшего ранга имеем $x \cap X = \emptyset$, так как если $y \in x \cap X$, то $\text{rank } y < \text{rank } x$ в противоречие с минимальностью ранга x . □

Алгебраическая система для сигнатуры $\{\epsilon\}$ теории множеств, или ϵ -система, — это пара $(M, \sigma(\epsilon))$, где M — непустое множество и $\sigma(\epsilon)$ — бинарное отношение на M (т.е. $\sigma(\epsilon) \subset M \times M$). Мы будем рассматривать только *стандартные* ϵ -системы, для которых $\sigma(\epsilon) = \epsilon$. Стандартная ϵ -система — это просто непустое множество M .

В дальнейшем будем рассматривать только формулы языка теории множеств. Атомы: $x \in y$ и $x = y$. Все остальные формулы теории множеств состоят из атомов с помощью пропозициональных связок и кванторов:

$\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$
(можно обойтись связками \vee и \neg и квантором \exists).

Выше мы определили в общем случае (для произвольных Σ -системы M , Σ -формулы φ и подстановки $s: \{\text{символы переменных}\} \rightarrow M$) отношение $M \models \varphi[s]$ (φ выполняется в M при подстановке s).

Для стандартной ϵ -системы определение становится проще.

Определение

Пусть M — ϵ -система и φ — формула. Релятивизация φ^M формулы φ к M определяется индукцией по длине формулы:

- если φ — атом, то $\varphi^M = \varphi$;
- если $\varphi = \chi \wedge \psi$, то $\varphi^M = \chi^M \wedge \psi^M$;
- если $\varphi = \chi \vee \psi$, то $\varphi^M = \chi^M \vee \psi^M$;
- если $\varphi = \chi \rightarrow \psi$, то $\varphi^M = \chi^M \rightarrow \psi^M$;
- если $\varphi = \neg\psi$, то $\varphi^M = \neg(\psi^M)$;
- если $\varphi = \exists x\psi$, то $\varphi^M = (\exists x \in M)(\psi^M)$;
- если $\varphi = \forall x\psi$, то $\varphi^M = (\forall x \in M)(\psi^M)$.

Пусть теперь φ — высказывание. Мы пишем $M \models \varphi$ и говорим, что φ истинно в M , или M является моделью для φ , если истинна его релятивизация φ^M .

Модель теории множеств — это множество M с тем свойством, что $M \models \varphi$ для каждой аксиомы φ системы ZFC.

Если система аксиом ZFC непротиворечива, то модель теории множеств существует (по теореме о существовании модели).

Обычно в теории множеств рассматривают только *стандартные транзитивные модели* (СТМ).

Теорема Лёвенгейма–Скулема \implies если существует какая-то СТМ теории множеств, то существует и счётная СТМ.

Определение

Пусть M — СТМ. Говорят, что формула $\varphi(x)$ **абсолютна** (для M), если

$$(\forall x \in M)(\varphi(x) \leftrightarrow \varphi^M(x)).$$

Предложение

- 1 Все атомы абсолютны.
- 2 Любая формула φ , которая содержит кванторы \exists и \forall только в составе выражений вида $(\exists x \in y)$ и $(\forall x \in y)$, абсолютна (такие формулы называются **Σ_0 -формулами**).
- 3 Любая формула φ с тем свойством, что для некоторой Σ_0 -формулы ψ $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, абсолютна.
- 4 Любая формула φ с тем свойством, что для некоторых Σ_0 -формул χ и ψ $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x \chi(x)$ и $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow \forall x \psi(x)$, абсолютна.

Доказательство. ②: Если φ — атом или имеет один из видов $\chi \wedge \psi$, $\chi \vee \psi$, $\chi \rightarrow \psi$ и $\neg\psi$ для абсолютных χ и ψ , то доказывать нечего. Пусть $\varphi(y, z)$ имеет вид $(\exists x \in y)\psi(x, y, z)$ для абсолютной ψ , и пусть $y, z \in M$.

Формула $\varphi(y, z)^M$ означает, что $((\exists x \in y)(\psi(x, y, z)))^M$. Следовательно, $\exists x \in y \in M$, для которого $\psi(x, y, z)^M$.

Транзитивность M + абсолютность $\psi \implies (\exists x \in y)\psi(x, y, z)$.

Обратно, формула $\varphi(y, z)$ означает, что $(\exists x \in y)\psi(x, y, z)$, т.е. $\psi(x, y, z)$ для некоторого $x \in y$. В случае $y \in M$ имеем $x \in M$. Формула ψ абсолютна $\implies \psi(x, y, z)^M$ для некоторого $x \in y$, т.е. $((\exists x \in y)\psi(x, y, z))^M$, а это и есть $\varphi(y, z)^M$.

③: Пусть x — набор всех свободных переменных в φ , и пусть ψ — Σ_0 -формула, для которой $ZFC \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Поскольку аксиомы ZFC не содержат свободных переменных, по правилу обобщения (одно из правил вывода для кванторов) имеем $ZFC \vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)$. Значит, $(\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi))^M$ (потому что M — модель ZFC), т.е. $(\forall x \in M)(\varphi^M \leftrightarrow \psi^M)$. С другой стороны, $(\forall x \in M)(\varphi \leftrightarrow \psi)$ и $(\forall x \in M)(\psi \leftrightarrow \psi^M)$ (так как ψ абсолютна). Следовательно, $(\forall x \in M)(\varphi \leftrightarrow \varphi^M)$. □

Предложение

Формула $WF(x, Y)$, означающая « x — отношение фундирования на Y », абсолютна.

Схема доказательства. Легко видеть, что утверждение « x является бинарным отношением на Y » выражается Σ_0 -формулой. Поэтому сосредоточимся на той части формулы WF , которая относится к существованию минимальных элементов. Обозначим соответствующее утверждение φ : для бинарного отношения R на Y формула $\varphi(R, Y)$ (« R — отношение фундирования») — это

$$\forall A((A \subset Y) \wedge (A \neq \emptyset) \rightarrow (\exists a \in A)(\forall b \in A)\neg(bRa)).$$

Видно, что формула WF , выписанная полностью, удовлетворяет одному из условий в пункте 4 предыдущего предложения.

Рассуждая по трансфинитной рекурсии, можно показать, что $ZFC \vdash \varphi(R, Y) \leftrightarrow \exists f((f \text{ — отображение } Y \rightarrow \text{Ord}) \wedge (\forall y, z \in Y)(yRz \rightarrow f(y) < f(z)))$, так что второе условие тоже выполнено. □

Список абсолютных формул

- $x \in Y$
- $X = Y$
- $X \subset Y$
- $\{x, y\}$
- $\{x\}$
- (x, y)
- \emptyset
- $X \cup Y$
- $X \cap Y$
- $X \setminus Y$
- $S(X) = X \cup \{X\}$
- $\cup X$
- $\cap X, X \neq \emptyset$
- $X \times X$
- R — отношение
- $\text{dom } R$
- $\text{ran } R$
- f — функция
- $f(x)$
- f — биекция
- X транзитивно
- X — ординал
- X — предельный ординал
- X — изолированный ординал
- X — конечный ординал
- ω
- 27
- X конечно
- X бесконечно
- X^n
- $X^{<\omega}$
($= \cup \{X^n : n \in \omega\}$)
- R упорядочивает X
- R вполне упорядочивает X
- порядковый тип (X, \leq)

Абсолютность трансфинитной рекурсии

Для любой функции-класса $G: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ (где \mathbf{V} — класс всех множеств) существует единственная трансфинитная последовательность ординалов $F: \text{Ord} \rightarrow \mathbf{V}$ такая, что $F(\alpha) = G(F|_{\alpha})$ для всех $\alpha \in \text{Ord}$.

Если G абсолютна, то и F абсолютна.

Схема доказательства. Применяя трансфинитную рекурсию внутри СТМ M , определяем $F^M: \text{Ord}^M \rightarrow M$ так, что $(\forall \alpha \in \text{Ord}^M)(F^M(\alpha) = G^M|_{\alpha})$. По трансфинитной индукции доказываем, что $F^M = F|_{\text{Ord}^M}$ (иначе рассмотрим наименьший ординал α , для которого это нарушается, и придём к противоречию). □

Теорема

- 1 Формулы $\text{rank } x$ и $\text{TC}(x)$ абсолютны.
- 2 Для любой СТМ M

$$(\forall X \in M)(\mathcal{P}(X)^M = \mathcal{P}(X) \cap M) \quad \text{и} \quad (\forall \alpha \in M)(V_{\alpha}^M = V_{\alpha} \cap M).$$

Генерическое расширение

В дальнейшем под (частично) упорядоченным множеством (сокращение: ч.у.м.) мы всегда будем иметь в виду тройку $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$, где P — множество, \leq — порядок на P и $\mathbf{1}$ — наибольший элемент P . Когда мы пишем $\mathbb{P} \in M$, мы имеем в виду, что $P \in M$, $\leq \in M$ и $\mathbf{1} \in M$. Скажем, что $x, y \in P$ **совместимы**, если существует элемент $z \in P$ такой, что $z \leq x$ и $z \leq y$. Если x и y несовместимы, мы пишем $x \perp y$.

Определение

Множество $D \subset P$ **плотно** в \mathbb{P} , если для каждого $p \in P$ существует $d \leq p$, $d \in D$.

Для данного $p \in P$ множество $D \subset P$ **плотно ниже p** , если для всякого $q \leq p$ существует $d \leq q$, $d \in D$.

Ясно, что всякое плотное множество плотно ниже любого $p \in P$.

Свойство «быть отношением частичного порядка» абсолютно, так как оно выражается через абсолютное свойство «быть отношением» формулой, содержащей лишь ограниченные кванторы. То же относится к понятиям плотности и плотности ниже p .

Определение

Пусть M — множество и $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м.. Множество $G \subset P$ называется **\mathbb{P} -генерическим над M** , или просто **генерическим**, если

- 1 $1 \in G$;
- 2 для любых $p, q \in G$ существует $r \in G$ такое, что $r \leq p$ и $r \leq q$;
- 3 если $p \in G$, $q \in P$ и $p \leq q$, то $q \in G$;
- 4 если $D \subset P$ плотно и $D \in M$, то $G \cap D \neq \emptyset$.

Предложение

Если M счётно, то для любого $p \in P$ найдётся генерическое множество $G \subset P$, содержащее p .

Доказательство. Перенумеруем все плотные $D \subset P$, принадлежащие множеству M : D_0, D_1, \dots . По индукции выберем $q_i \in D_i$ так, что $p \geq q_0 \geq q_1 \geq \dots$. Положим

$$G = \{r \in P : \text{существует } n \in \omega, \text{ для которого } q_n \leq r\}. \quad \square$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что M — счётная стандартная транзитивная модель ZFC и \mathbb{P} — частично упорядоченное множество, $\mathbb{P} \in M$. Напомним, что $p \perp q$ означает, что p и q несовместимы, т.е. не существует $r \in P$, для которого одновременно $r \leq p$ и $r \leq q$.

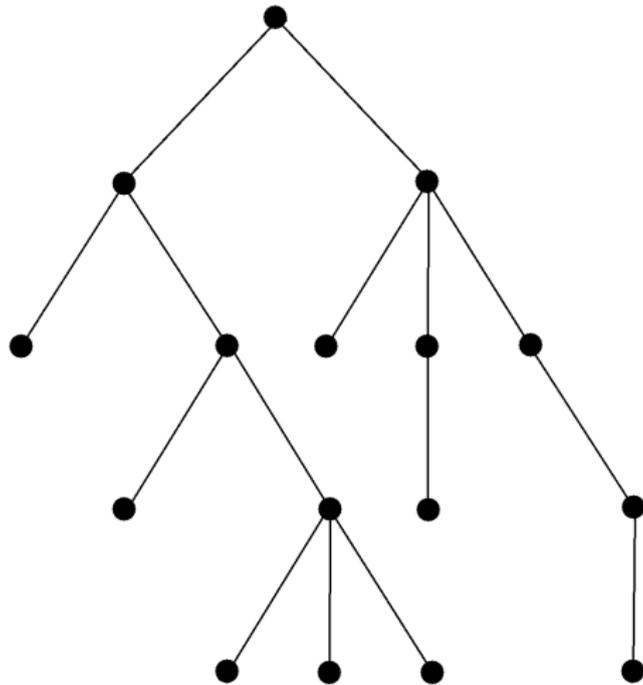
Предложение

Если \mathbb{P} таково, что для всякого $p \in P$ существуют $q, r \in P$ со свойствами

$$q \leq p, \quad r \leq p \quad \text{и} \quad q \perp r,$$

то никакое генерическое множество не принадлежит M .

Доказательство. Если G — генерическое множество и $G \in M$, то $D = P \setminus G \in M$ (так как операция \setminus абсолютна). Множество D плотно. (Действительно, пусть $p \in P$. Возьмём $q, r \in P$ такие, что $q \leq p$, $r \leq p$ и $q \perp r$. Поскольку $q \perp r$, имеем либо $q \notin G$, либо $r \notin G$, а значит, либо $q \in D$, либо $r \in D$.) Однако $G \cap D = \emptyset$. □



Исходя из счётной СТМ M , ч.у.м. \mathbb{P} и генерического множества G мы будем строить другую счётную СТМ $M[G]$ со свойствами

- 1 $M \subset M[G]$
- 2 $G \in M[G]$
- 3 $M[G]$ — минимальная модель со свойствами 1 и 2.

Позже мы увидим, что из свойств 1—3 вытекает свойство

- 4 $\text{Ord}^{M[G]} = \text{Ord}^M$.

(Грубо говоря, $M[G]$ — это множество всех множеств из M и множеств, которые можно получить из G с помощью процессов, определенных в M . Таким образом, хотя элементы $M[G]$ и не обязаны принадлежать модели M , их можно описывать изнутри M , если дать им имена из M .)

Элементы генерического множества G называются **условиями**.

Определение

Пусть α — ординал. Упорядоченное множество $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$, где

P — множество конечных частичных функций $\alpha \times \omega \rightarrow \{0, 1\}$,

$$p \leq q \iff p \supset q,$$

$$\mathbf{1} = \emptyset,$$

называется **α -коэновским частично упорядоченным множеством**.

Если M — СТМ ZFC и $\alpha \in M$, то α -коэновское множество принадлежит M — это вытекает из абсолютности множеств ω и $\{0, 1\}$ и формул $X \times Y$, $X \subset Y$, « X — функция» и « X конечно».

Элементы α -коэновского множества можно рассматривать как «конечные приближения» функций $\alpha \times \omega \rightarrow \{0, 1\}$.

Важно: для любой СТМ M имеем $\omega \in M$ и $\omega = \omega^M$. Однако даже если, например, $\omega_1 \in M$, нельзя утверждать, что $\omega_1 = \omega_1^M$. Если M счётна, то все ординалы $\alpha \in M$ не более чем счётны.

Предложение

Пусть \mathbb{P} — ω_2^M -коэновское ч.у.м., $G \subset \mathbb{P}$ — любое \mathbb{P} -генерическое множество и $g = \bigcup G$. Тогда

- 1 $g \in M[G]$ (очевидно);
- 2 g является функцией;
- 3 $\text{dom } g = \omega_2^M \times \omega$;
- 4 если $\alpha, \beta \in \omega_2^M$ и $\alpha \neq \beta$, то существует $n \in \omega$, для которого $g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)$.

Замечание

Любая функция $g: \omega_2^M \times \omega \rightarrow \{0, 1\}$ со свойством 4 порождает вложение $f: \omega_2^M \rightarrow \mathcal{P}(\omega)^{M[G]}$, определённое правилом

$$f(\alpha) = \{n \in \omega : g(\alpha, n) = 0\}.$$

Доказательство предложения

②: Ясно, что $g \subset \omega_2^M \times \omega \times \{0, 1\}$. Если бы множество g не было функцией, то нашлись бы $p, q \in G$ и $(\alpha, n) \in \text{dom } p \cap \text{dom } q$ такие, что $p(\alpha, n) \neq q(\alpha, n)$, т.е. для которых не существовало бы функции $r \in P$, являющейся продолжением и функции p , и функции q . Однако поскольку любые два условия (элемента G) совместимы в G (см. ② в определении), такая функция r обязана существовать.

③: Пусть $\alpha \in \omega_2^M$ и $n \in \omega$. Положим

$$D = \{p \in P : (\alpha, n) \in \text{dom } p\}.$$

Очевидно, $D \in M$. Множество D плотно: если $p \in P$, то либо $p \in D$, либо $d = p \cup \{((\alpha, n), 0)\} \in D$, причём $d \supset p$, т.е. $d \leq p$. По свойству ④ генерических множеств найдётся $q \in D \cap G$. Имеем $(\alpha, n) \in \text{dom } q \subset \text{dom } g$.

4: Пусть $\alpha < \beta < \omega_2^M$. Положим

$$D = \{p \in P : \exists n \in \omega \text{ такое, что} \\ (\alpha, n), (\beta, n) \in \text{dom } p \text{ и } p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}.$$

Очевидно, $D \in M$. Множество D плотно. Действительно, если $p \in P$, то $\text{dom } p$ конечно, а значит, существует $n \in \omega$, для которого пары (α, n) и (β, n) не принадлежат $\text{dom } p$. Положим

$$d = p \cup \{((\alpha, n), 0), ((\beta, n), 1)\}.$$

Имеем $d \leq p$ и $d \in D$.

Итак, D плотно. Значит, существует $q \in D \cap G$. Имеем

$$g(\alpha, n) = q(\alpha, n) \neq q(\beta, n) = g(\beta, n). \quad \square$$

Мы построили (в модели $M[G]$) функцию $g: \omega_2^M \times \omega \rightarrow \{0, 1\}$, а значит, и вложение $f: \omega_2^M \rightarrow \mathcal{P}(\omega)^{M[G]}$. Тем самым мы доказали, что $|\mathcal{P}(\omega)^{M[G]}| \geq |\omega_2^M|$. Чтобы доказать совместимость $\neg\text{CH}$ с ZFC, достаточно проверить, что

- $M[G]$ существует;
- $\omega_2^{M[G]} = \omega_2^M$.

Тогда мы сможем утверждать, что в некоторой модели $\omega_1 < 2^\omega$.

Имена и интерпретации

Пусть \mathbb{P} — ч.у.м. в СТМ M . Мы будем обозначать \mathbb{P} -имена греческими буквами τ, σ, π, \dots .

Определение (основное)

Класс \mathbb{P} -имён определяется по рекурсии:

- \emptyset — имя;
- множество τ — \mathbb{P} -имя, если τ — отношение (т.е. множество пар) и для любого $(\sigma, p) \in \tau$ σ — \mathbb{P} -имя и $p \in P$.

По-другому:

- $V_{\emptyset}^{\mathbb{P}} = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} = \mathcal{P}(V_{\alpha}^{\mathbb{P}} \times P)$ для любого ординала α ;
- $V_{\alpha}^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta}^{\mathbb{P}}$ для любого предельного ординала α ;
- $V^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_{\alpha}^{\mathbb{P}}$.

Множество $M^{\mathbb{P}}$ \mathbb{P} -имён из M — это $V^{\mathbb{P}} \cap M$.

Определение (упрощённое)

Множество τ — \mathbb{P} -имя из M , если $\tau \in M$ и $\tau \subset M \times P$.

Определение (основное)

Для $G \subset P$ G -интерпретация \mathbb{P} -имён — это отображение, которое каждому имени τ ставит в соответствие множество τ_G .
Определяется по рекурсии:

- $\emptyset_G = \emptyset$;
- $\tau_G = \{\sigma_G : \text{существует } p \in G, \text{ для которого } (\sigma, p) \in \tau\}$.

Определение (упрощённое)

G -интерпретация τ_G имени $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ — это множество

$$\tau_G = \{x \in M : \text{существует } p \in G, \text{ для которого } (x, p) \in \tau\}.$$

Определение

Генерическое расширение $M[G]$ модели M — это множество всех G -интерпретаций \mathbb{P} -имён из M : $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$.

Замечание

Множество $M[G]$ транзитивно. Если N — любая транзитивная модель ZFC, для которой $M \subset N$ и $G \in N$, то $M[G] \subset N$.

Примеры

- $\emptyset \in M^{\mathbb{P}}$ и $\emptyset_G = \emptyset$ для любого G .
- Для $p \in P$ $\{(\emptyset, p)\} \in M^{\mathbb{P}}$ и

$$\{(\emptyset, p)\}_G = \begin{cases} \{\emptyset\}, & \text{если } p \in G, \\ \emptyset, & \text{если } p \notin G. \end{cases}$$

- Для любого имени $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ $\{(\tau, \mathbf{1})\} \in M^{\mathbb{P}}$ и $\{(\tau, \mathbf{1})\}_G = \{\sigma_G : \sigma \in \tau\}$. (Если принято простое определение, то $\{(x, \mathbf{1})\} \in M^{\mathbb{P}}$ для любого $x \in M$, и $\{(x, \mathbf{1})\}_G = x$.)

Таким образом, каждому множеству x канонически (независимо от G и, по сути, от \mathbb{P}) соответствует имя

$$\check{x} = \{(\check{y}, \mathbf{1}) : y \in x\}.$$

Это определение абсолютно, так что если $x \in M$, то $\check{x} \in M$. Кроме того, $\check{x}_G = x$ (доказывается ϵ -индукцией).

- $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in P\} \in M^{\mathbb{P}}$, $\Gamma_G = \{\check{p}_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$.

- $\check{0} = \check{\emptyset} = \emptyset$.
- $1 = \{\emptyset\}$, $\check{1} = \{(\emptyset, 1)\}$.
- $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
 $\check{2} = \{(\check{0}, 1), (\check{1}, 1)\} = \{(\emptyset, 1), ((\emptyset, 1), 1)\}$.

Свойства $M[G]$ для СТМ M

- 1 Для любого имени $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ $\text{rank } \tau_G \leq \text{rank } \tau$.
(Доказывается простой ϵ -индукцией.)
- 2 Множества $M[G]$ и M содержат одни и те же ординалы:
 $\text{Ord}^{M[G]} = \text{Ord}^M$.
- 3 Если модель M счётна, то и $M[G]$ счётна.

Доказательство. Если $\alpha \in \text{Ord}^{M[G]}$, то $\alpha = \tau_G$ для некоторого $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Свойство 1 $\implies \text{rank } \alpha \leq \text{rank } \tau$. Поскольку $\text{rank } \alpha = \alpha$ для всякого ординала α , имеем $\alpha \leq \text{rank } \tau$. Определение ранга абсолютно \implies для любого $x \in M$ имеем $\text{rank } x \in M$, так что $\text{rank } \tau \in M$. Транзитивность M и определение порядка на ординалах $\implies \alpha \in M$.

Включение $\text{Ord}^M \subset \text{Ord}^{M[G]}$ следует из того, что $M \subset M[G]$. \square

Вынуждение

Определение

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — формула, M — СТМ, $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество в M и τ_1, \dots, τ_n — имена. Элементы $p \in P$ называются **условиями**. Говорят, что условие $p \in P$ **вынуждает** утверждение $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$, и пишут

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n),$$

если для любого \mathbb{P} -генерического множества $G \ni p$ над M имеем $M[G] \models \varphi(\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG})$ (т.е. верно $\varphi(\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG})^{M[G]}$).

Вместо x_1, \dots, x_n , τ_1, \dots, τ_n , $\tau_{1G}, \dots, \tau_{nG}$ будем писать \vec{x} , $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}_G$.

Теорема об определимости

Для любых $\varphi(\vec{x})$ и $\vec{\tau}$ и любого условия p высказывание $p \Vdash \varphi(\vec{\tau})$ можно доказать или опровергнуть внутри M .

Теорема об истинности

Для любого истинного в $M[G]$ высказывания существует условие из G , которое его вынуждает.

Замечание

Если $p, q \in P$, $p \leq q$ и $q \Vdash \varphi(\tau)$, то $p \Vdash \varphi(\tau)$.

Отношение \Vdash определено в классе V всех множеств, а не в модели M , поскольку оно предполагает знание всех генерических множеств $G \subset P$. Мы определим другое отношение \Vdash^* и покажем, что $p \Vdash \varphi(\tau)$ тогда и только тогда, когда $(p \Vdash \varphi^*(\tau))^M$.

Пример

Предположим, что $\tau_1 = \{(\pi_1, s)\}$, $\tau_2 = \{(\pi_2, s)\}$ и житель M пытается понять, какие условия p вынуждают $\tau_1 = \tau_2$.

Если $p \perp s$, то $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$, потому что $s \notin G$ для $G \ni p$, так что $\tau_{1G} = \tau_{2G} = \emptyset$ для всех $G \ni p$.

Если $p \leq s$, то для любого $G \ni p$ имеем $\tau_{1G} = \{\pi_{1G}\}$ и $\tau_{2G} = \{\pi_{2G}\}$, так что $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ тогда и только тогда, когда $p \Vdash \pi_1 = \pi_2$ (при условии, что $p \leq s$). Можно показать, что $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ тогда и только тогда, когда

$$\forall q \in P ((q \leq p) \wedge (q \leq s) \rightarrow q \Vdash \pi_1 = \pi_2).$$

Определение

(Индукция по рангу имён и длине формул.) Пусть $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество. Для любых $p \in P$, любых имён τ_1, \dots, τ_n и любых формул $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и $\psi(x_1, \dots, x_n)$

1 $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$, если

(α) $\forall (\pi_1, s_1) \in \tau_1 \forall q \leq p \exists r \leq q$
 $((r \leq s_1) \rightarrow \exists (\pi_2, s_2) \in \tau_2 ((r \leq s_2) \wedge (r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)))$

(β) $\forall (\pi_2, s_2) \in \tau_2 \forall q \leq p \exists r \leq q$
 $((r \leq s_2) \rightarrow \exists (\pi_1, s_1) \in \tau_1 ((r \leq s_1) \wedge (r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)))$.

2 $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$, если $\forall q \leq p \exists r \leq q$

$\exists (\pi, s) \in \tau_2 ((r \leq s) \wedge (r \Vdash^* \pi = \tau_1))$.

3 $p \Vdash^* (\varphi(\vec{\tau}) \wedge \psi(\vec{\tau}))$, если $p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$ и $p \Vdash^* \psi(\vec{\tau})$.

4 $p \Vdash^* \neg\varphi(\vec{\tau})$, если не существует $q \leq p$ такого, что $q \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$.

5 $p \Vdash^* \exists x(\varphi(x, \vec{\tau}))$, если для каждого $q \leq p$ существуют условие $r \leq q$ и имя σ , для которых $r \Vdash^* \varphi(\sigma, \vec{\tau})$.

Лемма (1)

Если $E \in M$, $E \subset P$ и G — генерическое множество, то

- 1 либо $G \cap E \neq \emptyset$, либо существует $q \in G$ такое, что $q \perp E$ (т.е. $q \perp r$ для всех $r \in E$);
- 2 если $p \in G$ и E плотно ниже p , то $G \cap E \neq \emptyset$.

Доказательство. 1 вытекает из плотности множества

$$D = \{p \in P : \exists r \in E(p \leq r)\} \cup \{q \in P : \forall r \in E(q \perp r)\}$$

и того, что любое генерическое множество пересекает все плотные множества, и что если $p \in G$ и $r \geq p$, то $r \in G$ (см. определение генерических множеств).

2: Пусть $G \cap E = \emptyset$. Пользуясь утверждением 1, зафиксируем $q \in G$, удовлетворяющее условию $q \perp E$. Пусть $q' \in G$, $q' \leq q$, $q' \leq p$ (оно существует, так как G генерическое). Поскольку E плотно ниже p , найдётся $r \in E$ такое, что $r \leq q' \leq q$. Получили противоречие. □

Лемма (2)

Для любого условия p и любой формулы $\varphi(\vec{x})$ следующие утверждения равносильны:

- 1 $p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$;
- 2 $\forall r \leq p (r \Vdash^* \varphi(\tau^*))$;
- 3 $\forall q \leq p \exists r \leq q (r \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))$.

Доказательство. Импликации $2 \Rightarrow 3$ и $2 \Rightarrow 1$ тривиальны. Чтобы доказать, что $1 \Rightarrow 2$ и $3 \Rightarrow 1$ для атомов, достаточно проанализировать определение отношения \Vdash^* и определение генерического множества. Для составных формул применяется индукция по длине формулы (индуктивное предположение нужно только при рассмотрении формул вида $\varphi_1 \wedge \varphi_2$). □

Лемма (3)

Для любой формулы $\varphi(\vec{x})$, любого набора имён $\vec{\tau}$ и любого генерического множества G

- 1 $p \in G \wedge (p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))^M \rightarrow (\varphi(\vec{\tau}_G))^{M[G]}$;
- 2 $(\varphi(\vec{\tau}_G))^{M[G]} \rightarrow \exists p \in G ((p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))^M)$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по рангу имён для атомов и по длине формулы для сложных формул. Мы разберём только один ингредиент доказательства (это даст хорошее представление об остальных).

Проверим ❶ для формулы $\tau_1 = \tau_2$. Пусть $p \in G$ и $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Надо показать, что $\tau_{1G} = \tau_{2G}$, т.е. $\tau_{1G} \subset \tau_{2G}$ и $\tau_{2G} \subset \tau_{1G}$. Докажем первое включение (второе аналогично).

Любой элемент интерпретации τ_{1G} имеет вид π_{1G} , где $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ для некоторого $s_1 \in G$. Надо показать, что $\pi_{1G} \in \tau_{2G}$. Зафиксируем $q \in G$ такое, что $q \leq p$ и $q \leq s_1$. По лемме (2) имеем $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Множество тех $r \in P$, которые удовлетворяют условию в пункте ❶ (α) определения отношения \Vdash^* , в котором p заменено на q , плотно ниже q . По лемме (1) это множество пересекает G , т.е.

$$\exists r \in G \left((r \leq q) \wedge \left((r \leq s_1) \rightarrow \exists (\pi_2, s_2) \in \tau_2 \left((r \leq s_2) \wedge (r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \right) \right) \right)$$

(переписали (α) с q вместо p и $r \in G$ вместо любого $r (\in P)$).

Но $q \leq s_1$; значит, для любого $r \leq q$ имеем $r \leq s_1$, так что нужное имя (π_2, s_2) существует. Зафиксируем его.

Имеем $s_2 \in G$ (так как $s_2 \geq r \in G$). Следовательно, $\pi_{2G} \in \tau_{2G}$. Поскольку $\text{rank } \pi_i < \text{rank } \tau_i$, по индуктивному предположению $r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2 \rightarrow \pi_{1G} = \pi_{2G}$, откуда $\pi_{1G} \in \tau_{2G}$. □

Основная теорема (определимость + истинность)

Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество в M , $\varphi(\vec{x})$ — формула и $\vec{\tau}$ — набор имён из M .

Тогда

- 1 для всякого $p \in P$ $p \Vdash \varphi(\vec{\tau}) \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))^M$;
- 2 для всякого \mathbb{P} -генерического множества G над M
 $\varphi(\vec{\tau}_G)^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G (p \Vdash \varphi(\vec{\tau}))$.

Доказательство. 1, \leftarrow : из леммы (3) и определения \Vdash .

1, \rightarrow : лемма (2) \implies достаточно показать, что

$D = \{r \in P : (r \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))\}$ плотно ниже p . Пусть это не так, и пусть $q \leq p$ таково, что $\neg \exists r \leq q (r \in D)$. По определению \Vdash^* имеем $(q \Vdash^* \neg \varphi(\vec{\tau}))^M$. Доказанная импликация $\leftarrow \implies$

$q \Vdash \neg \varphi(\vec{\tau})$. Если G — генерическое множество и $q \in G$, то $(\neg \varphi(\vec{\tau}_G))^{M[G]}$, но $p \in G$ (так как $p \geq q$), откуда $(\varphi(\vec{\tau}_G))^{M[G]}$ — противоречие.

2, \rightarrow : из 1 и леммы (3) 2.

2, \leftarrow : из определения \Vdash .



Следствие

Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — ч.у.м. в M и $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n$ — имена в M . Тогда

- 1 множество $\{p \in P : (p \Vdash \varphi(\vec{\tau})) \vee (p \Vdash \neg\varphi(\vec{\tau}))\}$ плотно в P ;
- 2 $p \nVdash \neg\varphi(\vec{\tau}) \leftrightarrow \neg\exists q \leq p (q \Vdash \varphi(\vec{\tau}))$;
- 3 $p \Vdash \exists x \varphi(x, \vec{\tau}) \leftrightarrow \{r \leq p : \exists \pi \in M^{\mathbb{P}} (r \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau}))\}$ плотно ниже p ;
- 4 если $p \Vdash \exists x (x \in \sigma \wedge \varphi(x, \vec{\tau}))$, то $\exists q \leq p \exists \pi \in \text{dom}(\sigma) (q \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau}))$.

Доказательство. Утверждения 1–3 верны для \Vdash^* (по определению), значит, они верны и для \Vdash (по основной теореме 1).

Докажем 4. Зафиксируем генерическое множество $G \ni p$. По определению \Vdash найдётся $a \in \sigma_G$, для которого $(\varphi(a, \vec{\tau}))^{M[G]}$; имеем $a \in \pi_G$ для некоторого $\pi \in \text{dom}(\sigma)$. По основной теореме 2 $\exists r \in G (r \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau}))$. Для $q \leq p$, $q \leq r$ имеем $q \Vdash \varphi(\pi, \vec{\tau})$. □

ZFC в $M[G]$

Аксиома существования: множества существуют.

Выполнение в $M[G]$ очевидно.

Аксиома объёмности: два множества равны \iff каждый элемент одного из них принадлежит другому и наоборот.

Выполнение в $M[G]$ вытекает из транзитивности $M[G]$.

Аксиома регулярности: $X \neq \emptyset \implies$ существует $x \in X$ такой, что $X \cap x = \emptyset$.

Из транзитивности.

Аксиома бесконечности: существует множество, которое содержит в качестве элемента \emptyset и вместе с каждым элементом x содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$.

$\omega = \check{\omega}_G \in M[G]$.

Аксиома пары: для любых множеств x и y существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — x и y .

Поскольку $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$, достаточно показать, что для любых имён $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ найдётся имя ПАРА $(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$, которое всегда интерпретируется как $\{\sigma_G, \tau_G\}$. Оно определяется так:

$$\text{ПАРА}(\sigma, \tau) = \{(\sigma, \mathbf{1}), (\tau, \mathbf{1})\}.$$

Схема аксиом выделения: любому множеству X и любому свойству φ отвечает множество Y , состоящее в точности из тех элементов множества X , которые обладают свойством φ .

Надо проверить, что для любых $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ и любой формулы $\varphi(x, \vec{y})$ имеем $\{u \in \sigma_G : (\varphi(u, \vec{\tau}_G))^{M[G]}\} \in M[G]$.

Положим

$$\rho = \{(\pi, p) \in \text{dom}(\sigma) \times P : p \Vdash ((\pi \in \sigma) \wedge \varphi(\pi, \vec{\tau}))\}.$$

Из теоремы об определимости вытекает, что $\rho \in M$ (а значит, $\rho \in M^{\mathbb{P}}$). Покажем, что $\rho_G = \{u \in \sigma_G : (\varphi(u, \vec{\tau}_G))^{M[G]}\}$.

Любой элемент ρ_G имеет вид π_G , где $(\pi, p) \in \rho$ для некоторого $p \in G$. По определению $p \Vdash ((\pi \in \sigma) \wedge \varphi(\pi, \vec{\tau}))^{M[G]}$; значит, $\rho_G \subset \{u \in \sigma_G : (\varphi(u, \vec{\tau}_G))^{M[G]}\}$.

Докажем обратное включение. Пусть $u \in \sigma_G$ и $(\varphi(u, \vec{\tau}_G))^{M[G]}$. Тогда $u = \pi_G$ для некоторого $\pi \in \text{dom}(\sigma)$. Значит, $((\pi_G \in \sigma_G) \wedge \varphi(\pi_G, \vec{\tau}_G))^{M[G]}$. Любое высказывание, истинное в $M[G]$, вынуждается некоторым условием из $G \implies$ найдётся $p \in G$, для которого $p \Vdash ((\pi \in \sigma) \wedge \varphi(\pi, \vec{\tau}))$, так что $(\pi, p) \in \rho$, откуда $\pi_G \in \rho_G$.

Аксиома объединения: для любого семейства множеств \mathcal{F} существует множество $X = \bigcup \mathcal{F}$ — объединение семейства \mathcal{F} ; его элементами являются в точности все элементы множеств-элементов семейства \mathcal{F} .

Поскольку у нас уже есть аксиома выделения, достаточно проверить, что для любого $\mathcal{F} \in M[G]$ существует $X \in M[G]$ такое, что $\bigcup \mathcal{F} \subset X$, т.е. $(\forall Y \in \mathcal{F})(Y \subset X)$.

Пусть τ — имя и $\tau_G = \mathcal{F}$. Для $\pi = \bigcup \text{dom}(\tau)$ имеем $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ и $X = \pi_G \in M[G]$. Пусть $Y \in \mathcal{F}$. Тогда $Y = \sigma_G$ для некоторого имени $\sigma \in \text{dom}(\tau)$. Поскольку $\sigma \subset \pi$, имеем $Y = \sigma_G \subset \pi_G = X$.

Аксиома множества подмножеств: для любого множества X существует множество Y , состоящее из всех подмножеств множества X .

Пусть $X = \tau_G \in M[G]$. Положим $\sigma = S \times \{\mathbf{1}\}$ для

$$S = \{\pi \in M^{\mathbb{P}} : \text{dom}(\pi) \subset \text{dom}(\tau)\} = (\mathcal{P}(\text{dom}(\tau) \times P))^M.$$

Зафиксируем имя ρ , для которого $\rho_G \subset \tau_G$. Покажем, что $\rho_G \in \sigma_G$. Положим

$$\mu = \{(\nu, p) : \nu \in \text{dom}(\tau) \wedge p \Vdash \nu \in \rho\}.$$

Имеем $\mu \in S$, откуда $\mu_G \in \sigma_G$. Осталось показать, что $\rho_G = \mu_G$.

Покажем, что $\rho_G \subset \mu_G$. Поскольку $\rho_G \subset \tau_G$, любой элемент ρ_G имеет вид ν_G для некоторого $\nu \in \text{dom}(\tau)$, а поскольку $\nu_G \in \rho_G$, по теореме об истинности найдётся условие $p \in G$, для которого $p \Vdash \nu \in \rho$, так что $(\nu, p) \in \mu$ и $\nu_G \in \mu_G$.

Докажем обратное включение $\mu_G \subset \rho_G$. Любой элемент μ_G имеет вид ν_G для имени ν с тем свойством, что $(\nu, p) \in \mu$ для некоторого $p \in G$. Значит, $p \Vdash \nu \in \rho$ и $\nu_G \in \rho_G$.

Схема аксиом подстановки: если $\varphi(x, y)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества a существует единственное множество b такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества X определено множество Y , элементами которого являются те и только те множества y , для которых $\varphi(x, y)$ истинно при некотором $x \in X$.

Пусть $X = \tau_G$, и пусть множество имён $S \in M$ таково, что

$$(\forall \pi \in \tau)(\forall p \in P)((\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}})(p \Vdash \varphi(\pi, \sigma)) \rightarrow (\exists \sigma \in S)(p \Vdash \varphi(\pi, \sigma))).$$

Существование множества S следует из теоремы об определимости и общего **принципа отражения**: для любой формулы $\varphi(x, y)$ и любого множества S_0 существует множество $S \supset S_0$ такое, что для всякого $x \in S$

$$\exists y(\varphi(x, y)) \rightarrow (\exists y \in S)(\varphi(x, y)).$$

Множество S строится так: для всякого множества x положим $C_x = \{y : \varphi(x, y)\}$ (это класс) и для всякого множества Y положим

$$\mathfrak{C}(Y) = Y \cup \bigcup_{x \in Y} \{y \in C_x : (\forall z \in C_x)(\text{rank } y \leq \text{rank } z)\}$$

(это множество). По рекурсии определяем $S_{n+1} = \mathfrak{C}(S_n)$ для $n \in \omega$. Множество $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n$ обладает нужными свойствами.

Пусть $\sigma = S \times \{\mathbf{1}\}$. Тогда $\sigma_G = \{\pi_G : \pi \in S\}$. Зафиксируем $x \in \tau_G$ и покажем, что найдётся $y = \rho_G \in \sigma_G$ такое, что $(\varphi(x, y))^{M[G]}$. По предположению $(\exists! y \varphi(\pi_G, y))^{M[G]}$, поэтому для некоторого имени ρ имеем $(\varphi(\pi_G, \rho_G))^{M[G]}$, и по основной теореме ② $(\exists \rho \in G)(\rho \Vdash \varphi(\pi, \rho))$. Следовательно,

$$(\exists \rho \in S)(\rho \Vdash \varphi(\pi, \rho)),$$

откуда $\rho_G \in \sigma_G$ и $(\varphi(\pi_G, \rho_G))^{M[G]}$.

Мы показали, что для всякого $x \in \tau_G = X$ найдётся $y \in \sigma_G$, для которого $\varphi(x, y)$. По предположению такой y единствен. Применив аксиому выделения, получим требуемое множество $Y \subset \sigma_G$.

Аксиома выбора. По теореме Цермело аксиома выбора равносильна утверждению, что *на каждом множестве существует отношение полного порядка.*

Существование полного порядка на множестве X равносильно существованию ординала α и отображения $f: \alpha \xrightarrow{\text{на}} X$.

Действительно, если они существуют, то отображение $g: X \rightarrow \alpha$, определённое правилом $g(x) = \min\{f^{-1}(x)\}$, инъективно, и полный порядок на X можно определить правилом $x \leq y \Leftrightarrow g(x) \leq g(y)$.

Зафиксируем $X = \tau_G \in M[G]$. Пользуясь тем, что аксиома выбора верна в M , перенумеруем элементы $\text{dom}(\tau)$ посредством принадлежащей M биекции $f: \alpha \rightarrow \text{dom}(\sigma)$ (α — ординал):

$$\text{dom}(\tau) = \{\pi_\gamma : \gamma < \alpha\},$$

где $\pi_\gamma = f(\gamma)$. Положим

$$\sigma = \{\text{ПАРА}(\check{\gamma}, \pi_\gamma) : \gamma < \alpha\} \times \{\mathbf{1}\}.$$

Имеем $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ и $\sigma_G = \{(\gamma, \pi_{\gamma_G}) : \gamma < \alpha\}$, так что σ_G — отображение, $\text{dom}(\sigma_G) = \alpha$ и $\tau_G \subset \text{ran}(\sigma_G)$.

Первая теорема о сохранении кардиналов

Пусть $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество.

Определение

Множество $A \subset P$ называется **антицепью**, если оно состоит из попарно несовместимых элементов. Множество $C \subset P$ называется **цепью**, если отношение \leq индуцирует на нём линейный порядок.

В следующем определении слово «цепей» следовало бы заменить на «антицепей», но по устоявшейся традиции говорят именно о цепях.

Определение

Говорят, что ч.у.м. \mathbb{P} удовлетворяет **условию счётности цепей** (у.с.ц.), если \mathbb{P} не содержит несчётных антицепей.

Теорема (первая теорема о сохранении кардиналов)

Пусть M — СТМ и $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м. и $\kappa \in M$. Если

$M \models (\kappa \text{ — кардинал и } \mathbb{P} \text{ удовлетворяет у.с.ц.}),$

то $\mathbf{1} \Vdash (\check{\kappa} \text{ — кардинал}),$ т.е. κ остаётся кардиналом в $M[G]$ для любого генерического множества $G \subset P$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $G \subset P$ — генерическое множество и функция $f \in M[G]$ отображает некоторый ординал $\lambda < \kappa$ на κ . Тогда $f = \varphi_G$ для некоторого имени φ . По теореме об истинности для некоторого $p \in G$ имеем $p \Vdash (\varphi \text{ — функция из } \check{\lambda} \text{ на } \check{\kappa}).$

Рассуждаем в M . Для каждого $\alpha < \lambda$ положим

$$A_\alpha = \{\beta < \kappa : \exists q \leq p (q \Vdash \varphi(\check{\alpha}) = \check{\beta})\}.$$

Это множество действительно можно определить в M :

$$A_\alpha = \{\beta < \kappa : \exists q \leq p (q \Vdash^* \text{ПАРА}(\check{\alpha}, \check{\beta}) \in \varphi)\}.$$

Множество A_α можно представлять себе как совокупность всех возможных значений $\varphi(\check{\alpha})$ при разных интерпретациях.

Для каждого $\beta \in A_\alpha$ выберем условие $q(\beta) \leq r$, вынуждающее $\varphi(\check{\alpha}) = \check{\beta}$. Для $\beta \neq \gamma$ условия $q(\beta)$ и $q(\gamma)$ несовместимы. Действительно, если $r \leq q(\beta)$ и $r \leq q(\gamma)$, то

$$r \Vdash (\varphi \text{ — функция из } \check{\lambda} \text{ на } \check{\kappa}) \wedge (\varphi(\check{\alpha}) = \check{\beta}) \wedge (\varphi(\check{\alpha}) = \check{\gamma}).$$

Из того, что \mathbb{P} удовлетворяет у.с.ц. в M , следует, что $|A_\alpha|^M \leq \omega$ для каждого $\alpha < \lambda$. Положим $A = \bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha$. Имеем $|A|^M \leq |\lambda|$.

Возьмём любой ординал $\beta < \kappa$. В $M[G]$ имеем $\beta = f(\alpha)$ для некоторого $\alpha < \lambda$. По теореме об истинности существует $q \in G$, для которого $q \Vdash (\varphi(\check{\alpha}) = \check{\beta})$, причём можно считать, что $q \leq r$. Это означает, что $\beta \in A_\alpha \subset A$. Значит, $\kappa \subset A$. Из абсолютности отношения \subset и того, что $\kappa, A \in M$, получаем $|A|^M \geq \kappa$.

Противоречие. □

Как это работает

Предложение

α -коэновское ч.у.м. \mathbb{P} удовлетворяет условию счётности цепей для любого ординала α .

Определение

Семейство множеств \mathcal{F} называется Δ -системой, если существует множество R такое, что $A \cap B = R$ для любых различных $A, B \in \mathcal{F}$. Множество R называется **корнем** Δ -системы \mathcal{F} .

Лемма о Δ -системе

Любое несчётное семейство \mathcal{F} конечных множеств содержит несчётную Δ -систему.

Доказательство предложения. Предположим, что в α -коэновском ч.у.м. \mathbb{P} есть несчётная антицепь A . Для каждого конечного множества $F \subset \alpha \times \omega$ множество функций $F \rightarrow \{0, 1\}$ конечно. Значит, семейство $\mathcal{F} = \{\text{dom}(p) : p \in A\}$ несчётно. По лемме о Δ -системе найдутся несчётное подсемейство $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ и конечное множество $R \subset \alpha \times \omega$ такие, что \mathcal{F}' — Δ -система с корнем R , т.е. $F' \cap F'' = R$ для любых различных $F', F'' \in \mathcal{F}'$. Поскольку число разных функций $R \rightarrow \{0, 1\}$ конечно, можно подобрать $p, q \in A$, для которых $\text{dom}(p) \neq \text{dom}(q)$, $\text{dom}(p) \cap \text{dom}(q) = R$ и $p|_R = q|_R$. Функция $r = p \cup q$ продолжает как p , так и q , т.е. $r \leq p$ и $r \leq q$ в \mathbb{P} в противоречие с тем, что A — антицепь. □

Доказательство леммы о Δ -системе. Без ограничения общности можно считать, что все множества в \mathcal{F} имеют одинаковую мощность n и что все они — подмножества ω_1 .

Индукция по n . Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$. Если существует $\alpha \in \omega_1$, для которого семейство

$$\mathcal{F}_\alpha = \{F \in \mathcal{F} : \min F = \alpha\}$$

несчётно, то надо рассмотреть

$$\mathcal{F}'' = \{F \setminus \{\alpha\} : F \in \mathcal{F}_\alpha\}$$

и применить индуктивное предположение. Если $\tilde{\mathcal{F}}'' \subset \mathcal{F}''$ — несчётная Δ -система и R'' — её корень, то $\{F \cup \{\alpha\} : F \in \tilde{\mathcal{F}}''\} \subset \mathcal{F}$ — несчётная Δ -система с корнем $R'' \cup \{\alpha\}$.

В противном случае по трансфинитной рекурсии легко построить отображение $f: \omega_1 \rightarrow \mathcal{F}$ такое, что

$$\left(\bigcup_{\beta < \alpha} f(\beta)\right) \subset \min f(\alpha)$$

для всех $\alpha < \omega_1$. В этом случае $\mathcal{F}' = \{f(\alpha) : \alpha < \omega_1\} \subset \mathcal{F}$ — несчётная Δ -система с корнем $R = \emptyset$. □

Совместимость континуум-гипотезы

Истинность CH в модели M означает, что существует функция $f \in M$ из ω_1^M на $\mathcal{P}^M(\omega)$.

Определение

Антикоэновским частично упорядоченным множеством называется множество

$P = \{p : p \text{ — частичная функция из } \omega_1 \text{ в } \mathcal{P}(\omega), |\text{dom}(p)| \leq \omega\}$,
упорядоченное обратным включению.

В антикоэновском ч.у.м. наибольший элемент $\mathbf{1}$ — это пустая функция.

Предложение

Пусть $\mathbb{P} \in M$ — антикоэновское ч.у.м., $G \subset \mathbb{P}$ — любое \mathbb{P} -генерическое множество и $g = \bigcup G$. Тогда $g \in M[G]$ и g является сюръективной функцией из ω_1^M на $\mathcal{P}^M(\omega)$.

Доказательство. Любые два элемента G совместимы \iff любые две функции из G имеют общее продолжение \iff для любого $\alpha \in \omega_1$ и любых $p, q \in G$ имеем $p(\alpha) = q(\alpha) \iff g = \cup G$ — отображение из (подмножества) ω_1 в $\mathcal{P}^M(\omega)$.

Пусть $\alpha \in \omega_1$. Множество

$$D = \{p \in P : \alpha \in \text{dom } p\}$$

плотно в P (для любого $q \in P$ либо $\alpha \in \text{dom } q$, и тогда $q \in D$, либо $\alpha \notin \text{dom } q$, и тогда $p = q \cup \{(\alpha, \emptyset)\} \in D$ и $p \leq q$). Значит, $G \cap D \neq \emptyset$, т.е. G содержит функцию, определённую в точке $\alpha \implies$ отображение g определено в точке α .

Пусть $N \in M$, $N \subset \omega$. Множество

$$D = \{p \in P : N \in \text{ran } p\}$$

плотно в P (для любого $q \in P$ существует $\alpha \notin \text{dom } q$; имеем $p = q \cup \{(\alpha, N)\} \in D$ и $p \leq q$). Значит, $G \cap D \neq \emptyset$, т.е. G содержит функцию, принимающую значение N в некоторой точке \implies отображение g принимает значение N в некоторой точке $\implies g: \omega_1^M \rightarrow \mathcal{P}^M(\omega)$ сюръективно. □

Чтобы доказать, что $M[G] \models \text{CH}$ (т.е. что CH истинна в $M[G]$), надо проверить, что

$$\mathcal{P}^{M[G]}(\omega) = \mathcal{P}^M(\omega) \quad \text{и} \quad \omega_1^M \text{ — кардинал в } M[G].$$

Определение

Частично упорядоченное множество \mathbb{P} называется **ω -замкнутым**, если для любой невозрастающей последовательности $(p_n)_{n \in \omega}$ условий из P найдётся $p \in P$ такое, что $p \leq p_n$ для всех $n \in \omega$.

Очевидно, антикоэновское множество ω -замкнуто.

Теорема (о сохранении функций)

Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м., $M \models (\mathbb{P} \text{ } \omega\text{-замкнуто})$, G — генерическое множество, $X \in M$ и $f \in M[G]$ — функция $\omega \rightarrow X$. Тогда $f \in M$.

Доказательство. Пусть $f \in M[G]$ — функция $\omega \rightarrow X$.
 Предположим, что $f \notin X^\omega \cap M$. Зафиксируем имя τ , для
 которого $f = \tau_G$, и условие $p \in P$ такое, что

$$p \Vdash \tau \text{ — функция } \check{\omega} \rightarrow \check{X} \text{ и } \tau \notin (\check{X}^\omega).$$

Рассуждаем в M . По индукции построим последовательности
 $(p_n)_{n \in \omega}$ условий из P и $(x_n)_{n \in \omega}$ точек из X так, что

- $p_0 = p$,
- $p_{n+1} \leq p_n$ для $n \in \omega$,
- $p_{n+1} \Vdash \tau(\check{n}) = \check{x}_n$ для $n \in \omega$.

На n -м шаге точка x_n и условие p_{n+1} строятся так: поскольку
 $p_n \Vdash (\tau \text{ — функция } \check{\omega} \rightarrow \check{X})$, имеем $p \Vdash \exists \pi \in \check{X} (\tau(\check{n}) = \pi)$.

Поскольку все имена $\pi \in \check{X}$ имеют вид \check{x} для $x \in X$, в силу
 следствия из основной теоремы, пункт 4, существуют $x_n \in X$ и
 $p_{n+1} \in P$, для которых $p_{n+1} \Vdash \tau(\check{n}) = \check{x}_n$.

Получили последовательность $g = (x_n)_{n \in \omega} = \{(n, x_n) : n \in \omega\} \in M$.
 Это функция $\omega \rightarrow X$. \mathbb{P} ω -замкнуто $\implies \exists p_\omega \in P$ такое, что
 $p_\omega \leq p_n$ для $n \in \omega$. Для любого генерического множества $G' \ni p_\omega$
 и любого $n \in \omega$ имеем $\tau_{G'}(n) = x_n$, откуда $\tau_{G'} = g \in X^\omega = (\check{X}^\omega)_{G'}$,
 в противоречие с предположением, что $p_0 \Vdash \tau \notin (\check{X}^\omega)$. □

Следствие

Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м., $M \models (\mathbb{P} \text{ } \omega\text{-замкнуто})$ и G — генерическое множество. Тогда

- 1 $\mathcal{P}^{M[G]}(\omega) = \mathcal{P}^M(\omega)$;
- 2 $\omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$.

1 Если $A \in \mathcal{P}^{M[G]}(\omega) \setminus \mathcal{P}^M(\omega)$, то характеристическая функция $\chi_A: \omega \rightarrow \{0, 1\}$ — контрпример к теореме.

2 Очевидно.



Теорема (Гёдель, 1940)

Существует СТМ, в которой истинна континуум-гипотеза.

Гипотеза Суслина

Пусть (X, \leq) — линейно упорядоченное множество, и пусть $L, R \subset X$, причём $L \cup R = X$ и $L < R$ (т.е. $x < y$ для любых $x \in L$ и $y \in R$). Пара L, R называется

- **скачком**, если существуют $\max L \in L$ и $\min R \in R$;
- **дедекиндовым сечением**, если не существует $\min R$;
- **щелью**, если не существуют $\min R$ и $\max L$.

Пусть (L, R) и (L', R') — дедекиндовы сечения. Будем писать $(L, R) \leq (L', R')$, если $L \subset L'$. Множество \widehat{X} всех дедекиндовых сечений, так упорядоченное, не содержит щелей и содержит X (каждый элемент X отождествляется с (L_x, R_x) , где $L_x = \{y \in X : y \leq x\}$ и $R_x = \{y \in X : x < y\}$). При этом X **плотно** в \widehat{X} , т.е. любой непустой интервал в \widehat{X} содержит точку из X . Множество \widehat{X} называется **дедекиндовым пополнением** линейно упорядоченного множества X .

Линейно упорядоченное множество X **связно**, если в нём нет скачков и щелей. Дедекиндово пополнение любого множества, в котором нет скачков, связно.

На каждом линейно упорядоченном множестве (X, \leq) естественно возникает **порядковая топология** \mathcal{T} : множество открыто \iff оно является объединением произвольного семейства открытых интервалов. Множество $Y \subset X$ плотно в X относительно этой топологии (т.е. его замыкание \bar{Y} совпадает с X) $\iff Y$ плотно в X в смысле порядка. Топологическое пространство (X, \mathcal{T}) связно (т.е. его нельзя представить как объединение непересекающихся непустых открытых множеств) $\iff (X, \leq)$ связно в смысле порядка.

Вещественная прямая \mathbb{R} — дедекиндово пополнение множества рациональных чисел \mathbb{Q} . Она связна и **сепарабельна** (т.е. содержит счётное всюду плотное множество). Кроме того, в \mathbb{R} нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Хорошо известно и нетрудно показать, что всякое линейно упорядоченное множество, которое

- не содержит ни наименьшего, ни наибольшего элемента,
- связно,
- сепарабельно

порядково изоморфно прямой \mathbb{R} .

Определение

Топологическое пространство обладает **свойством Суслина**, если в нём всякое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств не более чем счётно.

Замечания

1. Всякое сепарабельное пространство обладает свойством Суслина.
2. Топология \mathcal{T} (семейство всех открытых множеств) любого топологического пространства X частично упорядочена отношением \subset . Пространство X обладает свойством Суслина $\iff \mathcal{T}$ удовлетворяет условию счётности цепей.

Определение

Прямая Суслина — это несепарабельное линейно упорядоченное пространство со свойством Суслина.

Гипотеза Суслина — это утверждение «прямых Суслина не существует». Обозначение: **SH**.

Топологические произведения

Декартово произведение семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ определяется так:

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : \forall \alpha \in A (f(\alpha) \in X_\alpha) \right\}.$$

Элемент $f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ принято записывать не в виде отображения, а в специальном виде $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где подразумевается, что $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого α . При этом x_α называется **α -й координатой** элемента $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Канонической проекцией произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на сомножитель X_β , где $\beta \in A$, называется отображение $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

На декартовом произведении $X \times Y$ двух топологических пространств имеется естественная **топология произведения** — в ней открыты всевозможные объединения множеств вида

$$U \times V, \quad \text{где } U \text{ открыто в } X, V \text{ открыто в } Y.$$

Топологическим произведением, или просто **произведением**, двух топологических пространств называется их декартово произведение с этой топологией.

Тихоновская топология, или **топология произведения**, на декартовом произведении $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ произвольного семейства топологических пространств — это самая слабая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны. Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются **топологическими**, или **тихоновскими**, **произведениями**. Открытые множества — всевозможные объединения множеств вида $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, где каждое U_α — открытое подмножество X_α и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, индексов α .

В теории категорий произведение объектов X_α , $\alpha \in A$, определяется как объект X вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ (называемых каноническими проекциями) с тем свойством, что для любого объекта Y этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ существует единственный морфизм $f: Y \rightarrow X$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow f & \downarrow \pi_\alpha \\
 Y & \xrightarrow{f_\alpha} & X_\alpha
 \end{array}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ диагональное произведение $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha: Y \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

Теорема (Хьюитт–Марчевский–Пондицери)

Произведение непустых неодноточечных топологических пространств X_α , $\alpha \in A$, сепарабельно \iff все X_α сепарабельны и $|A| \leq 2^\omega$.

Теорема

Если семейство пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ таково, что для любого конечного множества индексов $F \subset A$ произведение $X = \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ обладает свойством Суслина, то и всё произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ обладает этим свойством.

Доказательство. Пусть $\{W_\iota\}$ — несчётное семейство непустых открытых множеств в X . Имеем $W_\iota \supset \prod_{\alpha \in F_\iota} U_\alpha^\iota \neq \emptyset$, где $U_\alpha^\iota = X_\alpha$ для всех $\alpha \notin F_\iota$, $F_\iota \subset A$ конечно. Пусть R — корень несчётной Δ -системы, содержащейся в $\{F_\iota\}$. Произведение $\prod_{\alpha \in R} X_\alpha$ со свойством Суслина \implies существуют $\iota' \neq \iota''$ такие, что $F_{\iota'}$ и $F_{\iota''}$ попали в Δ -систему и $\prod_{\alpha \in R} U_\alpha^{\iota'} \cap \prod_{\alpha \in R} U_\alpha^{\iota''} \neq \emptyset$. Поскольку $(F_{\iota'} \setminus R) \cap (F_{\iota''} \setminus R) = \emptyset$, имеем $W_{\iota'} \cap W_{\iota''} \neq \emptyset$. □

Предложение

Квадрат прямой Суслина не обладает свойством Суслина.

Доказательство. Пусть (X, \leq) — прямая Суслина. Индукцией по α найдём точки $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$, $\alpha < \omega_1$, со свойствами

- 1 $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$;
- 2 $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ и $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$;
- 3 $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\beta : \beta < \alpha\} = \emptyset$.

Пусть I — множество всех изолированных точек в X . Оно счётно, так как X обладает свойством Суслина и $\{x\}$ открыто для каждого $x \in I$. Выберем любые $a_0, b_0, c_0 \in X$ со свойствами 1 и 2. Пусть $\alpha < \omega_1$ и $a_\beta, b_\beta, c_\beta$ уже построены для всех $\beta < \alpha$. X не сепарабельно \implies множество $X \setminus \overline{I \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}}$ содержит непустой интервал (a_α, c_α) . Он бесконечен (изолированные точки исключены) $\implies \exists b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ со свойством 2.

Множества $(a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$ непусты, открыты и попарно не пересекаются: если $\beta < \alpha$, то либо $b_\beta \leq a_\alpha$, либо $b_\beta \geq c_\alpha$, т.е. либо $(a_\beta, b_\beta) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \emptyset$, либо $(b_\beta, c_\beta) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \emptyset$. \square

Предложение

Если существует прямая Суслина, то существует и прямая Суслина, которая

- 1 не имеет скачков (т.е. $(a, b) \neq \emptyset$ для $a < b$) и
- 2 не содержит сепарабельных открытых подмножеств.

Идея доказательства. Взяв любую прямую Суслина (X, \leq) , определим отношение эквивалентности \sim на X , полагая $x \sim y \iff$ интервал (x, y) сепарабелен. Каждый класс эквивалентности $[x]_{\sim}$ — выпуклое множество, т.е. если $y, z \in [x]_{\sim}$ и $y < z$, то $(y, z) \subset [x]_{\sim}$. Поэтому на множестве классов эквивалентности определён естественный порядок: $[x]_{\sim} \leq_{\sim} [y]_{\sim} \iff x \leq y$ (он не зависит от выбора представителей x и y).

Факторпространство $X / \sim = \{[x]_{\sim} : x \in X\}$ с порядком \leq_{\sim} — прямая Суслина с нужными свойствами. □

Следствие

Если существует прямая Суслина, то существует линейно упорядоченное множество, которое

- *не содержит ни наименьшего, ни наибольшего элемента,*
- *связно,*
- *обладает свойством Суслина*

и не изоморфно прямой \mathbb{R} .

Этими свойствами обладает дедекиндово пополнение прямой Суслина из предыдущей теоремы, из которого выкинули наименьший и наибольший элементы (если они есть).

Аксиома Мартина

Определение

Пусть $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1})$ — частично упорядоченное множество и \mathcal{D} — любое семейство его подмножеств. Множество $F \subset P$ называется \mathcal{D} -генерическим фильтром, если

- 1 $\mathbf{1} \in F$;
- 2 для любых $p, q \in F$ существует $r \in F$ такое, что $r \leq p$ и $r \leq q$;
- 3 если $p \in F$, $q \in P$ и $p \leq q$, то $q \in F$;
- 4 $F \cap D \neq \emptyset$ для любого $D \in \mathcal{D}$.

Аксиома Мартина (МА)

Для любого ч.у.м. \mathbb{P} , удовлетворяющего условию счётности цепей, и любого семейства \mathcal{D} плотных подмножеств P мощности $|\mathcal{D}| < 2^\omega$ существует \mathcal{D} -генерический фильтр.

Замечание

CH \implies МА

Определение

Семейство множеств называется **центрированным**, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.

Теорема (MA + \neg CH)

Пусть X — топологическое пространство со свойством Суслина и $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых подмножеств X . Тогда найдётся несчётное множество $A \subset \omega_1$, для которого семейство $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ центрировано.

Доказательство. Для каждого $\alpha < \omega_1$ положим $V_\alpha = \bigcup U_\gamma$.

Для любых $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega$ имеем $V_{\alpha_1} \supset V_{\alpha_2}$. Существует $\alpha_0 < \omega_1$ такое, что

$$\forall \beta > \alpha_0 (\overline{V}_\beta = \overline{V}_{\alpha_0}) \quad (*)$$

(черта сверху — замыкание). Действительно, в противном случае мы могли бы найти возрастающую несчётную последовательность ординалов $(\alpha_\xi)_{\xi < \omega_1}$ такую, что $\overline{V}_{\alpha_{\xi+1}} \neq \overline{V}_{\alpha_\xi}$, т.е. $V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\xi+1}} \neq \emptyset$, для каждого ξ . Множества $V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\xi+1}}$ открыты и попарно не пересекаются. Свойство Суслина \implies все они, кроме счётного числа, должны быть пустыми.

Зафиксируем $\alpha_0 < \omega_1$, для которого выполнено условие $(*)$, и положим

$$P = \{p \subset V_{\alpha_0} : p \text{ открыто и } p \neq \emptyset\}.$$

Упорядочим P по включению. Максимальный элемент $\mathbf{1}$ — это V_{α_0} . \mathbb{P} удовлетворяет у.с.ц., так как X обладает свойством Суслина. Для $\alpha < \omega_1$ положим

$$D_\alpha = \{p \in P : \exists \beta > \alpha (p \subset U_\beta)\}.$$

Множество D_α плотно: если $p \in P$, то $p \cap V_\alpha \neq \emptyset$ в силу $(*)$, и из того, что $V_\alpha = \bigcup_{\gamma > \alpha} U_\gamma$, следует, что $p \cap U_\gamma \neq \emptyset$ для некоторого $\gamma > \alpha$. Имеем $p \cap U_\gamma \in D_\alpha$ и $p \cap U_\gamma \leq p$.

Положим $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. $\neg \text{CH} \implies \omega_1 < 2^\omega$. $\text{MA} \implies \exists \mathcal{D}$ -генерический фильтр F (семейство открытых подмножеств X). Семейство F центрировано, так как любые два $p, q \in F$ совместимы в F , т.е. их пересечение содержит элемент F .

Положим

$$A = \{\beta < \omega_1 : \exists p \in F (p \subset U_\beta)\}.$$

F центрировано $\implies \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. F пересекает все $D_\alpha \implies A$ неограничено в ω_1 , а значит, несчётно. □

Следствие ($MA + \neg CH$)

Топологическое произведение любого семейства пространств со свойством Суслина обладает свойством Суслина.

Доказательство. В силу теоремы о свойстве Суслина топологического произведения, все конечные подпроизведения которого обладают свойством Суслина, достаточно проверить, что если X и Y — два топологических пространства со свойством Суслина, то $X \times Y$ обладает свойством Суслина.

Пусть $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых множеств в $X \times Y$. Для каждого $\alpha < \omega_1$ выберем непустые открытые множества U_α в X и V_α в Y , удовлетворяющие условию $U_\alpha \times V_\alpha \subset W_\alpha$. Пользуясь теоремой, найдём несчётное $A \subset \omega_1$, для которого $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. Семейство $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ не может состоять из попарно непересекающихся множеств, так как Y обладает свойством Суслина. Пусть $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ и $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$. Поскольку $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ (в силу центрированности), имеем

$$W_\alpha \cap W_\beta \supset (U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta) \neq \emptyset.$$



Следствие (MA + \neg CH)

Прямых Суслина не существует.

Теорема

Аксиома Мартина равносильна утверждению:

Если X — любой компакт со свойством Суслина и \mathcal{U} — любое семейство всюду плотных открытых подмножеств X мощности $|\mathcal{U}| < 2^\omega$, то $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Теорема

MA \implies всякое подмножество вещественной прямой \mathbb{R} , являющееся объединением $< 2^\omega$ нигде не плотных множеств, является множеством первой категории в \mathbb{R} .

Теорема

MA \implies в любом компакте мощности $< 2^\omega$ всякая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Проблема Уайтхеда

Назовём **группой Уайтхеда** абелеву группу A такую, что если B — любая другая абелева группа и существует эпиморфизм $f: B \rightarrow A$ с ядром, изоморфным \mathbb{Z} , то существует гомоморфизм $h: A \rightarrow B$, для которого $f \circ h = \text{id}_A$. Хорошо известно, что всякая свободная абелева группа является группой Уайтхеда.

Проблема Уайтхеда: верно ли обратное?

В модели Гёделя $V = L$ всякая группа Уайтхеда свободна, в $\text{MA} + \neg\text{CH}$ существуют несвободные группы Уайтхеда (Шелах).

Непротиворечивость $MA + \neg CH$

Существует модель ZFC, в которой истинны MA и $\neg CH$. Идея построения:

Пусть M — счётная СТМ, $M \models 2^\omega = \omega_2$, и пусть $\mathbb{P}, \mathcal{D} \in M$. Будем говорить, что пара $(\mathbb{P}, \mathcal{D})$ — **контрпример для MA** в M , если

$M \models (\mathbb{P}$ — ч.у.м., удовлетворяющее у.с.ц.,
 \mathcal{D} — семейство плотных подмножеств P , $|\mathcal{D}| = \omega_1$
и не существует \mathcal{D} -генерического фильтра в M).

$M \models MA \iff$ в M нет контрпримеров для MA .

Если $(\mathbb{P}, \mathcal{D}) \in M$ — контрпример для MA и множество G \mathbb{P} -генерическое, то тем более G является \mathcal{D} -генерическим фильтром, так что в $M[G]$ пара $(\mathbb{P}, \mathcal{D})$ уже не является контрпримером, причём поскольку \mathbb{P} удовлетворяет условию счётности цепей, в M и $M[G]$ одни и те же кардиналы, так что $M[G] \models \neg CH$. Многократно (бесконечное число раз) применяя генерическое расширение, можно «убить» все контрпримеры для MA . При этом приходится следить, чтобы при расширениях не появлялись новые контрпримеры.

Комбинаторные следствия аксиомы Мартина

Малые несчётные кардиналы

- Множество A **почти содержится** во множестве B , если $A \setminus B$ конечно. Обозначение: $A \subset^* B$.
- Семейство множеств \mathcal{F} **центрировано** (**сильно центрировано**), если для любых $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}$ пересечение $F_1 \cap \dots \cap F_k$ непусто (бесконечно).
- **Псевдопересечением** семейства множеств \mathcal{F} называется бесконечное множество A такое, что $A \subset^* F$ для всех $F \in \mathcal{F}$.
- Семейство \mathcal{S} подмножеств ω называется **расщепляющим**, если для любого бесконечного множества $A \subset \omega$ найдётся $S \in \mathcal{S}$ такое, что $|A \cap S| = |A \setminus S| = \omega$.
- Семейство множеств **почти дизъюнктно**, если все попарные пересечения его элементов конечны.
- Порядок \leq^* на множестве ω^ω функций $\omega \rightarrow \omega$ определяется так: $f \leq^* g$, если множество $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ конечно.
- Множество $X \subset \omega^\omega$ **ограничено**, если $\exists g \in \omega^\omega \forall f \in X (f \leq^* g)$.
- Множество $X \subset \omega^\omega$ **доминирующее**, если $\forall f \in \omega^\omega \exists g \in X (f \leq^* g)$.

Определение

Семейство всех бесконечных подмножеств ω обозначается $[\omega]^\omega$.

- $\mathfrak{a} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset [\omega]^\omega \text{ — максимальное бесконечное почти дизъюнктное семейство}\}$
- $\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subset \omega^\omega \leq^* \text{-неограничено}\}$
- $\mathfrak{d} = \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subset \omega^\omega \leq^* \text{-доминирующее}\}$
- $\mathfrak{s} = \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subset [\omega]^\omega \text{ — расщепляющее семейство}\}$
- $\mathfrak{p} = \min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \subset [\omega]^\omega \text{ сильно центрировано, но не имеет псевдопересечения}\}$

$$\omega_1 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{s} \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq 2^\omega$$

Понятно, что в предположении СН все эти кардиналы совпадают и равны 2^ω .

Теорема (Booth)

$\text{MA} \implies \mathfrak{p} = 2^\omega$.

Доказательство. Пусть $\kappa < 2^\omega$ — бесконечный кардинал и $\mathcal{F} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset [\omega]^\omega$ — сильно центрированное семейство. Пусть $P = \{(s, E) : s \subset \omega \text{ конечно, } E \subset \kappa \text{ конечно}\}$, и пусть $(s, E) \leq (t, F) \iff (t \subset s) \wedge (F \subset E) \wedge (s \setminus t \subset \bigcap \{X_\alpha \in \mathcal{F} : \alpha \in F\})$.

P удовлетворяет у.с.ц.: если $A \subset P$ несчётно, то $\exists s, E, F$ такие, что $(s, E), (s, F) \in A$ (так как множество конечных подмножеств ω счётно). Имеем $(s, E \cup F) \leq (s, E)$ и $(s, E \cup F) \leq (s, F)$.

Для $\alpha \in \kappa$ и $n \in \omega$ положим

$$D_{\alpha, n} = \{(s, E) \in P : \alpha \in E, |s| > n\}.$$

Каждое $D_{\alpha, n}$ плотно: если $(t, F) \in P$, $E = F \cup \{\alpha\}$ и s — это t плюс n точек из $\bigcap_{\alpha \in F} X_\alpha$, то $(s, E) \leq (t, F)$ и $(s, E) \in D_{\alpha, n}$.

Положим $\mathcal{D} = \{D_{\alpha, n} : \alpha \in \kappa, n \in \omega\}$.

Имеем $|\mathcal{D}| < 2^\omega$. Пусть G — \mathcal{D} -генерический фильтр на P и

$$X_G = \bigcup \{s \subset \omega : s \text{ конечно, } \exists E \subset \kappa \text{ такое, что } (s, E) \in G\}.$$

X_G бесконечно. G пересекает все $D_{\alpha, n} \in \mathcal{D} \implies$ для каждого $\alpha \in \kappa$ существует $(s, E) \in G$ такое, что $\alpha \in E$. Элементы G попарно совместимы \implies для любого $(s', E') \in G$ существует $(s'', E'') \in X_G$ такое, что $(s'', E'') \leq (s', E')$ (так что $s'' \supset s'$) и $(s'', E'') \leq (s, E)$ (так что $X_\alpha \supset \bigcap_{\beta \in E} X_\beta \supset s'' \setminus s \supset s' \setminus s$).

Значит, $X_G \setminus s \subset X_\alpha$, т.е. $X_G \subset^* X_\alpha$. □

Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точек топологического пространства X **сходится** к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$ конечно. В случае, когда все точки x_n различны, это означает, что $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset^* U$.

Последовательность **нетривиальна**, если она содержит бесконечное число попарно различных элементов.

Даже счётное пространство может быть не дискретным, но не содержать нетривиальных сходящихся последовательностей.

Определение

Точка x топологического пространства X называется **точкой Фреше–Урысона**, если

x является точкой прикосновения множества $A \subset X \iff$
 \iff к x сходится некоторая последовательность точек из A .

База окрестностей точки $x \in X$ — семейство \mathcal{U} окрестностей x с тем свойством, что в любой окрестности x содержится $U \in \mathcal{U}$.

Ясно, что если точка x обладает счётной базой окрестностей $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, то она является точкой Фреше–Урысона: если $x \in \bar{A}$, то, выбрав точку $a_n \in A \cap U_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, мы получим последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к x .

Из теоремы Буса вытекает

Следствие (МА)

Если точка x в счётном топологическом пространстве X обладает базой окрестностей \mathcal{U} мощности меньше 2^ω , то x является точкой Фреше–Урысона.

Доказательство. Пусть $A \subset X$ и $x \in \bar{A}$ (т.е. любая окрестность x пересекается с A). Тогда либо пересечение некоторой окрестности x с A конечно (и тогда можно выбрать тривиальную последовательность точек A , сходящуюся к x), либо пересечения $U \cap A$, $U \in \mathcal{U}$, образуют сильно центрированную систему. Точки любого её псевдопересечения составляют последовательность, сходящуюся к x . □

Определение

Фильтром на множестве X называется семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ со свойствами

- 1 $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- 2 $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$;
- 3 $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset \omega \implies B \in \mathcal{F}$.

Семейство \mathcal{F} — фильтр на $X \iff \mathcal{F}$ является множеством всех проколотых окрестностей точки $*$ в пространстве $X_{\mathcal{F}} = X \cup \{*\}$, в котором $*$ — единственная неизолированная точка.

Определение

Максимальный (по включению) фильтр называется **ультрафильтром**.

Фильтр \mathcal{F} на множестве X является ультрафильтром \iff для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Замечание

Пространство $\omega_{\mathcal{U}}$ не содержит нетривиальных сходящихся последовательностей ни для какого ультрафильтра \mathcal{U} на ω .

Действительно, нетривиальная последовательность может сходиться только к $*$. Из существования нетривиальной сходящейся последовательности вытекает существование сходящейся последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, в которой все элементы различны. \mathcal{U} — ультрафильтр \implies либо $U = \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}$, либо $V = \omega \setminus \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}$. В первом случае $U \cup \{*\}$ — окрестность, которая не содержит бесконечно много элементов последовательности (а именно, всех элементов с нечётными номерами), а во втором — $V \cup \{*\}$.

Ультрафильтр \mathcal{U} называется **главным**, если $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

На понятии ультрафильтра основана популярная модель нестандартного анализа:

Пусть \mathcal{U} — любой неглавный ультрафильтр на ω . На множестве \mathbb{R}^ω последовательностей вещественных чисел введём отношение эквивалентности \sim :

$$(a_n)_{n \in \omega} \sim (b_n)_{n \in \omega} \iff \{n \in \omega : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

На фактормножестве \mathbb{R}/\sim возникает естественный порядок:

$$[(a_n)_{n \in \omega}]_{\sim} \leq [(b_n)_{n \in \omega}]_{\sim} \iff \{n \in \omega : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Классы постоянных последовательностей отождествляются с вещественными числами. Классы последовательностей, сходящихся к 0 (к ∞), трактуются как бесконечно малые (бесконечно большие) величины. Они отличаются по скорости сходимости.

Через $[X]^k$ обозначается k -я **симметрическая степень** множества X — семейство всех k -элементных подмножеств X .

Теорема Рамсея

Для любого бесконечного множества X и любой раскраски $\chi: [X]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ существует бесконечное **χ -однородное** множество $H \subset X$, т.е. такое, что $\chi|_{[H]^2} = \text{const}$.

Доказательство. Будем считать без потери общности, что $X = \omega$. Построим три последовательности $(H_n)_{n \in \omega}$, $(c_n)_{n \in \omega}$ и $(h_n)_{n \in \omega}$ такие, что $H_{n+1} \subset H_n \subset \omega$, $c_n \in \{0, 1\}$ и $h_n \in \omega$, $h_{n+1} > h_n$, для всех $n \in \omega$.

Положим $h_0 = 0$ и $H_0 = \omega$. Пусть h_n и H_n уже определены. Выберем $c_n \in \{0, 1\}$, для которого множество $H_{n+1} = \{k \in H_n \setminus (h_n + 1) : \chi(h_n, k) = c_n\}$ бесконечно, и положим h_{n+1} равным наименьшему элементу множества H_{n+1} .

Выберем бесконечное множество $I \subset \omega$ и число $c \in \{0, 1\}$ такие, что $c_i = c$ для всех $i \in I$, и положим $H = \{h_i : i \in I\}$. Если $h_i, h_j \in H$ и $h_i < h_j$, то $h_j \in H_{i+1}$, так что $\chi(\{h_i, h_j\}) = c_i = c$. \square

Определение

Ультрафильтр \mathcal{U} на ω называется **рамсеевским**, если для любой раскраски $\chi: [\omega]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ существует χ -однородный элемент $U \in \mathcal{U}$ (т.е. $U \in \mathcal{U}$, для которого $\chi|_{[U]^2} = \text{const}$).

Теорема

MA $\implies \exists$ *неглавный рамсеевский ультрафильтр на ω .*

Доказательство. Число возможных раскрасок множества $[\omega]^2$ равно 2^ω . Занумеруем все раскраски: χ_α , $\alpha < 2^\omega$. Построим сильно центрированное семейство χ_α -однородных множеств H_α . Положим H_0 равным любому бесконечному χ_0 -однородному множеству. Пусть $\beta < 2^\omega$ и все H_α , $\alpha < \beta$, построены. Поскольку $p = 2^\omega$, существует бесконечное псевдопересечение $H \subset \omega$ построенных множеств: $H \subset^* H_\alpha$ для всех $\alpha < \beta$. Полагаем H_β равным любому бесконечному χ_β -однородному подмножеству множества H .

Ясно, что семейство $\mathcal{H} = \{H_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ центрировано. По лемме Цорна существует максимальное центрированное семейство $\mathcal{U} \supset \mathcal{H}$. Это рамсеевский ультрафильтр. □

Из доказанной теоремы следует, что отрицание аксиомы
Мартинга совместимо с ZFC, поскольку существуют модели, в
которых нет рамсеевских ультрафильтров на ω .

Ультрафильтр \mathcal{U} на ω рамсеевский



\mathcal{U} **селективный**, т.е. если $\omega = \bigsqcup_{n \in \omega} A_n$, $A_n \notin \mathcal{U}$, то $\exists U \in \mathcal{U}$
такой, что $|U \cap A_n| \leq 1$ для всякого $n \in \omega$



если $(U_n)_{n \in \omega}$ — последовательность элементов \mathcal{U} , то в каждом
 U_n можно выбрать по точке u_n так, что $\{u_n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$



для любой функции $f: \omega \rightarrow \omega$ существует либо элемент $U \in \mathcal{U}$,
на котором f постоянна, либо элемент $U \in \mathcal{U}$, на котором f
взаимно однозначна

Теорема (Solovay)

Пусть $\kappa \leq 2^\omega$ — бесконечный кардинал, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset [\omega]^\omega$,
 $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = \kappa$ и пересечение $A \cap B$ любых множеств $A \in \mathcal{A}$ и
 $B \in \mathcal{B}$ конечно.

$\text{MA} \implies$ существует множество $C \subset \omega$ такое, что для
каждого $A \in \mathcal{A}$ $C \cap A$ конечно и для каждого $B \in \mathcal{B}$ $C \cap B$
бесконечно.

Доказательство. Пусть

$P = \{(s, E) : s \subset \omega \text{ бесконечно, } E \subset \mathcal{A} \text{ конечно}\}$ с порядком
 $(s, E) \leq (t, F) \iff (t \subset s) \wedge (F \subset E) \wedge ((s \setminus t) \cap \bigcap F = \emptyset)$;

у.с.ц. выполнено. Для $X \in \mathcal{A}$ положим

$D_X = \{(s, E) \in P : X \in E\}$. Это множество плотно в P . Для
 $X \in \mathcal{B}$ и $k \in \mathbb{N}$ положим $D_{X,k} = \{(s, E) \in P : |s \cap X| \geq k\}$. Это
множество тоже плотно в P . Пусть

$$\mathcal{D} = \{D_X : X \in \mathcal{A}\} \cup \{D_{X,k} : X \in \mathcal{B}, k \in \omega\},$$

и пусть G — \mathcal{D} -генерический фильтр. Тогда

$C = \bigcup \{s \subset \omega : s \text{ конечно, } \exists \text{ конечное } E \subset \mathcal{A} \text{ такое, что } (s, E) \in G\}$,
обладает нужными свойствами. □

Теорема

$\text{MA} \implies 2^\kappa = 2^\omega$ для любого бесконечного кардинала $\kappa < 2^\omega$.

Доказательство. Зафиксируем почти дизъюнктное семейство $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset [\omega]^\omega$. Его можно построить так.

Перенумеруем все рациональные числа: $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$.

Зафиксируем в \mathbb{R} множество S мощности κ и перенумеруем его элементы тоже: $S = \{s_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Для каждого $\alpha \in \kappa$ выберем последовательность рациональных чисел, сходящуюся к s_α , и возьмём в качестве A_α множество номеров рациональных чисел, попавших в эту последовательность.

Для каждого $X \in \mathcal{P}(\kappa)$ положим

$$\mathcal{A}_X = \{A_\alpha : \alpha \notin X\} \quad \text{и} \quad \mathcal{B}_X = \{A_\alpha : \alpha \in X\}.$$

Пользуясь теоремой Соловея, найдём $C_X \subset \omega$, для которого $|C_X \cap A_\alpha| = \omega \iff \alpha \in X$. Ясно, что $C_X \neq C_Y$ для $X \neq Y$.

Значит, отображение $\mathcal{P}(\kappa) \rightarrow \mathcal{P}(\omega)$, определённое правилом $X \mapsto C_X$, инъективно, так что $2^\kappa \leq 2^\omega$. Обратное неравенство очевидно. □

Гипотеза Лузина (LH)

$$2^\omega = 2^{\omega_1}$$

Из доказанной теоремы следует, что $MA + \neg CH \implies LH$.

Отрицание гипотезы Лузина ($2^\omega < 2^{\omega_1}$) равносильно каждому из утверждений:

- Любой компакт мощности $\leq 2^\omega$ содержит всюду плотное подпространство с первой аксиомой счётности (т.е. такое, что каждая его точка имеет счётную базу окрестностей).
- Любой компакт мощности $\leq 2^\omega$, являющийся непрерывным образом обобщённого канторова дисконтинуума $\{0, 1\}^\kappa$ (где κ — любой кардинал), метризуем.
- Во всяком сепарабельном нормальном пространстве любое несчётное множество имеет предельную точку.

Лузинские множества

Гипотеза Бореля

Множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет **строгую меру 0**, если для любой последовательности $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ положительных чисел существует последовательность $(I_n)_{n \in \omega}$ интервалов такая, что $|I_n| < \varepsilon_n$ для каждого n и $\bigcup_{n \in \omega} I_n \supset X$.

Гипотеза Бореля состоит в том, что все множества строгой меры 0 счётны.

Подмножество Y топологического пространства X **нигде не плотно**, если всякое непустое открытое множество $U \subset X$ содержит непустое открытое подмножество, не пересекающее Y . Другими словами, Y **нигде не плотно**, если $X \setminus Y$ содержит открытое всюду плотное множество.

Определение

Подмножество вещественной прямой называется **лузинским множеством**, если его пересечение с каждым **нигде не плотным** множеством не более чем счётно.

Каждое лузинское множество имеет строгую меру 0.

В 1914 г. Лузин построил несчётное лузинское множество в предположении CH . (Следовательно, если выполняется CH , то гипотеза Бореля неверна.)

В предположении $\text{MA} + \neg\text{CH}$ не существует лузинских множеств, так как в этом случае всякое подмножество прямой мощности $< 2^\omega$ имеет первую категорию. (Однако $\text{MA} + \neg\text{CH} \implies$ всякое множество мощности меньше 2^ω имеет строгую меру 0, так что гипотеза Бореля всё равно неверна.)

В 1976 г. Лэйвер построил модель ZFC, в которой всякое множество строгой меры 0 счётно. Таким образом, истинность гипотезы Бореля не зависит от аксиом ZFC.

Свойства форсинга Коэна

Напомним, что для ординала α α -коэновское частично упорядоченное множество — это множество $\mathbb{P}_\alpha = (P_\alpha, \leq, \mathbf{1})$, где

$$P_\alpha = \{p \subset (\alpha \times \omega) \times \{0, 1\} : p \text{ — конечная функция}\},$$

упорядоченное обратным включению.

Если M — СТМ и $G \subset P_\alpha$ — генерическое множество, то $g = \bigcup G$ — функция $\alpha \times \omega \rightarrow \{0, 1\}$ в $M[G]$, которая определяет α новых множеств $S_\beta \subset \omega$ и функций $\chi_\beta = \chi(S_\beta) : \omega \rightarrow \{0, 1\}$ в $M[G]$: для $\beta < \alpha$

$$S_\beta = \{n \in \omega : g(\beta, n) = 1\}, \quad \chi_\beta(n) = g(\beta, n).$$

Определение

Условие $p \in \mathbb{P}_\alpha$ называется **минимально вынуждающим** утверждение φ , если $p \Vdash \varphi$ и никакое $q > p$ не вынуждает φ .

Предложение

Для любого утверждения множество минимально вынуждающих его условий не более чем счётно.

Доказательство. Пусть множество M условий, минимально вынуждающих некоторое утверждение φ , несчётно. Лемма о Δ -системе $\implies \exists$ несчётное $M' \subset M$ и конечная частичная функция R из $\alpha \times \omega$ в $\{0, 1\}$ такие, что для любых различных $p, q \in M'$ $p \cap q = R$, т.е. $\text{dom } R \subset \text{dom } p \cap \text{dom } q$, $p((\alpha, n)) = q((\alpha, n)) = R((\alpha, n))$ для $(\alpha, n) \in R$ и $p((\alpha, n)) \neq q((\alpha, n))$ для $(\alpha, n) \in \text{dom } p \cap \text{dom } q \setminus \text{dom } R$. Имеем $R > p \forall p \in M' \setminus \{R\}$. Значит, $R \not\Vdash \varphi$; $\implies \exists r \leq R$ такое, что $r \Vdash \neg \varphi$ (см. следствие из основной теоремы форсинга, ①).

Условие r несовместимо со всеми $p \in M' \implies \forall p \in M'$ $\exists (\beta(p), n(p)) \in \text{dom } p$, для которых $(\beta(p), n(p)) \in \text{dom } r$ и $p(\beta(p), n(p)) \neq r(\beta(p), n(p))$. $\text{dom } r$ конечна $\implies \exists s, t \in M'$, $s \neq t$, такие, что $(\beta(s), n(s)) = (\beta(t), n(t))$. Пусть для определённости $r(\beta(s), n(s)) = 0$. Тогда $((\beta(s), n(s)), 1) \in s \cap t = R$ в противоречие с тем, что $((\beta(s), n(s)), 0) \in r$ и $r \leq R$. □

Канторово множество

Канторово множество, или канторов дисконтинуум, C — это подмножество отрезка $[0, 1]$, которое строится по индукции так: Мы полагаем $C_0 = [0, 1]$ и на первом шаге удаляем из отрезка $[0, 1]$ среднюю треть, т.е. интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Оставшееся множество (обозначим его C_1) замкнуто и состоит из двух отрезков: $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Из каждого из этих отрезков удалим среднюю треть. Оставшееся множество C_2 замкнуто и состоит уже из четырёх отрезков: $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность замкнутых множеств $C_n \subset [0, 1]$, причём для каждого n множество C_n является объединением 2^n отрезков и C_{n+1} получается из C_n удалением средних третей (без концов) из всех отрезков в этом объединении. Семейство $\{C_n : n \in \omega\}$ представляет собой центрированное семейство замкнутых подмножеств компакта $[0, 1]$, поэтому оно имеет непустое пересечение. Это пересечение и есть канторово множество: $C = \bigcap_{n \in \omega} C_n$. Оно компактно, будучи замкнутым подмножеством компакта $[0, 1]$.

Канторов дисконтинуум — классический пример совершенного (т.е. замкнутого и не содержащего изолированных точек) нигде не плотного подмножества прямой. Он гомеоморфен счётной топологической степени $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ двухточечного дискретного пространства $\{0, 1\}$: $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{\varphi \subset \mathbb{N} \times \{0, 1\} : \varphi \text{ — функция}\} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} (x_n \in \{0, 1\})\}$.

Топология: всякая окрестность любой функции $\varphi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ содержит каноническую окрестность вида

$$U_n(\varphi) = \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : f(k) = \varphi(k) \forall k \leq n\}.$$

Множество открыто \iff оно является объединением некоторых (канонических) окрестностей своих точек.

Каждое число $x \in C$ допускает троичную запись, не содержащую 1, причём именно такая троичная запись у каждого $x \in C$ единственна. Значит, отображение $f: C \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, определённое правилом $f(x) = ((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ для $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^n}$, инъективно (и сюръективно). Легко проверить, что оно непрерывно. Поскольку C — компакт, это гомеоморфизм.

Для конечной частичной функции ψ из ω в $\{0, 1\}$ положим

$$V(\psi) = \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : f \supset \psi\},$$

т.е.

$$V(\psi) = \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : f|_{\text{dom } \psi} = \psi\}.$$

Ясно, что если при этом $\text{dom } \psi = \{1, \dots, n\}$, то для любой функции $\varphi: \omega \rightarrow \{0, 1\}$, совпадающей с ψ на $\{1, \dots, n\}$, имеем $U_n(\varphi) = V(\psi)$.

Таким образом, множество открыто в $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \iff$ оно является объединением некоторого (произвольного) семейства множеств вида $V(\psi)$ для некоторых конечных функций ψ из ω в $\{0, 1\}$, т.е. множества вида $V(\psi)$ образуют базу топологии пространства $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Их счётное число.

Теорема

Пусть M — СТМ, κ — несчётный кардинал в M и $G \subset P_\kappa$ — генерическое множество. Тогда в модели $M[G]$ пересечение множества $X = \{\chi_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \{0, 1\}^\omega$ с любым нигде не плотным подмножеством компакта $C = \{0, 1\}^\omega$ не более чем счётно.

Доказательство. Рассуждаем в $M[G]$. Пусть $U \subset C$ открыто и плотно. Тогда U есть объединение счётного семейства подмножеств компакта C , каждое из которых определяется конечной частичной функцией φ_n из ω в $\{0, 1\}$:

$$U = \bigcup_{n \in \omega} V(\varphi_n), \quad \text{где } V(\varphi) = \{f \in \{0, 1\}^\omega : f \supset \varphi\}$$

(см. описание топологии $\{0, 1\}^\mathbb{N} = \{0, 1\}^\omega$ перед теоремой).

Нам надо доказать, что $\chi_\beta \in U$ для всех, кроме счётного числа, ординалов $\beta \in \kappa$.

Пусть Ω — имя, для которого $U = \Omega_G$, и условие $p \in G$ вынуждает всё сказанное об Ω .

По доказанному предложению для каждой конечной частичной функции $\varphi \in \Phi$ множество M_φ всех условий $p \in P_\kappa$, минимально вынуждающих утверждение « $V(\check{\varphi}) \subset \Omega$ », не более чем счётно (возможно, пусто). Значит, счётно и множество

$$M = \bigcup \{M_\varphi : \varphi \text{ — конечная функция из } \omega \text{ в } \{0, 1\}\}.$$

Рассмотрим

$$\text{Ord}(U) = \{\alpha \in \kappa : (\exists p \in M)(\exists n \in \omega)(\alpha, n) \in \text{dom } p\}.$$

Это счётное множество ординалов. Покажем, что $\chi_\beta \in U$ для $\beta \in \kappa \setminus \text{Ord}(U)$.

Пусть $\beta \in \kappa \setminus \text{Ord}(U)$. Для каждого $q \in P_\kappa$ обозначим через q_β конечную функцию $\omega \rightarrow \{0, 1\}$ с областью определения $\text{dom } q_\beta = \{n \in \omega : (\beta, n) \in q\}$, определённую правилом $q_\beta(n) = q(\beta, n)$ для $n \in \text{dom } q_\beta$. Без ограничения общности будем считать, что $p_\beta \neq \emptyset$ (иначе заметим, что множество D функций $f \in P_\kappa$, для которых $f_\beta \neq \emptyset$, плотно в P_κ и возьмём вместо p условие $p' \in G \cap D$, $p' \leq p$).

Пусть $p \in P_\kappa$, $p' \leq p$ (т.е. $p' \supset p$, другими словами, p' продолжает p , откуда $p'_\beta \neq \emptyset$). Поскольку $p' \leq p$, условие p' вынуждает всё то, что вынуждает p , в частности, что Ω плотно и открыто в $\{0, \check{1}\}^\omega$, а значит, что $\Omega \cap V(\check{p}'_\beta)$ непусто и открыто в $\{0, \check{1}\}^\omega$, т.е. оно вынуждает существование конечной функции φ из $\check{\omega}$ в $\{0, \check{1}\}$, продолжающей p'_β , для которой $V(\check{\varphi}) \subset \Omega$. В силу следствия из основной теоремы форсинга, пункт \clubsuit , существуют конечная функция φ из $\check{\omega}$ в $\{0, \check{1}\}$, продолжающая p'_β , и условие $q \leq p'$ такие, что $q \Vdash (V(\check{\varphi}) \subset \Omega)$.

Определим $r \in P_\kappa$ условиями:

- $\text{dom } r = \text{dom } q \cup \{\beta\} \times \text{dom } \varphi$;
- $r(\alpha, n) = q(\alpha, n)$ для всех $(\alpha, n) \in \text{dom } q$, $\alpha \neq \beta$;
- $r(\beta, n) = \varphi(n)$ для всех $n \in \text{dom } \varphi$.

Имеем $r \leq p'$, потому что $r \cap \{\alpha\} \times \omega = q \cap \{\alpha\} \times \omega \supset p' \cap \{\alpha\} \times \omega$ для $\alpha \neq \beta$ и $r_\beta = \varphi \supset p'_\beta$.

Кроме того, $r \Vdash (V(\check{\varphi}) \subset \Omega)$. Действительно, $q \Vdash (V(\check{\varphi}) \subset \Omega)$, а значит, $q \leq t$ для некоторого условия t , минимально вынуждающего утверждение « $V(\check{\varphi}) \subset \Omega$ ». По определению множества M имеем $t \in (\text{Ord } M \times \omega) \times \{0, 1\}$. С другой стороны, $r \cap (\text{Ord } M \times \omega) \times \{0, 1\} = q \cap (\text{Ord } M \times \omega) \times \{0, 1\} \leq t \cap (\text{Ord } M \times \omega) \times \{0, 1\} = t$, так что $r \leq t$, а значит, условие r вынуждает всё то, что вынуждает t .

Вспомним, что $\chi_\beta(n) = g(\beta, n)$ для $n \in \omega$. Пусть τ — имя χ_β . Если G' — любое генерическое множество и $r \in G'$, то $r \subset g$. Значит, в этом случае $g(\beta, n) = \varphi(n)$ для всех $n \in \text{dom } \varphi$, так что $\chi_\beta \in V(\varphi) \subset U$ в $M[G']$. Это означает, что $r \Vdash (\chi_\beta \in \Omega)$.

Мы показали, что для любого условия $p' \leq p$ существует условие $r \leq p'$, вынуждающее утверждение « $\tau \in \Omega$ », т.е. множество $E = \{r \in P_\kappa : r \Vdash (\tau \in \Omega)\}$ плотно ниже p (это множество принадлежит исходной модели M , поскольку отношение \Vdash определимо в M по основной теореме форсинга). В силу леммы (1) в начале раздела «Вынуждение» $E \cap G \neq \emptyset$. Значит, некоторое условие $s \in G$ вынуждает утверждение « $\tau \in \Omega$ », так что в модели $M[G]$ имеем $\tau_G \in \Omega_G$, т.е. $\chi_\beta \in U$. \square

Следствие

Пусть M — СТМ, κ — несчётный кардинал в M и $G \subset P_\kappa$ — генерическое множество. Тогда в модели $M[G]$ существует лужинское множество мощности κ в отрезке $[0, 1]$ и на вещественной прямой \mathbb{R} .

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение $f: C = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$, которое каждой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нулей и единиц ставит в соответствие число, имеющее двоичную запись $0, x_1 x_2 x_3 \dots$, т.е. действует по правилу

$$f((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \cdot 2^{-(n+1)}$$

(«склеивает» концы интервалов, выкинутых при построении C).

Пусть X — лужинское множество в C , $Y = f(X)$ и $N \subset [0, 1]$ — нигде не плотное множество в $[0, 1]$. Тогда $f^{-1}(N)$ нигде не плотно в C (это легко увидеть, заметив, что $f^{-1}(\overline{N})$ замкнуто и не может содержать непустых открытых множеств). Поскольку $X \cap f^{-1}(N)$ счётно, $Y \cap N$ тоже счётно.

Утверждение об \mathbb{R} вытекает из того, что $\mathbb{R} \cong (0, 1) \subset [0, 1]$. \square

Следствие

Пусть M — СТМ, κ — несчётный кардинал в M и $G \subset P_\kappa$ — генерическое множество. Тогда в модели $M[G]$

- любой компакт без изолированных точек содержит лужинское подмножество мощности κ ;
- никакой компакт без изолированных точек не является объединением $< \kappa$ нигде не плотных подмножеств, и любой такой компакт содержит множества второй категории любой несчётной мощности $\leq 2^\omega$.

Следствие

С аксиомами ZFC совместимо существование в любом компакте без изолированных точек лужинских подмножеств мощности 2^ω , и при этом 2^ω может быть алефом с любым номером.

Определение

Пусть κ — кардинал. Множество $X \subset \kappa$ **стационарно**, если оно пересекается с каждым замкнутым (в порядковой = интервальной топологии) неограниченным множеством $A \subset \kappa$.

Для $\kappa = \omega_1$ неограниченность = несчётность.

Принцип Йенсена (\diamond)

Существуют множества $A_\alpha \subset \alpha$, $\alpha < \omega_1$, такие, что

$\forall A \subset \omega_1$ множество $\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ стационарно.

Последовательность $(A_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ называется

\diamond -последовательностью.

$\diamond \implies \text{CH}$: если $(A_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ — \diamond -последовательность, то $\forall A \subset \omega \exists \alpha > \omega (A = A_\alpha)$, откуда $\{A_\alpha : A_\alpha \subset \omega\} = \mathcal{P}(\omega)$.

Из \diamond следует также существование прямой Суслина.

Теорема

Пусть M — СТМ,

$$P = \{f \subset \omega_1 \times \{0, 1\} : f \text{ — функция, } |f| \leq \omega\}^M$$

с порядком, обратным включению, и G — генерическое множество. Тогда $\mathcal{P}(\omega)^{M[G]} = \mathcal{P}(\omega)^M$, $\omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$ и $M[G] \models \diamond$.

Доказательство. Первые два утверждения немедленно вытекают из второй теоремы о сохранении кардиналов и того, что \mathbb{P} ω -замкнуто.

Для доказательства утверждения $M[G] \models \diamond$ вместо ч.у.м. \mathbb{P} мы будем использовать ч.у.м. \mathbb{Q} , которое порядково изоморфно множеству \mathbb{P} в модели M . Так можно: если $i: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ — изоморфизм (и $i \in M$), то G является \mathbb{Q} -генерическим множеством $\iff i^{-1}(G)$ является \mathbb{P} -генерическим множеством. Наименьшая модель, содержащая M и G (т.е. $M[G]$), содержит также и изоморфизм i , а значит, и $i^{-1}(G)$, и обратно, наименьшая модель, содержащая M и $i^{-1}(G)$, обязана содержать G .

Положим

$$I = \{(\alpha, \xi) : \xi < \alpha < \omega_1\}, \quad Q = \{f \subset I \times \{0, 1\} : f \text{ — функция, } |f| \leq \omega\}.$$

Как обычно, упорядочим Q обратным включению.

Пусть $A: I \rightarrow \{0, 1\}$. Для $\alpha < \omega_1$ пусть $A_\alpha(\xi) = A(\alpha, \xi)$, $\xi < \alpha$. Если G — \mathbb{Q} -генерическое множество, то $g = \bigcup G$ — функция из I в $\{0, 1\}$. Мы покажем, что в модели $M[G]$ $(g_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ — \diamond -последовательность в ω_1 (мы отождествляем подмножества ω_1 и их характеристические функции). Другими словами, мы покажем, что если $A \in M[G]$ и $A: \omega_1 \rightarrow \{0, 1\}$, то множество $\{\alpha \in \omega_1 : A|_\alpha = g_\alpha\}$ стационарно в $M[G]$.

Предположим, что это не так. Тогда найдутся имя τ (для множества A), имя σ (для замкнутого неограниченного множества) и условие $p \in G$ такие, что

$$p \Vdash ((\tau \subset \check{\omega}_1) \wedge (\sigma \subset \check{\omega}_1) \wedge (\sigma \text{ замкнуто и неограничено}) \wedge \\ \wedge \forall \check{\alpha} \in \sigma (\tau|_{\check{\alpha}} \neq (\bigcup \Gamma)|_{\check{\alpha}}))$$

(напомним, что $\Gamma = \{(\check{q}, q) : q \in Q\}$ — имя для любого генерического множества в \mathbb{Q}).

Рассуждаем в M . Для каждого $q \in \mathbb{Q}$ обозначим через $\text{supt}(q)$ наименьший $\beta \in \omega_1$, для которого $\text{dom } q \subset \{(\alpha, \xi) : \xi < \alpha < \beta\}$.

Определим по индукции p_n, β_n, δ_n и $a_n, n \in \omega$, так, что

- ① $p_0 = p$; ② $\beta_n = \text{supt}(p_n)$; ③ $\delta_n > \beta_n$;
- ④ $p_{n+1} \leq p_n$; ⑤ $p_{n+1} \Vdash \check{\delta}_n \in \sigma$; ⑥ $\text{supt}(p_{n+1}) = \beta_{n+1} > \delta_n$;
- ⑦ $a_n: \beta_n \rightarrow \{0, 1\}$ и $p_{n+1} \Vdash (\tau|_{\check{\beta}_n} = \check{a}_n)$.

Пусть p_n и β_n уже построены. Поскольку $p_n \leq p$ и $p_n \Vdash (\sigma \text{ неограничено})$,

$$p_n \Vdash \exists x \in \check{\omega}_1 (x > \check{\beta}_n \wedge x \in \sigma).$$

Значит, существуют $q \leq p_n$ и $\delta_n < \omega_1$, для которых

$$q \Vdash (\check{\delta}_n > \check{\beta}_n \wedge \check{\delta}_n \in \sigma),$$

т.е. $\delta_n > \beta_n$ и $q \Vdash (\check{\delta}_n \in \sigma)$. Пусть r — любое условие такое, что $r \leq q$ и $\text{supt}(r) > \delta_n$. Чтобы обеспечить выполнение ⑦, положим $F = \{0, 1\}^{\beta_n}$. Тогда $r \Vdash \tau|_{\check{\beta}_n} \in \check{F}$ (потому что генерическое расширение с помощью G не добавляет новых функций $\beta_n \rightarrow \{0, 1\}$, поскольку \mathbb{Q} ω -замкнуто). Значит, существуют $a_n \in F$ и $p_{n+1} \leq r$ такие, что $p_{n+1} \Vdash (\tau|_{\check{\beta}_n} = \check{a}_n)$.

Итак, не покидая M , мы построили $\beta_0 < \delta_0 < \beta_1 < \delta_1 < \dots$.
 Положим

$$\gamma = \sup\{\beta_n : n \in \omega\} = \sup\{\delta_n : n \in \omega\} \quad \text{и} \quad p_\omega = \bigcup_{n \in \omega} p_n.$$

Имеем $p_\omega \in Q$ и $\text{supt}(p_\omega) = \gamma$. Из того, что $p_\omega \leq p_{n+1}$, следует, что $p_\omega \Vdash (\tau|_{\beta_n} = \check{\alpha}_n)$ для $n \in \omega$. Таким образом, все функции a_n согласованы, $a_\omega = \bigcup_{n \in \omega} a_n$ — функция $\gamma \rightarrow \{0, 1\}$ и $p_\omega \Vdash (\tau|_{\check{\gamma}} = \check{\alpha}_\omega)$.

Ни одна пара вида (γ, ξ) не принадлежит $\text{dom } p_\omega$. Значит, p_ω можно продолжить до функции $s: I \rightarrow \{0, 1\}$ такой, что

$$s(\gamma, \xi) = a_\omega(\xi) \quad \text{для всех} \quad \xi < \gamma.$$

Имеем $s \Vdash ((\bigcup \Gamma)_{\check{\gamma}} = \check{\alpha}_\omega)$, так что $s \Vdash (\tau|_{\check{\gamma}} = (\bigcup \Gamma)_{\check{\gamma}})$. Кроме того, $s \Vdash (\check{\gamma} \in \sigma)$, потому что $s \Vdash (\sigma \text{ замкнуто})$ и $s \Vdash (\check{\delta}_n \in \sigma)$ для всех $n \in \omega$. Значит,

$$s \Vdash (\exists x \in \sigma (\tau|_x = (\bigcup \Gamma)_x)).$$

Это противоречит неравенству $s \leq p$.



Определение

Дерево — это частично упорядоченное множество (T, \leq) такое, что для каждого $x \in T$ множество $\{y \in T : y < x\}$ вполне упорядочено.

Для $x \in T$ порядковый тип множества $\{y \in T : y < x\}$ называется **высотой** элемента x в T и обозначается $\text{ht}(x, T)$.

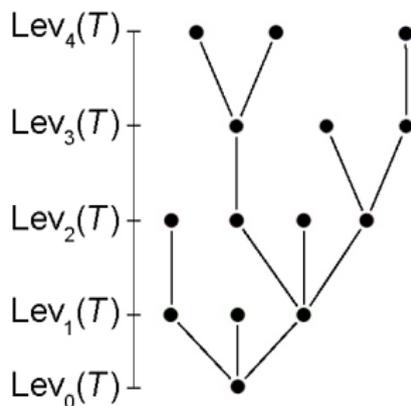
Для ординала α множество $\{x \in T : \text{ht}(x, T) = \alpha\}$ называется **α -м уровнем** дерева T и обозначается $\text{Lev}_\alpha(T)$.

Высота $\text{ht}(T)$ дерева T — это наименьший ординал α , для которого $\text{Lev}_\alpha(T) = \emptyset$. Он равен $\sup\{\text{ht}(x, T) + 1 : x \in T\}$.

Поддерево T' дерева T — это множество $T' \subset T$ с индуцированным порядком, удовлетворяющее условию

$$(\forall x \in T')(\forall y \in T)((y < x) \rightarrow (y \in T')).$$

Если T' — поддерево дерева T , то $\text{ht}(x, T') = \text{ht}(x, T)$ для всякого $x \in T'$.



$$\text{ht}(T) = 5$$

Определение

Цепью в дереве T называется любое линейно упорядоченное множество $C \subset T$. Максимальные цепи называются **ветвями**, а максимальные элементы — **листьями**.

Антицепь в T — это множество $A \subset T$ такое, что

$$\forall x, y \in A ((x \neq y) \rightarrow ((x \not\leq y) \wedge (y \not\leq x))).$$

Пусть α — предельный ординал (т.е. $\alpha \neq \beta + 1$). Его **конфинальность** $\text{cf}(\alpha)$ — это наименьший ординал β , для которого существует функция $f: \beta \rightarrow \alpha$ со свойством $\alpha = \sup_{\gamma < \beta} f(\gamma)$, т.е. наименьший β такой, что α является объединением β ординалов, строго меньших ординала α . Кардинал κ называется **регулярным**, если $\text{cf}(\kappa) = \kappa$.

Определение

Для регулярного кардинала κ **κ -деревом** называется любое дерево высоты κ , в котором все уровни имеют мощность $< \kappa$.

Определение

Для бесконечного кардинала κ **κ -деревом Суслина** называется дерево мощности κ , в котором все цепи и антицепи имеют мощность $< \kappa$.

Для регулярного кардинала κ каждое κ -дерево Сулина T является κ -деревом. Действительно, $\text{Lev}_\kappa(T) = \emptyset$, так как если $x \in \text{Lev}_\kappa(T)$, то $\{y : y < x\}$ — цепь мощности κ . Значит, $\text{ht}(T) \leq \kappa$. Все уровни — антицепи \implies их мощности $< \kappa$. $|T| = \kappa$, $T = \bigcup \{\text{Lev}_\alpha(T) : \alpha < \text{ht}(T)\}$ и κ регулярен $\implies \text{ht}(T) = \kappa$.

Теорема

Существование прямой Суслина равносильно существованию ω_1 -дерева Суслина.

Схема доказательства. Пусть T — дерево Суслина. Положим

$$L = \{C \subset T : C \text{ — максимальная цепь}\}.$$

Подправив T (если нужно), можно считать, что максимальные цепи не содержат наибольших элементов. Тогда для каждого $C \in L$ существует ординал $h(C)$ такой, что C содержит (ровно один) элемент каждого α -уровня для $\alpha < h(C)$ и ни одного элемента α -уровней для $\alpha \geq h(C)$. T — дерево Суслина $\implies h(C) < \omega_1$. Для $\alpha < h(C)$ пусть $\alpha(C)$ — единственный элемент в $C \cap \text{Lev}_\alpha(T)$.

Упорядочим L . Зафиксируем любой линейный порядок \leq на T . Для $C, D \in L$, $C \neq D$, положим $d(C, D) = \min\{\alpha : C(\alpha) \neq D(\alpha)\}$. Имеем $d(C, D) \leq \min\{h(C), h(D)\}$. Положим $C \leq D$, если $C(d(C, D)) \leq D(d(C, D))$.

(L, \leq) — прямая Суслина.

L обладает свойством Суслина:

Пусть $\{(C_\xi, D_\xi) : \xi < \omega_1\}$ — семейство непустых попарно непересекающихся интервалов. Для каждого $\xi < \omega_1$ возьмём $E_\xi \in (C_\xi, D_\xi)$ и выберем α_ξ так, что

$$\max\{d(C_\xi, E_\xi), d(E_\xi, D_\xi)\} < \alpha_\xi < h(E_\xi).$$

$\{E_\xi(\alpha_\xi) : \xi < \omega_1\}$ — несчётная антицепь в T . Противоречие.

Пространство L не сепарабельно:

Достаточно проверить, что для каждого $\gamma < \omega_1$ множество $\{C : h(C) < \gamma\}$ не плотно в L . Подправив T при необходимости, можно считать, что для каждого $t \in T$ множество $\{s \in T : s > t\}$ пересекает все уровни над t . Выберем $x \in \text{Lev}_\gamma(T)$. Множество $\{y \in T : y > x\}$ пересекает все уровни над x и не может быть цепью $\implies \exists \delta > \gamma$ такое, что $\text{Lev}_\delta(T)$ содержит разные $y', y'' > x$. Повторив то же рассуждение для y' , найдём $\alpha > \delta$ и $y, z \in \text{Lev}_\alpha(T)$ такие, что $y \neq z$ и $y, z > y'$. Возьмём $w \in \text{Lev}_\alpha$, $w > y''$. Ясно, что $w \neq y$ и $w \neq z$. Пусть $D, E, F \in L$, $y \in D$, $z \in E$ и $w \in F$. Предположим для определённости, что $D \leq E \leq F$. Тогда интервал (D, F) непуст, но $x \in D \cap F \implies (D, F)$ не содержит элементов $C \in L$, для которых $h(C) < \gamma$.

Обратно, пусть (L, \leq) — прямая Суслина. В разделе о гипотезе Суслина было доказано, что если существует какая-то прямая Суслина, то существует и прямая Суслина, в которой нет непустых сепарабельных открытых множеств. Будем считать, что (L, \leq) такова.

Пусть (\mathcal{I}, \leq) — семейство непустых открытых интервалов в L , упорядоченное обратным включению. По трансфинитной индукции для каждого $\alpha < \omega_1$ построим подсемейство $\mathcal{I}_\alpha \subset \mathcal{I}$ со свойствами

- 1 элементы \mathcal{I}_α попарно дизъюнкты,
- 2 $\bigcup \mathcal{I}_\alpha$ плотно в L ,
- 3 если $\beta < \alpha$, $I \in \mathcal{I}_\beta$ и $J \in \mathcal{I}_\alpha$, то либо (а) $I \cap J = \emptyset$, либо (б) $J \subset I$ и $I \setminus \bar{J} \neq \emptyset$ (черта сверху — замыкание).

После этого положим $T = \bigcup \mathcal{I}_\alpha$. В силу 1–3 T — дерево и $\mathcal{I}_\alpha = \text{Lev}_\alpha(T)$ для $\alpha < \omega_1$. Если $A \subset T$ — антицепь, то интервалы-элементы A попарно дизъюнкты, так что $|A| \leq \omega$.

Если бы T содержало несчётную цепь $\{I_\xi : \xi < \omega_1\}$ (упорядоченную так, что $I_\xi \leq I_\zeta$ для $\xi < \zeta$), то в силу 3(б) мы бы имели $I_\xi \setminus \bar{I}_\zeta \neq \emptyset$ для $\xi < \zeta$, так что семейство

$\{I_\xi \setminus \bar{I}_{\xi+1} : \xi < \omega_1\}$ противоречило бы свойству Суслина L .

Наконец, $|T| = \omega_1$, так как $\mathcal{I}_\alpha \neq \emptyset$ для $\alpha < \omega_1$ в силу 2.



Построение дерева Суслина в предположении \diamond

Скажем, что дерево (T, \leq) **всегда ветвится**, если $\forall x \in T$ множество $\{y \in T : y > x\}$ не линейно упорядочено.

Лемма 1

Всякое всегда ветвящееся дерево, в котором все максимальные антицепи счётны, является деревом Суслина.

Доказательство. Пусть T — всегда ветвящееся дерево. По лемме Цорна любая антицепь содержится в максимальной \implies все антицепи счётны. Пусть C — максимальная несчётная цепь. Тогда C пересекает все уровни (поскольку вместе с каждым элементом содержит всех его предшественников). T всегда ветвится $\implies \forall x \in T \exists f(x) > x$ такое, что $f(x) \notin C$. Выберем по индукции $x_\alpha \in C$ для $\alpha < \omega_1$ так, что $\text{ht}(x_\alpha, T) > \sup\{\text{ht}(f(x_\beta), T) : \beta < \alpha\}$. Получим несчётную антицепь $\{f(x_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$. Противоречие \implies все максимальные цепи счётны \implies все цепи счётны. □

Будем строить дерево Суслина вида $T = (\omega_1, \triangleleft)$, где \triangleleft — специальный порядок.

Для дерева T и ординала α положим $T_\alpha = \cup\{\text{Lev}_\beta(T) : \beta < \alpha\}$ (это поддереву).

Лемма 2

Пусть $T = (\omega_1, \triangleleft)$ — ω_1 -дерево. Тогда

- 1 $\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha\}$ замкнуто и неограничено в ω_1 ;
- 2 если $A \subset \omega_1$ — максимальная антицепь в T , то $\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha, A \cap T_\alpha \text{ — максимальная антицепь в } T_\alpha\}$ замкнуто и неограничено в ω_1 .

Доказательство. 1: Замкнутость очевидна. Докажем неограниченность. Для $\alpha < \omega_1$ положим $f(\alpha) = \text{ht}(\alpha, T)$ и $g(\alpha) = \sup\{\beta : \beta \in \text{Lev}_\alpha(T)\}$. Ясно, что если $f(\beta) < \alpha$ и $g(\beta) < \alpha$ для всех $\beta < \alpha$, то $T_\alpha = \alpha$. Значит, надо показать, что множество таких α неограничено. Для каждого $\xi < \omega_1$ выберем $\varphi(\xi) > \xi, f(\xi), g(\xi)$. Для любого фиксированного ξ_0 ординал $\alpha = \sup_n \varphi^n(\xi_0)$ (φ^n — n -я итерация φ) обладает нужными свойствами, и $\alpha > \xi_0$.

②: Антицепь A в T максимальна \iff каждый элемент $x \in T \setminus A$ сравним с некоторым элементом A .

Замкнутость очевидна. Проверим неограниченность. Ясно, что $A \cap T_\alpha$ — антицепь в T_α для любого α . Для каждого $\alpha < \omega_1$ выберем элемент $h(\alpha) \in A$, сравнимый с α (для $\alpha \in A$ полагаем $h(\alpha) = \alpha$). В пункте ① мы определили отображения f и g . Добавим к ним h и для $\xi < \omega_1$ определим $\varphi(\xi)$ так, что $\varphi(\xi) > \xi, f(\xi), g(\xi), h(\xi)$. Для любого фиксированного ξ_0 ординал $\alpha = \sup_n \varphi^n(\xi_0)$ удовлетворяет условиям $f(\beta) < \alpha$ и $g(\beta) < \alpha$ для всех $\beta < \alpha$. Значит, $T_\alpha = \alpha$. Кроме того, $h(\beta) \in \alpha = T_\alpha$ для всех $\beta < \alpha$, так что каждый элемент $\beta \in T_\alpha \setminus A$ сравним с некоторым элементом (а именно, $h(\beta)$) из $A \cap T_\alpha$. Значит, антицепь $A \cap T_\alpha$ максимальна в T_α . При этом ординал α больше произвольно выбранного ξ_0 . □

Лемма 3

Пусть $T = (\omega, \triangleleft)$ — всегда ветвящееся ω_1 -дерево и $(A_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ — \diamond -последовательность. Предположим, что для каждого предельного ординала $\alpha < \omega_1$ с тем свойством, что $T_\alpha = \alpha$ и A_α — максимальная антицепь в T_α , выполнено условие

$$\forall x \in \text{Lev}_\alpha(T) \exists y \in A_\alpha \text{ такой, что } y \triangleleft x. \quad (*)$$

Тогда T — ω_1 -дерево Суслина.

Доказательство. Лемма 1 \implies достаточно проверить, что любая максимальная антицепь A в T счётна. Лемма 2 \implies множество

$$C = \{ \alpha < \omega_1 : \alpha \text{ предельный, } T_\alpha = \alpha \\ \text{и } A \cap T_\alpha \text{ — максимальная антицепь в } T_\alpha \}$$

замкнуто и неограничено в ω_1 . Поскольку множество $\{ \alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha \}$ стационарно, найдётся $\alpha_0 \in C$ такое, что $A \cap \alpha_0 = A_{\alpha_0}$. Из (*) следует, что если $z \in T$ и $\text{ht}(z, T) \geq \alpha_0$, то для некоторого $y \in A_{\alpha_0} = A \cap \alpha_0$ имеем $y \triangleleft z$, так что $z \notin A$ (поскольку A — антицепь). Значит, $A = A_{\alpha_0}$. □

Теорема (◇)

Существует дерево Суслина.

(Ординалы $\alpha < \omega_1$ записываются в виде $\omega \cdot \beta + n$, и порядок \triangleleft определяется индукцией по β и n так, чтобы выполнялось $(*)$.)

Некоторые другие следствия ◇

- Существует пространство Осташевского: несчётное регулярное счётно компактное не компактное пространство, в котором всякое замкнутое множество либо не более чем счётно, либо имеет не более чем счётное дополнение. (Несуществование таких пространств совместимо с ZFC + CH.)
- Существует наследственно сепарабельный компакт мощности $2^{2^{\omega}}$ без сходящихся последовательностей.
- Существует пространство X со следующими свойствами:
 - X локально компактно;
 - X локально счётно;
 - X наследственно сепарабельно;
 - X нормально;
 - $X \times [0, 1]$ не нормально.

Фильтр club(κ)

Пусть κ — кардинал (или предельный ординал).

Определение

Множество $C \subseteq \kappa$ **замкнуто** в κ , если всякий ординал $\alpha < \kappa$, для которого $\sup(C \cap \alpha) = \alpha \neq 0$, принадлежит C ($\iff C$ замкнуто в порядковой топологии на κ).

Множество $C \subseteq \kappa$ **неограничено** в κ , если для всякого ординала $\alpha < \kappa$ существует $\beta \in C$ такой, что $\beta > \alpha$.

Множество $C \subseteq \kappa$, замкнутое и неограниченное в κ , называется **clubом**. Семейство всех множеств, каждое из которых содержит некоторый club в κ , является фильтром (будет доказано). Этот фильтр обозначается **club(κ)**.

Если κ — регулярный кардинал, то множество $C \subseteq \kappa$ неограничено в $\kappa \iff |C| = \kappa$.

(Действительно, пусть $C = \{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$, где $\lambda \leq \kappa$ и $c_\alpha < c_\beta$ для $\alpha < \beta$ (а значит, $c_\alpha \geq \alpha$ для всех $\alpha < \lambda$). Имеем $|c_\alpha| < \kappa$ для каждого $\alpha < \lambda$ (так как κ — кардинал). Если C неограничено, т.е. $\sup C = \bigcup_{\alpha < \lambda} c_\alpha = \kappa$, то $|C| = \lambda = \kappa$ в силу регулярности кардинала κ . Обратно, если $\lambda = \kappa$, то $\sup C = \sup_{\alpha < \kappa} c_\alpha \geq \sup_{\alpha < \kappa} \alpha = \kappa$.)

Теорема (κ -полнота фильтра $\text{club}(\kappa)$)

Если κ — регулярный несчётный кардинал, то пересечение $< \kappa$ club ов в κ является club ом.

Доказательство. Пусть $\lambda < \kappa$ и C_α , $\alpha < \lambda$, — club ы в κ .

Очевидно, пересечение $\bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$ замкнуто в κ . Покажем, что оно неограничено. Возьмём любой ординал $\beta_0 < \kappa$. Пусть $(\beta_{0\alpha})_{\alpha < \lambda}$ — последовательность ординалов со свойствами

- $\beta_{00} > \beta_0$,
- $\beta_{0\alpha} < \beta_{0\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{0\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

Такая последовательность существует, так как все C_α неограничены.

Предположим, что $n > 0$ и мы уже построили последовательность $(\beta_{(n-1)\alpha})_{\alpha < \lambda}$ ординалов $< \kappa$. Положим $\beta_n = \sup_{\alpha < \lambda} \beta_{(n-1)\alpha}$. Имеем $\beta_n < \kappa$, так как κ регулярен.

Выберем последовательность $(\beta_{n\alpha})_{\alpha < \lambda}$ со свойствами

- $\beta_{n0} > \beta_n$,
- $\beta_{n\alpha} < \beta_{n\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

В результате мы получим последовательности $(\beta_{n\alpha})_{\alpha < \lambda}$ для всех $n < \omega$. Для каждого $\alpha < \lambda$ положим $\beta_\alpha^* = \sup_{n < \omega} \beta_{n\alpha}$.

Каждое C_α замкнуто, $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha \implies \beta_\alpha^* \in C_\alpha$. Поскольку $\beta_n < \beta_{n\alpha} < \beta_{n+1}$, имеем $\beta_\alpha^* = \sup_{n < \omega} \beta_n$ для всякого $\alpha < \lambda$.

Значит, $\sup_{n < \omega} \beta_n \in \bigcap_{\alpha < \lambda} C_\alpha$, и $\sup_{n < \omega} \beta_n > \beta_0$.



Теорема (о диагональном пересечении)

Если κ — регулярный несчётный кардинал, то для любой последовательности *clubов* $(C_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ **диагональное пересечение**

$\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha = \{\beta < \kappa : \beta \in \bigcap_{\alpha < \beta} C_\alpha\}$
является *clubом*.

Доказательство. Заметим, что $\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha = \bigcap_{\alpha < \kappa} (C_\alpha \cup [0, \alpha])$. Действительно, если $\beta \in \bigcap_{\alpha < \beta} C_\alpha$, то тем более $\beta \in \bigcap_{\alpha < \beta} (C_\alpha \cup [0, \alpha])$, и при этом $\beta \in [0, \gamma] \subset C_\gamma \cup [0, \gamma]$ для всякого $\gamma \geq \beta$. Значит, $\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha \subset \bigcap_{\alpha < \kappa} (C_\alpha \cup [0, \alpha])$. Обратно, если $\beta \in \bigcap_{\alpha < \kappa} (C_\alpha \cup [0, \alpha])$, то $\beta \in C_\alpha \cup [0, \alpha]$ для каждого $\alpha < \beta$, и из того, что $\beta \notin \bigcup_{\alpha < \beta} [0, \alpha]$, следует, что $\beta \in \bigcap_{\alpha < \beta} C_\alpha$.

Вывод: диагональное пересечение $\Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$ замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Покажем, что оно неограничено. Возьмём $\alpha < \kappa$ и рассмотрим последовательность $(\xi_n)_{n \in \omega}$, где

$$\xi_0 = \alpha \quad \text{и} \quad \xi_{n+1} = \min\left(\bigcap_{\beta < \xi_n} C_\beta \cap (\xi_n, \kappa)\right).$$

Положим $\xi = \sup_{n \in \omega} \xi_n$. Для каждого $\beta < \xi$ имеем $\beta < \xi_k$ для некоторого k , поэтому все элементы последовательности $(\xi_n)_{n \in \omega}$, кроме конечного их числа, принадлежат C_β . Все C_β замкнуты $\implies \xi \in C_\beta$ для каждого $\beta < \xi \implies \xi \in \Delta_{\alpha < \kappa} C_\alpha$. Ясно, что $\xi > \alpha$. □

Следствие

Семейство всех clubов в регулярном несчётном кардинале κ замкнуто относительно конечных пересечений.

Таким образом, семейство

$$\text{club}(\kappa) = \{A \subset \kappa : A \text{ содержит некоторый club в } \kappa\}$$

является фильтром. Мы увидим, что он почти никогда не является ультрафильтром (т.е. максимальным по включению фильтром).

Определение

Подмножество регулярного несчётного кардинала κ **стационарно**, если оно пересекается со всеми clubами в κ .

Ясно, что все стационарные множества неограничены.

Пусть κ — любой кардинал. Кардинал, непосредственно следующий за ним, обозначается κ^+ :

$$\kappa^+ = \min\{\lambda : \lambda \text{ — кардинал, } \kappa < \lambda\}.$$

В частности, $n^+ = n + 1$, $\omega^+ = \omega_1$, \dots , $\omega_\alpha^+ = \omega_{\alpha+1}$.

Замечание

Всякий кардинал вида κ^+ регулярен.

Утверждение, что всякий регулярный кардинал имеет вид κ^+ , совместимо с ZFC.

Теорема (Улам)

Пусть κ — любой бесконечный кардинал.

Всякое стационарное подмножество кардинала κ^+ можно представить как объединение κ^+ штук попарно непересекающихся стационарных множеств.

Определение

Пусть κ — кардинал. Для каждого $\beta < \kappa^+$ зафиксируем инъекцию $f_\beta: \beta \rightarrow \kappa$. Для $\iota < \kappa$ и $\alpha < \kappa^+$ положим

$$A_\alpha^\iota = \{\beta < \kappa^+ : \alpha < \beta \text{ и } f_\beta(\alpha) = \iota\}.$$

Получившееся семейство множеств A_α^ι , $\iota < \kappa$, $\alpha < \kappa^+$, называется **матрицей Улама** на κ^+ .

Свойства матрицы Улама:

- 1 Если $\iota \neq \eta$, то $A_\alpha^\iota \cap A_\alpha^\eta = \emptyset$ для всякого $\alpha < \kappa^+$.
- 2 Если $\alpha \neq \gamma$, то $A_\alpha^\iota \cap A_\gamma^\iota = \emptyset$ для всякого $\iota < \kappa$, потому что все f_β инъективны.
- 3 $\bigcup_{\iota < \kappa} A_\alpha^\iota = \{\beta < \kappa^+ : \alpha < \beta\}$ для каждого $\alpha < \kappa^+$.

Доказательство теоремы Улама. Для $\alpha < \kappa^+$ положим

$$\text{stat}(\alpha) = \{\iota < \kappa : A_\alpha^\iota \text{ стационарно}\}.$$

Множество $\bigcup_{\iota \in \text{stat}(\alpha)} A_\alpha^\iota$ содержит club. (Действительно, иначе $\bigcup_{\iota \notin \text{stat}(\alpha)} A_\alpha^\iota$ стационарно. Для $\iota \notin \text{stat}(\alpha)$ пусть C_ι — club, не пересекающий A_α^ι . Теорема о κ^+ -полноте $\implies C = \bigcap_{\iota \notin \text{stat}(\alpha)} C_\iota$ — club, однако C не пересекает множество $\bigcup_{\iota \notin \text{stat}(\alpha)} A_\alpha^\iota$, которое по предположению стационарно.) Значит, для некоторого $\iota < \kappa$ имеем $|\{\alpha : \iota \in \text{stat}(\alpha)\}| = \kappa^+$. □

Пусть κ — кардинал и $A \subset \kappa$. Скажем, что функция $f: A \rightarrow \kappa$ **регрессивна**, если $f(\alpha) < \alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Следующая теорема (*лемма Фодора*, или *pressing down lemma*) утверждает, что всякая регрессивная функция на стационарном множестве постоянна на некотором стационарном подмножестве этого множества.

Лемма Фодора

Пусть κ — регулярный несчётный кардинал, $S \subset \kappa$ — стационарное множество и $f: S \rightarrow \kappa$ — регрессивная функция. Тогда существуют стационарное множество $S_0 \subset S$ и ординал $\gamma < \kappa$ такие, что $f(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$.

Доказательство. Будем считать, что $0 \notin S$. Предположим, что найдутся стационарное множество $S \subset \kappa$ и регрессивная функция $f: S \rightarrow \kappa$ такие, что для всякого $\gamma < \kappa$ множество $f^{-1}(\gamma)$ не стационарно, т.е. не пересекается с некоторым clubом C_γ . Положим $C = \Delta_{\gamma < \kappa} C_\gamma$. Для $\alpha \in C$ имеем $\alpha \in C_\beta$ для каждого $\beta < \alpha$, т.е. $\alpha \notin f^{-1}(\beta)$ для каждого $\beta < \alpha$. Значит, $f(\alpha) \geq \alpha$ — противоречие. □

Теорема

Пусть κ — регулярный несчётный кардинал. Тогда для любой функции $f: \kappa \rightarrow \kappa$ множество

$$A = \{\alpha < \kappa : \forall \beta < \alpha (f(\beta) < \alpha)\}$$

содержит *club*.

Доказательство. Предположим, что A не содержит *club*. Тогда $S = \kappa \setminus A$ стационарно. Для каждого $\alpha \in S$ положим

$$\varphi(\alpha) = \min\{\beta < \alpha : f(\beta) \geq \alpha\}.$$

Получили регрессивную функцию $\varphi: S \rightarrow \kappa$. По лемме Фодора существуют ординал $\gamma < \kappa$ и стационарное множество $S_0 \subset S$ такие, что $\varphi(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$. Получается, что $f(\gamma) \geq \alpha$ для всех $\alpha \in S_0$. Этого не может быть, так как S_0 неограничено. □

Следствие

Если κ — регулярный несчётный кардинал, то множество неподвижных точек любой непрерывной (относительно порядковой топологии) возрастающей функции $\kappa \rightarrow \kappa$ содержит *club*.

Измеримые кардиналы

Недостижимые кардиналы

Недостижимые кардиналы — это кардиналы, которые нельзя получить из меньших кардиналов применением операций кардинальной арифметики.

Определение

Несчётный кардинал κ **сильно недостижим**, или просто **недостижим**, если он регулярен и для всякого $\lambda < \kappa$ имеем $2^\lambda < \kappa$.

Определение

Кардинал κ называется **предельным**, если у него нет непосредственного предшественника.

Непредельные кардиналы — это в точности все кардиналы вида κ^+ . Если выполнена *обобщённая континуум-гипотеза* $2^\kappa = \kappa^+$ для всех кардиналов κ , то всякий регулярный предельный кардинал недостижим.

Несуществование недостижимых кардиналов совместимо с ZFC, тогда как совместимость их существования нельзя доказать в принципе.

Иерархия фон Неймана разбивает класс V всех множества на подклассы V_α , где α пробегает класс всех ординалов. Классы V_α определяются по трансфинитной рекурсии:

- $V_0 = \emptyset$
- если $\alpha = \beta + 1$, то $V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$
- если α — предельный ординал, то $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$

Если кардинал κ недостижим, то V_κ — модель теории множеств, в которой нет недостижимых кардиналов, так что несуществование таких кардиналов совместимо с ZFC. Однако если бы существовало доказательство непротиворечивости существования недостижимого кардинала, то оно являлось бы одновременно доказательством непротиворечивости ZFC, которое не может существовать по второй теореме Гёделя о неполноте.

Для множества X положим

$$\text{Def}(X) = \left\{ \{y : y \in X \text{ и } (X, \epsilon) \models \varphi(y, z_1, \dots, z_n)\} : \right. \\ \left. \varphi \text{ — формула первого порядка и } z_1, \dots, z_n \in X \right\}.$$

Конструктивный универсум Гёделя L является объединением классов L_α , где α пробегает класс всех ординалов. Классы L_α определяются по трансфинитной рекурсии:

- $L_0 = \emptyset$
- если $\alpha = \beta + 1$, то $L_\alpha = \text{Def}(L_\beta)$
- если α — предельный ординал, то $L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta$

Предположение $V = L$ совместимо с ZFC. Из него вытекает обобщённая континуум гипотеза, а значит, и недостижимость всякого предельного регулярного несчётного кардинала. Если κ — такой кардинал, то L_κ — модель теории множеств, в которой таких кардиналов нет, так что их несуществование совместимо с ZFC. Однако доказать непротиворечивость существования предельных регулярных несчётных кардиналов невозможно в принципе (по второй теореме Гёделя о неполноте).

Определение

Измеримый кардинал — это несчётный кардинал такой, что на $\mathcal{P}(\kappa)$ существует κ -аддитивная нетривиальная $\{0, 1\}$ -значная мера.

Измеримый по Уламу кардинал — это несчётный кардинал такой, что на $\mathcal{P}(\kappa)$ существует σ -аддитивная нетривиальная $\{0, 1\}$ -значная мера.

При этом $\{0, 1\}$ -значная мера κ -аддитивна, если каковы бы ни были кардинал $\lambda < \kappa$ и семейство попарно непересекающихся множеств $A_\alpha \subset \kappa$, $\alpha < \lambda$, имеем $\text{mes} \bigcup A_\alpha = \sum_{\alpha < \lambda} \text{mes} A_\alpha$ (это означает, в частности, что $\text{mes} A_\alpha$ может равняться 1 не более чем для одного $\alpha < \lambda$). Мера *нетривиальна*, если $\text{mes} \kappa = 1$ и $\text{mes} \{\alpha\} = 0$ для всякого $\alpha \in \kappa$.

Другими словами, несчётный кардинал κ измерим, если на κ существует κ -полный неглавный ультрафильтр.

(Ультрафильтр \mathcal{U} на κ *неглавный*, если $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, и κ -полный, если пересечение любого семейства $< \kappa$ его элементов принадлежит \mathcal{U} .)

Теорема

Любой измеримый кардинал недостижим.

Доказательство. Если на кардинале κ существует нетривиальная κ -аддитивная $\{0, 1\}$ -значная мера, то любое одноэлементное множество имеет меру 0 \implies любое множество мощности $< \kappa$ имеет меру 0 \implies объединение $< \kappa$ таких множеств имеет меру 0 $\implies \kappa$ регулярен.

Предположим, что существует $\lambda < \kappa$, для которого $2^\lambda \geq \kappa$.

Отождествим κ с каким-нибудь множеством $K \subset 2^\lambda$ (посредством биекции). Элементы K (как и всего множества 2^λ) — это функции $\lambda \rightarrow \{0, 1\}$. Для каждого $\alpha < \lambda$ имеем

$$\text{mes}\{f \in K : f(\alpha) = 0\} = 1 \quad \text{или} \quad \text{mes}\{f \in K : f(\alpha) = 1\} = 1.$$

В первом случае положим $c_\alpha = 0$, во втором — $c_\alpha = 1$. В силу κ -аддитивности меры имеем

$$\text{mes} \bigcap \left\{ \{f \in K : f(\alpha) = c_\alpha\} : \alpha \in \lambda \right\} = 1,$$

однако это пересечение содержит лишь одну точку — функцию $f : \alpha \mapsto c_\alpha, \alpha \in \lambda$. □

Теорема

Наименьший измеримый по Уламу кардинал измерим.

Доказательство. Пусть κ — наименьший измеримый по Уламу кардинал и mes — σ -аддитивная $\{0, 1\}$ -значная мера на $\mathcal{P}(\kappa)$.

Предположим, что эта мера не κ -аддитивна. Пусть $\lambda < \kappa$, $A_\alpha \subset \kappa$ для $\alpha < \lambda$, $\text{mes } A_\alpha = 0$ для $\alpha < \lambda$ и $\text{mes}(\bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha) = 1$. Можно считать, что $\bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha = \kappa$ — иначе заменим A_0 на $A_0 \cup (\kappa \setminus \bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha)$.

Рассмотрим отображение $f: \kappa \rightarrow \lambda$, определённое правилом $f(\alpha) = \beta \iff \beta \in A_\alpha$. Определим на $\mathcal{P}(\lambda)$ функцию μ , положив $\mu(X) = \text{mes}(f^{-1}(X))$ для $X \subset \lambda$. Функция μ является σ -аддитивной мерой на $\mathcal{P}(\lambda)$, поскольку

$\mu(\emptyset) = \text{mes}(f^{-1}(\emptyset)) = \text{mes}(\emptyset) = 0$ и для любых попарно непересекающихся множеств $X_n \subset \lambda$, $n \in \omega$, имеем $f^{-1}(X_i) \cap f^{-1}(X_j) = \emptyset$ для $i \neq j$, $f^{-1}(\bigcup_{n \in \omega} X_n) = \bigcup_{n \in \omega} f^{-1}(X_n)$ и

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \in \omega} X_n\right) &= \text{mes}\left(\bigcup_{n \in \omega} f^{-1}(X_n)\right) = \\ &= \sum_{n \in \omega} \text{mes}(f^{-1}(X_n)) = \sum_{n \in \omega} \mu(f^{-1}(X_n)). \end{aligned}$$

Существование μ противоречит минимальности измеримого по Уламу кардинала κ . □

Кардинал κ называется **рамсеевским**, если для всякой раскраски $\chi: [\kappa]^{<\omega} \rightarrow \{0, 1\}$ существует χ -однородное множество мощности κ (множество $A \subset \kappa$ χ -однородно, если $\chi|_{[A]^{<\omega}} = \text{const}$).

Теорема

Любой измеримый кардинал является рамсеевским.

Ультрафильтр \mathcal{U} на κ называется **нормальным**, если он замкнут относительно диагональных пересечений, т.е. для любого семейства $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ элементов \mathcal{U} диагональное пересечение $\Delta_{\alpha < \kappa} U_\alpha$ принадлежит \mathcal{U} .

Теорема

Кардинал κ измерим \iff на κ существует неглавный κ -полный нормальный ультрафильтр.

Категории

Теория категорий изучает свойства отношений между объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов.

Определение

Говорят, что задана категория \mathcal{C} , если

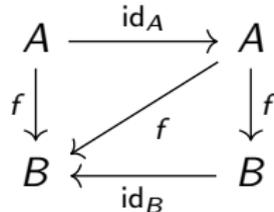
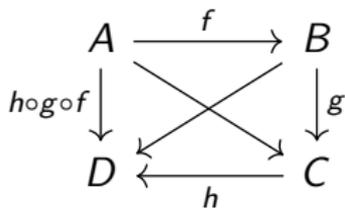
- задан класс объектов $\text{Ob}_{\mathcal{C}}$;
- для каждой пары объектов A, B задано множество морфизмов (стрелок) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, причём каждому морфизму соответствуют единственные объекты A и B ;
- для пары морфизмов $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ определена композиция $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$;
- для каждого объекта A задан тождественный морфизм $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$,

причём выполняются аксиомы

- операция композиции ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- тождественный морфизм действует тривиально:

$$f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f \quad \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Стандартный способ описания утверждений теории категорий — коммутативные диаграммы. **Коммутативная диаграмма** — это ориентированный граф, в вершинах которого находятся объекты, а стрелками являются морфизмы, причём результат композиции стрелок не зависит от выбранного пути. Например, аксиомы теории категорий можно записать с помощью диаграмм:



Примеры

- **Set** — категория множеств: объекты — множества, морфизмы — отображения множеств
- **Top** — категория топологических пространств: объекты — пространства, морфизмы — непрерывные отображения
- **Grp** — категория групп: объекты — группы, морфизмы — гомоморфизмы
- каждому ч.у.м. соответствует категория, объекты которой — элементы ч.у.м., морфизмы — \leq

Как уже упоминалось, в теории категорий произведение объектов X_α , $\alpha \in A$, определяется как объект X вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ (называемых каноническими проекциями) с тем свойством, что для любого объекта Y этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ существует единственный морфизм $f: Y \rightarrow X$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow f & \downarrow \pi_\alpha \\
 Y & \xrightarrow{f_\alpha} & X_\alpha
 \end{array}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В категории Тор топологических пространств объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения. В этой категории условие из определения произведения означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ диагональное произведение $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha: Y \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

Определение

Морфизм $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ называется

- **изоморфизмом**, если существует морфизм $g \in \text{Hom}_C(B, A)$ такой, что $g \circ f = \text{id}_A$ и $f \circ g = \text{id}_B$;
- **эндоморфизмом**, если $A = B$;
- **автоморфизмом**, если это изоморфизм и эндоморфизм;
- **эпиморфизмом**, если $\forall g_1, g_2 \in \text{Hom}_C(B, X)$ из $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует $g_1 = g_2$;
- **мономорфизмом**, если $\forall g_1, g_2 \in \text{Hom}_C(X, A)$ из $f \circ g_1 = f \circ g_2$ следует $g_1 = g_2$;
- **биморфизмом**, если это мономорфизм и эпиморфизм.

Любой изоморфизм является биморфизмом, но не наоборот.

Определение

Объект P в категории \mathcal{C} называется **проективным**, если для любых эпиморфизма $e: Y \rightarrow X$ и морфизма $f: P \rightarrow X$ существует морфизм $\bar{f}: P \rightarrow Y$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \bar{f} & \downarrow e \\ P & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

коммутативна (т.е. $e \circ \bar{f} = f$).

Примеры

- Аксиома выбора \iff все объекты в категории Set множеств и отображений проективны.
- В категории (топологических) групп и (непрерывных) гомоморфизмов проективные объекты — свободные (топологические) группы.
- В категории Comp компактов и непрерывных отображений проективные объекты — экстремально несвязные компакты.

Определение

Булева алгебра — это непустое множество B с двумя бинарными операциями \vee (супремум) и \wedge (инфимум), одной унарной операцией \neg (дополнение) и двумя выделенными элементами 0 и 1 , удовлетворяющими аксиомам:
для любых $a, b, c \in B$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$a \vee (a \wedge b) = a$$

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

$$a \vee 0 = a$$

$$a \wedge 1 = a$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee \neg a = 1$$

$$a \wedge \neg a = 0$$

Примеры

1. Для множества X семейство $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X с операциями $\vee = \cup$, $\vee = \cap$, $\neg = X \setminus \cdot$ и выделенными элементами $0 = \emptyset$ и $1 = X$.
2. Для топологического пространства X семейство $\text{CO}(X)$ всех открыто-замкнутых подмножеств X с теми же операциями.
3. Для топологического пространства X семейство $\text{RO}(X)$ всех канонически открытых подмножеств X с операциями

$$U \wedge V = U \cap V, \quad U \vee V = \text{Int}(\overline{U \cup V}), \quad \neg U = X \setminus \bar{U}$$

и выделенными элементами $0 = \emptyset$ и $1 = X$.

(Канонически открытые множества = внутренности замкнутых: $U \in \text{RO}(X)$, если $U = \text{Int} \bar{U}$.)

4. Булева алгебра $\text{RC}(X)$ канонически замкнутых множеств (замыканий открытых) с $0 = \emptyset$, $1 = X$ и операциями

$$F \wedge G = \overline{F \cap G}, \quad F \vee G = F \cup G, \quad \neg F = X \setminus \text{Int} F.$$

Теорема Стоуна

Любая булева алгебра B изоморфна булевой алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств некоторого вполне несвязного компакта $S(B)$.

Точки компакта $S(B)$ — ультрафильтры на B , т.е. гомоморфизмы в булеву алгебру $\{0, 1\}$. Его топология порождена базой $\{X \in S(B) : b \in X\}$, где $b \in B$.

Соответствие S — отображение из категории булевых алгебр и гомоморфизмов булевых алгебр в категорию Comp компактов и непрерывных отображений. Это соответствие является контравариантным функтором, т.е. любому гомоморфизму булевых алгебр $A \rightarrow B$ естественным образом соответствует непрерывное отображение $S(B) \rightarrow S(A)$.

Определение

Булева алгебра B **полна**, если для любого множества $X \subset B$ определены $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ (считается, что $\bigvee \emptyset = 0$ и $\bigwedge \emptyset = 1$).

Булева алгебра B полна \iff пространство Стоуна $S(B)$ экстремально несвязно.

Экстремально несвязные пространства

Определение

Топологическое пространство X **экстремально несвязно**, если замыкание любого открытого множества в нём открыто.

Равносильные условия

- внутренность любого замкнутого множества в X замкнута
- если $U, V \subset X$ открыты и $U \cap V = \emptyset$, то $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$
- любое всюду плотное множество $Y \subset X$ C^* -вложено в X , т.е. всякая непрерывная функция $Y \rightarrow [0, 1]$ продолжается до непрерывной функции $X \rightarrow [0, 1]$
- любое открытое множество $U \subset X$ C^* -вложено в X
- стоун-чеховская (максимальная) компактификация βX — проективный объект категории Comp
- булева алгебра $\text{CO}(X)$ образует базу топологии X и полна

Теорема (Фролик)

Если X — экстремально несвязное пространство и $f: X \rightarrow X$ — гомеоморфизм, то множество $\text{Fix } f$ неподвижных точек отображения f открыто (и замкнуто) в X .

Следствие

Всякое хаусдорфово пространство, квадрат которого экстремально несвязен, дискретно.

Доказательство. Для автогомеоморфизма $f: X^2 \rightarrow X^2$, определённого правилом $f(x, y) = (y, x)$, множество неподвижных точек — диагональ в X^2 . Диагональ в квадрате хаусдорфова пространства открыта \iff это пространство дискретно. □

Топологическое пространство X **однородно**, если для любых различных $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$ такой, что $f(x) = y$.

Всякий однородный экстремально несвязный компакт конечен.

Замечание

Пространство $X \cup \{*\}$ с единственной неизолированной точкой $*$ экстремально несвязно \iff фильтр \mathcal{F} проколотых окрестностей точки $*$ является ультрафильтром на X .

Доказательство. \Leftarrow очевидно, докажем \Rightarrow . Пусть A — любое подмножество X . Надо показать, что либо A , либо $X \setminus A$ является проколотой окрестностью точки $*$. Множества A и $X \setminus A$ открыты в $X \cup \{*\}$. Значит, $*$ принадлежит замыканию ровно одного из этих множеств. Пусть для определённости $*$ $\in \overline{A}$. Имеем $\overline{A} = A \cup \{*\}$ (и $\overline{X \setminus A} = X \setminus A$) — иначе $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \neq \emptyset$. Значит, множество $A \cup \{*\}$ открыто и A — проколотая окрестность точки $*$. □

Экстремальная несвязность наследуется открытыми, всюду плотными и счётными подпространствами и сохраняется открытыми непрерывными отображениями.

Экстремально несвязные группы

Топологическая группа — это группа с топологией, относительно которой обе групповые операции $(x, y) \mapsto x \cdot y$ и $x \mapsto x^{-1}$ непрерывны.

Если топологическая группа G удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 , то она вполне регулярна. В этом случае говорят, что G отделима. В противном случае пересечение H всех окрестностей единицы является открыто-замкнутой подгруппой группы G , и топологическая факторгруппа G/H отделима, а в остальном обладает теми же топологическими свойствами, что и группа G . В дальнейшем будем предполагать все рассматриваемые топологические группы отделимыми.

Проблема (Архангельский, 1967)

Существует ли в ZFC неметризуемая экстремально несвязная топологическая группа?

Теорема (Сирота, ≈ 1967)

$\text{CH} \implies$ существует неметризуемая счётная экстремально несвязная группа

Определение

Группа G с единицей 1 называется **булевой**, если в ней выполнено тождество $x^2 = 1$ для всех $x \in G$.

- Любая булева группа абелева.
- Любая булева группа является векторным пространством над полем \mathbb{F}_2 . В частности, у неё есть базис, который её свободно порождает.
- Булева группа $B(X)$ с базисом X — не что иное как множество $[X]^{<\omega}$ всех конечных подмножеств X с операцией симметрической разности: для $x, y \in B(X)$
 $x + y = x \Delta y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$. Ноль — пустое множество.

Пример

Канторов дисконтинуум $C \cong \{0, 1\}^\omega$ — компактная булева топологическая группа. Она содержит счётную группу

$$B(\omega) = [\omega]^{<\omega} = \{f \in \{0, 1\}^\omega : |f^{-1}(1)| < \omega\}$$

в качестве подгруппы.

Теорема (Малыхин)

Любая экстремально несвязная группа содержит открытую булеву подгруппу.

Доказательство. Пусть G — экстремально несвязная группа. Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$, $\varphi(g) = g^{-1}$. По теореме Фролика $\text{Fix } \varphi$ открыто в G . Это открытая окрестность единицы. Пусть U — открытая окрестность единицы, для которой $U \cdot U \subset \text{Fix } \varphi$ (её существование вытекает из равенства $1 \cdot 1 = 1$ и непрерывности умножения в точке $(1, 1) \in G \times G$). Пусть H — подгруппа, порождённая множеством U . Она открыта: для $h \in H$ имеем $h \cdot U \subset h \cdot H \subset H$, и $h \cdot U$ — открытая окрестность точки h в силу непрерывности умножения.

Покажем, что подгруппа H булева. Для любых $u, v \in U$ имеем $u \cdot v \in \text{Fix } \varphi$, откуда

$$v \cdot u = v \cdot u \cdot (u \cdot v \cdot u \cdot v) = (v \cdot (u \cdot u) \cdot v) \cdot u \cdot v = u \cdot v.$$

Любой элемент $h \in H$ есть произведение $u_1 \cdot \dots \cdot u_n$, где $u_i \in U$. Значит, $h^2 = u_1^2 \cdot \dots \cdot u_n^2 = 0$. □

Следствие

Если существует недискретная экстремально несвязная группа, то существует и булева недискретная экстремально несвязная группа.

Пример Сироты

Напомним: если \mathcal{F} — фильтр на ω , то $\omega_{\mathcal{F}}$ — пространство $\omega \cup \{*\}$ с единственной неизолированной точкой $*$, в котором проколотые окрестности $*$ — элементы \mathcal{F} .

Пусть \mathcal{F} — фильтр на ω , и пусть $B_{\mathcal{F}}(\omega)$ — булева группа $B(\omega) = [\omega]^{<\omega}$ с топологией, в которой базу окрестностей нуля составляют подгруппы $\langle F \rangle$, порождённые множествами $F \in \mathcal{F}$.

Сирота

- ввёл определение рамсеевского (селективного) ультрафильтра на ω в эквивалентной форме;
- доказал, что из СН следует существование рамсеевского ультрафильтра;
- доказал, что если \mathcal{U} — рамсеевский ультрафильтр на ω , то топологическая группа $B_{\mathcal{U}}(\omega)$ экстремально несвязна.

Незамкнутые дискретные множества в группах

В группе Сироты $B_{\mathcal{N}}(\omega)$ есть счётное незамкнутое дискретное множество ω с единственной предельной точкой 0. В экстремально несвязном пространстве два таких множества не могут иметь общую предельную точку, поскольку экстремальная несвязность наследуется счётными подпространствами. Естественные вопросы:

- Существует ли модель ZFC, в которой всякая недискретная булева топологическая группа содержит непересекающиеся дискретные множества с общей единственной предельной точкой?
- Верно ли, что во всякой (счётной) недискретной топологической группе имеется дискретное подмножество с ровно одной предельной точкой?
- Существует ли недискретная счётная группа, в которой все дискретные подмножества замкнуты?

Определение

Скажем, что множество M в группе G **жирное**, если $1 \in M$ и $\exists m \in \mathbb{N}$ (**жирность** M) такое, что для любого m -элементного множества $F \subset G$ существуют различные $x, y \in F$ с тем свойством, что $x^{-1} \cdot y \in M$ и $y^{-1} \cdot x \in M$.

Примеры

- Любая подгруппа конечного индекса — жирное множество.
- Если $W \subset G$ и $W \cap W^{-1} \cdot W = \emptyset$, то $G \setminus W$ — жирное множество (и $m = 4$).

Теорема

В любой группе G семейство жирных множеств является фильтром на G .

Определение

Фильтр \mathcal{F} на ω — называется **Q-фильтром**, если каково бы ни было разбиение $\omega = \sqcup F_n$, где все F_n конечны, существует $A \in \mathcal{F}$ со свойством $|A \cap F_n| \leq 1$ для всех $n \in \omega$.

Определение

Фильтр \mathcal{F} на ω называется **быстрым** (или **слабым Q-фильтром**), если для любой функции $f: \omega \rightarrow \omega$ найдётся $A = \{a_0 < a_1 < \dots\} \in \mathcal{F}$ со свойством $a_n > f(n)$ для всех n .

Предложение

Фильтр \mathcal{F} быстрый \iff каково бы ни было разбиение $\omega = \sqcup F_n$, где все F_n конечны, существует $A \in \mathcal{F}$ со свойством $|A \cap F_n| < n$ для всех $n \in \omega$.

Замечание

Фильтр \mathcal{F} на ω небыстрый \iff для любой последовательности натуральных чисел $(m_n)_{n \in \omega}$ существует разбиение $\omega = \sqcup F_n$, где все F_n конечны, такое, что для всякого $A \in \mathcal{F}$ имеем $|A \cap F_n| > m_n$ при некотором n .

Теорема

Пусть G — счётная группа, \mathcal{F} — небыстрый свободный фильтр на G и $(M_n)_{n \in \omega}$ — последовательность жирных множеств.

Тогда существует множество $S \subset G \setminus \{1\}$ со свойствами

- 1 $S \setminus M_n$ конечно для всех n ;
- 2 во всяком $A \in \mathcal{F}$ найдутся различные $a, b \in A$ такие, что $a^{-1} \cdot b \in S$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $M_{n+1} \subset M_n$ и $M_n^{-1} = M_n$. Пусть m_n — жирность M_n . Фильтр \mathcal{F} небыстрый $\implies \exists$ последовательность $(F_n)_{n \in \omega}$ конечных подмножеств G с тем свойством, что для всякого $A \in \mathcal{F}$ имеем $|A \cap F_n| > m_n$ при некотором n . Положим

$$S_n = \{g^{-1} \cdot h : g, h \in F_n, g \neq h, g^{-1} \cdot h \in M_n\} \quad \text{и} \quad S = \bigcup S_n.$$

Проверим 1: множества S_k конечны, $S_k \subset M_k$, $M_{k+1} \subset M_k \implies S \setminus M_n \subset \bigcup_{k < n} S_k$ конечно для каждого n .

Проверим 2: Пусть $A \in \mathcal{F}$. Имеем $|A \cap F_n| > m_n$ для некоторого n . Множество M_n жирное, m_n — его жирность $\implies \exists$ различные $a, b \in A \cap F_n$, для которых $a^{-1} \cdot b \in M_n$. По определению $a^{-1} \cdot b \in S_n$. □

Следствие

Любая счётная недискретная топологическая группа G , в которой фильтр \mathcal{F} проколотых окрестностей единицы небыстрый, содержит незамкнутое дискретное множество с единственной предельной точкой 1.

Доказательство. Пусть $G = \{1, g_0, g_1, \dots, g_n, \dots\}$. Для каждого $n \in \omega$ возьмём окрестность единицы U_n такую, что $g_n \notin U_n$. Пусть V_n — открытая окрестность единицы, $V_n^{-1} \cdot V_n \cdot V_n^{-1} \subset U_n$. Тогда $g \cdot V_n \cap V_n^{-1} \cdot V_n = \emptyset$. Значит, множество $M_n = G \setminus (g_n \cdot V_n)$ жирное (и замкнутое), причём $\bigcap M_n = \{1\}$. Возьмем S как в теореме. Каждая точка $g \in G \setminus \{1\}$ не принадлежит некоторому $M_n \implies G \setminus M_n$ — её открытая окрестность, содержащая лишь конечное число точек из $S \implies$ множество S дискретно, и точки $g \neq 1$ не являются предельными для S . Для любой окрестности 1 U существует окрестность 1 V такая, что $V^{-1} \cdot V \subset U$, и любая окрестность содержит проколотую окрестность. Значит, любая окрестность 1 содержит $A^{-1} \cdot A$ для некоторого $A \in \mathcal{F} \implies$ пересекает S . □

Существует модель ZFC, в которой нет быстрых фильтров.

Следствие

С ZFC совместимо утверждение: любая счётная недискретная топологическая группа содержит незамкнутое дискретное множество, единственной предельной точкой которого является единица группы.

Теорема

Предположим, что не существует быстрых фильтров. Тогда в любой счётной недискретной булевой топологической группе содержатся два непересекающихся дискретных множества, единственной предельной точкой каждого из которых является 0.

Следствие

Несуществование счётных недискретных экстремально несвязных групп совместимо с ZFC.

Несчётные экстремально несвязные группы

Теорема

Пусть κ — любой кардинал и \mathcal{U} — рамсеевский ультрафильтр на κ . Тогда булева топологическая группа $B_{\mathcal{U}}(\kappa) = [\kappa]^{<\omega}$, в которой базу окрестностей нуля составляют подгруппы $\langle A \rangle$, $A \in \mathcal{U}$, экстремально несвязна.

Если ультрафильтр \mathcal{U} неглавный, то группа $B_{\mathcal{U}}(\kappa)$ неметризуема.

Рамсеевский ультрафильтр \mathcal{U} на κ неглавный и равномерный (все его элементы имеют мощность κ) $\iff \mathcal{U}$ нормален (замкнут относительно диагональных пересечений) и κ -полон. Следовательно, на κ существует неглавный рамсеевский ультрафильтр, все элементы которого несчётны, $\iff \kappa$ измерим.

Следствие

Если существует измеримый кардинал, то существует и неметризуемая экстремально несвязная группа.

На прямое обобщение теоремы о несуществовании недискретных счётных экстремально несвязных групп на регулярные несчётные кардиналы рассчитывать не приходится:

Предложение

Пусть κ — несчётный регулярный кардинал и $f: \kappa \rightarrow \kappa$ — функция с тем свойством, что прообраз $f^{-1}(\alpha)$ каждой точки $\alpha \in \kappa$ не стационарен. Тогда существует club C , сужение функции f на который инъективно.

Доказательство. Предположим, что множество $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ стационарно. Тогда по лемме Фодора существует стационарное множество $S \subset \kappa$, для которого $f|_S = \text{const}$, а это противоречит условию. Значит, $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ нестационарно, так что множество $A = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \geq \alpha\}$ содержит club. Множество $B = \{\alpha \in \kappa : f(\beta) < \alpha \text{ для всех } \beta < \alpha\}$ тоже содержит club по доказанной раньше теореме. Пусть C — club, $C \subset A \cap B$. Если $\alpha, \beta \in C$, $\alpha < \beta$, то $\beta \in B \implies f(\alpha) < \beta$ и $\beta \in A \implies f(\beta) \geq \beta$.



Можно придумать несколько естественных обобщений понятия Q -фильтра на несчётные кардиналы. Самое сильное: скажем, что фильтр \mathcal{F} на κ является κ - Q -фильтром, если каково бы ни было разбиение $\kappa = \sqcup F_\alpha$, $\alpha \in \kappa$, где $|F_\alpha| < \kappa$ для всех α , существует $A \in \mathcal{F}$ со свойством $|A \cap F_\alpha| \leq 1$ для всех $\alpha \in \kappa$.
Всякий κ - Q -фильтр является κ -быстрым фильтром (какое бы обобщение быстроты ни рассматривалось).

Все стационарные подмножества регулярного кардинала κ имеют мощность $\kappa \implies$

Следствие

Любой фильтр \mathcal{F} на регулярном несчётном кардинале κ , содержащий $\text{club}(\kappa)$, является неглавным κ - Q -фильтром.

Определение

Пусть $\mathbb{Q} = (Q, \leq_Q, \mathbf{1}_Q)$ и $\mathbb{R} = (R, \leq_R, \mathbf{1}_R)$ — частично упорядоченные множества. **Прямым произведением** $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ множеств \mathbb{Q} и \mathbb{R} называется частично упорядоченное множество $\mathbb{P} = (P, \leq_P, \mathbf{1})$, где $P = Q \times R$, $\mathbf{1} = (\mathbf{1}_Q, \mathbf{1}_R)$ а частичный порядок определяется так: $(q, r) \leq_P (q', r')$, если $q \leq_Q q'$ и $r \leq_R r'$. Наибольшим элементом множества \mathbb{P} является $\mathbf{1} = (\mathbf{1}_Q, \mathbf{1}_R)$.

Первая теорема о произведении

Пусть M — СТМ, \mathbb{Q} и \mathbb{R} — частично упорядоченные множества, $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ и G — \mathbb{P} -генерическое множество над M . Пусть

$$H = \{q \in Q : \exists r \in R((q, r) \in G)\},$$

$$K = \{r \in R : \exists q \in Q((q, r) \in G)\}.$$

Тогда H — \mathbb{Q} -генерическое множество над M , K — \mathbb{R} -генерическое множество над $M[H]$ и $G = H \times K$.

Доказательство. Если $(q, r) \in G$, то $(\mathbf{1}_Q, r), (q, \mathbf{1}_Q) \in G$ (так как они больше (q, r)). Значит,

$$H = \{q \in Q : (q, \mathbf{1}_R) \in G\} \quad \text{и} \quad K = \{r \in R : (\mathbf{1}_Q, r) \in G\}.$$

Докажем, что H \mathbb{Q} -генерическое над M . Пусть $D \in M$ плотно в \mathbb{Q} . Тогда $D \times R$ плотно в \mathbb{P} . Значит, $\exists (q, r) \in (D \times R) \cap G$. Имеем $q \in D \cap H$.

Докажем, что K \mathbb{R} -генерическое над $M[G]$. Пусть $D \in M[G]$ плотно в \mathbb{R} , и пусть τ — \mathbb{Q} -имя, для которого $D = \tau_H$. Некоторое условие $q_0 \in P$ вынуждает, что τ плотно. Положим

$$E = \{(q, r) : (q \leq_Q q_0) \wedge (q \Vdash \check{r} \in \tau)\}$$

($E \in M$ по теореме об определимости). Покажем, что E плотно ниже $(q_0, \mathbf{1}_R)$ в \mathbb{P} .

Если $(q, r) \leq (q_0, \mathbf{1}_R)$, то $q \Vdash (\tau \text{ плотно в } \check{\mathbb{R}})$, откуда

$$q \Vdash \exists x \in \check{R} ((\text{УПОР.ПАРА}(x, \check{r}) \in \check{\check{R}}) \wedge (x \in \tau))$$

(здесь УПОР.ПАРА(имя, имя) — имя, которое всегда интерпретируется как упорядоченная пара интерпретаций имён в скобках).

Значит, существуют $q' \leq_Q q$ и $\sigma \in \text{dom } \check{R}$ такие, что

$$q' \Vdash ((\text{УПОР.ПАРА}(\check{r}', \check{r}) \in \check{\xi}_R) \wedge (\sigma \in \tau))$$

\implies существуют $q' \leq_Q q$ и $r' \in R$, для которых

$$q' \Vdash \text{УПОР.ПАРА}(\check{r}', \check{r}) \in \check{\xi}_R \text{ и } q' \Vdash \check{r}' \in \tau,$$

т.е. $r' \leq_R r$ и $q' \Vdash \check{r}' \in \tau$, откуда $(q', r') \leq_P (q, r)$ и $(q', r') \in E$.

Лемма (1) $\implies \exists (q, r) \in E \cap G$. Имеем $r \in K$, а поскольку $q \Vdash \check{r} \in \tau$, имеем также $r \in D$. Значит, $K \cap D \neq \emptyset$. Мы доказали, что K — \mathbb{R} -генерическое множество.

Покажем, что $H \times K = G$. Если $q \in H$ и $r \in K$, то $p_0 = (q, \mathbf{1}_R)$ и $p_1 = (\mathbf{1}_Q, r)$ принадлежат G , так что $\exists p' = (q', r') \in G$ такое, что $p' \leq_P p_0, p_1$. Ясно, что $(q, r) \geq_P p'$. Значит, $(q, r) \in G$. \square

Верна и обратная теорема: если H — \mathbb{Q} -генерическое множество над M и K — \mathbb{R} -генерическое множество над $M[H]$, то $H \times K$ — \mathbb{P} -генерическое множество над M .

Эти теоремы позволяют сводить однократное генерическое расширение к двукратному и наоборот в случае, когда $\mathbb{R} \in M$. Они применимы и к бесконечнократным расширениям.

В случае $\mathbb{R} \in M[H] \setminus M$ верна модификация первой теоремы о произведении, но она доказывается значительно сложнее.

В применении итерированного форсинга ключевую роль играет следующая лемма. В ней λ -замкнутость означает, что любая убывающая последовательность длины $\leq \lambda$ имеет нижнюю грань, а κ -условие антицепей — отсутствие антицепей (множеств попарно несовместимых элементов) мощности $\geq \kappa$.

Лемма о сохранении кардиналов при двукратном расширении

Пусть частично упорядоченные множества \mathbb{Q} и \mathbb{R} принадлежат СТМ M , $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ и κ — кардинал в M . Предположим, что

$$M \models (\kappa \text{ регулярен} \wedge \forall \lambda < \kappa (\mathbb{Q} \ \lambda\text{-замкнуто}) \wedge \\ \wedge \mathbb{R} \text{ удовлетворяет } \kappa\text{-условию антицепей})$$

Тогда $\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \models (\check{\kappa} \text{ — кардинал})$ (т.е. κ остаётся кардиналом в любом \mathbb{P} -генерическом расширении M).

Теорема (об обратном неравенстве)

Пусть M — СТМ, $\mathbb{P} \in M$ — ч.у.м. и κ , λ , μ и ν — кардиналы в M . Предположим, что

$$M \models ((\nu = \kappa^{\lambda\mu}) \wedge (|P| = \kappa) \wedge (\mathbb{P} \text{ уд-ет } \lambda^+\text{-условию антицепей})).$$

Тогда $\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \models 2^{\check{\mu}} \leq \check{\nu}$.

Теорема Истона

Существует СТМ, в которой $2^{\omega_n} = \omega_{n+2}$ для всех $n \in \omega$.

Доказательство. Для каждого $n \in \omega$ рассмотрим множество

$$P_n = \{p : p \text{ — функция } \wedge \text{dom } p \subset \omega_{n+2} \times \omega_n \wedge \text{ran } p \subset \{0, 1\} \wedge \\ \wedge |\text{dom } p| < \omega_n\},$$

упорядоченное обратнo включению. Положим

$$Q_n = \{(p_0, p_1, \dots, p_n) : p_i \in P_i \text{ для } i \leq n\},$$

$$Q^n = \{(p_{n+1}, p_{n+2}, \dots) : p_i \in P_i \text{ для } i > n\}.$$

Упорядочим множества Q_n и Q^n покомпонентно:

$(p_0, \dots, p_n) \leq (p'_0, \dots, p'_n)$ в Q_n , если $p_i \leq p'_i$ в P_i для всех $i \leq n$, и аналогично для Q^n .

Если верна GCH ($2^\lambda = \lambda^+$ для всех кардиналов λ), то каждое Q_n удовлетворяет ω_{n+1} -условию антицепей (это доказывается так же, как то, что коэновское множество удовлетворяет у.с.ц., с использованием общей леммы о Δ -системе), а каждое множество Q^n ω_n -замкнуто (очевидно). Ясно, что множества $Q_n \otimes Q^n$ и $Q_m \otimes Q^m$ порядково изоморфны для всех n и m . Множество $Q_0 \otimes Q^0$ называется *частично упорядоченным множеством Истона*.

Пусть M — СТМ, $M \models \text{GCH}$, \mathbb{P} — ч.у.м. Истопа и G — генерическое множество. Поскольку ч.у.м. Истопа изоморфно всем $\mathbb{Q}_n \otimes \mathbb{Q}^n$, лемма о сохранении кардиналов при двукратном расширении \implies все кардиналы модели M сохраняются в $M[G]$. Нетрудно показать, что множество $\{q \in P_n : q \text{ — } n\text{-я компонента некоторого } p \in G\}$ порождает семейство мощности ω_{n+2} подмножеств ω_n (по аналогии с доказательством $\neg\text{CH}$ в коэновской модели).

Таким образом, $M[G] \models 2^{\omega_n} \geq \omega_{n+2}$ для всех $n \in \omega$. Покажем, что имеет место равенство. Возьмём $n \in \omega$. Положим $\lambda = \omega_n^M$ и $\kappa = \omega_{n+2}^M$. Это кардиналы в $M[G]$.

Представим модель $M[G]$ в виде $M[G^n][G_n]$, где

$$G_n = \{(p_0, p_1, \dots, p_n) : (p_0, p_1, \dots) \in G\},$$

$$G^n = \{(p_{n+1}, p_{n+2}, \dots) : (p_0, p_1, \dots) \in G\}.$$

Поскольку \mathbb{Q}^n λ -замкнуто в M , из общей второй теоремы о сохранении кардиналов (которая формулируется и доказывается для всех кардиналов точно так же, как для ω) следует, что каждое множество $X \subset \kappa$, которое принадлежит модели $M[G^n]$ и имеет мощность λ в $M[G^n]$, принадлежит исходной модели M и имеет в ней мощность λ .

Вывод 1: Если $Q' \in M[G^n]$ таково, что $M[G^n] \models (Q' \text{ — ч.у.м. Истоны})$ и $Q' = Q'_n \otimes Q'^n$ внутри $M[G^n]$, то $Q'_n = Q_n$. Следовательно, ч.у.м. Q_n удовлетворяет λ^+ -условию антицепей в $M[G^n]$ (и при этом $\lambda^+ = \omega_{n+1}^M = \omega_{n+1}^{M[G]}$).

Вывод 2: $(\kappa^\lambda)^{M[G]} = (\kappa^\lambda)^M = \kappa$.

Следовательно, к модели $M[G^n]$ и ч.у.м. $Q_n \in M[G^n]$ применима теорема об обратном неравенстве с $\nu = \kappa$ и $\mu = \lambda$.

Она даёт

$$M[G^n][G_n] \models 2^\lambda \leq \kappa,$$

что и требовалось. □

Булевозначные модели

Рассмотрим *все возможные утверждения* языка теории множеств, а потом решим, какие из них для нас желательны. Выбор должен подчиняться естественным ограничениям: например, если φ и ψ выполняются, то $\varphi \wedge \psi$ тоже должно выполняться и т.п. Естественный инструмент для их отслеживания — булева алгебра.

Определение

Булева алгебра — это непустое множество B с двумя бинарными операциями \vee (супремум) и \wedge (инфимум), одной унарной операцией \neg (дополнение) и двумя выделенными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, удовлетворяющими аксиомам: $\forall a, b, c \in B$

$$\begin{aligned} a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c & a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c \\ a \vee b &= b \vee a & a \wedge b &= b \wedge a & a \vee (a \wedge b) &= a & a \wedge (a \vee b) &= a \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) & a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee \mathbf{0} &= a & a \wedge \mathbf{1} &= a & a \vee \neg a &= \mathbf{1} & a \wedge \neg a &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

На любой булевой алгебре имеется естественный частичный порядок: $a \leq b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.

Построение булевозначной модели $M^{\mathbb{B}}$

Имеется естественное соответствие между операциями \vee , \wedge и \neg в булевой алгебре и логике, а также между элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ булевой алгебры и значениями И («истина») и Л («ложь») истинностных оценок высказываний.

Предположим, что мы хотим, чтобы некоторые высказывания были истинны и не уверены насчёт других. Зафиксируем наше частичное знание выбором подходящей булевой алгебры \mathbb{B} и отображением каждого высказывания φ в некоторый элемент $[\varphi]^{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}$. Если φ совершенно точно истинно (например, это аксиома ZFC), полагаем $[\varphi]^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$, а если совершенно точно ложно — полагаем $[\varphi]^{\mathbb{B}} = \mathbf{0}$. В остальных случаях $[\varphi]^{\mathbb{B}}$ принимает «нечёткие» значения (из \mathbb{B}).

Ясно, что отображение $\varphi \mapsto [\varphi]^{\mathbb{B}}$ должно удовлетворять условиям

- 1 $[\varphi \vee \psi]^{\mathbb{B}} = [\varphi]^{\mathbb{B}} \vee [\psi]^{\mathbb{B}}$
- 2 $[\varphi \wedge \psi]^{\mathbb{B}} = [\varphi]^{\mathbb{B}} \wedge [\psi]^{\mathbb{B}}$
- 3 $[\neg\varphi]^{\mathbb{B}} = \neg[\varphi]^{\mathbb{B}}$

(отсюда вытекает, что $[\varphi \rightarrow \psi]^{\mathbb{B}} = [\varphi]^{\mathbb{B}} \rightarrow [\psi]^{\mathbb{B}}$).

В теории множеств атомными формулами являются $\llbracket x = y \rrbracket^{\mathbb{B}}$ и $\llbracket x \in y \rrbracket^{\mathbb{B}} \implies$ придётся рассматривать «нечёткие множества».

Обычное множество можно отождествить с функцией, принимающей значения в тривиальной булевой алгебре $\{0, 1\}$, которая отображает элементы множества (которые тоже являются множествами) в 1 , а не элементы — в 0 . В случае произвольной \mathbb{B} «нечёткое множество» x состоит из «потенциальных элементов» (которые тоже являются «нечёткими множествами») и отождествляется с функцией, которая переводит каждый «потенциальный элемент» y в элемент булевой алгебры \mathbb{B} , соответствующий «степени принадлежности» элемента y множеству x . Таким образом, будем рассматривать **\mathbb{B} -значные множества** — функции из множества \mathbb{B} -значных множеств в \mathbb{B} .

Начнём с модели ZFC M . Зафиксируем соответствие $\varphi \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathbb{B}}$ (удовлетворяющее условиям типа ①–③ и переводящее аксиомы ZFC в 1) и обозначим множество всех \mathbb{B} -значных множеств в M через $M^{\mathbb{B}}$. Получившаяся структура называется **булевозначной моделью ZFC**. Чтобы превратить её в настоящую модель, нужно будет избавиться от нечёткости. Это достигается факторизацией $M^{\mathbb{B}}$ по ультрафильтру.

Чтобы полностью определить соответствие $\varphi \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathbb{B}}$, нужно определить его для атомных формул и понять, что происходит при соединении атомов в более сложные формулы с помощью логических связок и кванторов \exists и \forall (у которых нет прямых аналогов в формализме булевых алгебр). Объединение при помощи связок подчиняется условиям ①–③. Рассмотрим \exists .

Существование x , для которого имеет место $\varphi(x)$, можно выразить так: «либо $\varphi(a)$, либо $\varphi(b)$, либо $\varphi(c)$, ...» (надо перечислить все элементы вселенной). Таким образом, следует положить

$$\textcircled{4} \quad \llbracket \exists x \varphi(x) \rrbracket^{\mathbb{B}} = \bigvee_{a \in M^{\mathbb{B}}} \llbracket \varphi(a) \rrbracket^{\mathbb{B}}$$

и, аналогично,

$$\textcircled{5} \quad \llbracket \forall x \varphi(x) \rrbracket^{\mathbb{B}} = \bigwedge_{a \in M^{\mathbb{B}}} \llbracket \varphi(a) \rrbracket^{\mathbb{B}}.$$

Чтобы эти определения имели смысл, нужно потребовать, чтобы булева алгебра \mathbb{B} была **полной**, т.е. чтобы для любого (настоящего) множества $X \subset B$ были определены $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ (считается, что $\bigvee \emptyset = \mathbf{0}$ и $\bigwedge \emptyset = \mathbf{1}$).

Осталось позаботиться об атомах $\llbracket x \in y \rrbracket^{\mathbb{B}}$ и $\llbracket x = y \rrbracket^{\mathbb{B}}$.

Во-первых, мы хотим, чтобы выполнялась аксиома объёмности, т.е.

$$\llbracket x = y \rrbracket^{\mathbb{B}} = \llbracket \forall z((z \in x) \rightarrow (z \in y)) \wedge \forall z((z \in y) \rightarrow (z \in x)) \rrbracket^{\mathbb{B}}.$$

Другая разумная формула —

$$\llbracket x \in y \rrbracket^{\mathbb{B}} = \llbracket \exists z((z \in y) \wedge (z = x)) \rrbracket^{\mathbb{B}}.$$

Естественно также потребовать, чтобы выражение $\llbracket \exists z((z \in x) \wedge \varphi(z)) \rrbracket^{\mathbb{B}}$ зависело от значений $\llbracket \varphi(z) \rrbracket^{\mathbb{B}}$ только для тех z , которые и в самом деле принадлежат области определения $\text{dom } x$ \mathbb{B} -значного множества x , причём значение $\llbracket z \in x \rrbracket^{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}$ должно быть тесно связано со значением $x(z) \in \mathbb{B}$ (напомним, что x — \mathbb{B} -значная функция от \mathbb{B} -значных функций). Приходим к требованиям

$$\llbracket \exists z((z \in x) \wedge (\varphi(z))) \rrbracket^{\mathbb{B}} = \bigvee_{z \in \text{dom } x} (x(z) \wedge \llbracket \varphi(z) \rrbracket^{\mathbb{B}})$$

и

$$\llbracket \forall z((z \in x) \rightarrow (\varphi(z))) \rrbracket^{\mathbb{B}} = \bigwedge_{z \in \text{dom } x} (x(z) \rightarrow \llbracket \varphi(z) \rrbracket^{\mathbb{B}}).$$

Все эти выражения приводят к определениям

$$\textcircled{6} \quad [x \in y]^{\mathbb{B}} = \bigvee_{z \in \text{dom } y} (y(z) \wedge [x = z]^{\mathbb{B}})$$

$$\textcircled{7} \quad [x = y]^{\mathbb{B}} = \bigwedge_{z \in \text{dom } y} (x(z) \rightarrow [z \in y]^{\mathbb{B}}) \wedge \bigwedge_{z \in \text{dom } x} (y(z) \rightarrow [z \in x]^{\mathbb{B}})$$

Это индуктивные определения по аналогу ранга для булевозначных множеств.

Требование выполнения аксиом ZFC в $M^{\mathbb{B}}$ накладывает дополнительные ограничения на \mathbb{B} . В качестве примера рассмотрим аксиому множества подмножеств. Для данного «нечёткого множества» x в $M^{\mathbb{B}}$ естественно определить «множество» y всех его подмножеств в $M^{\mathbb{B}}$, полагая

$$\text{dom } y = \mathbb{B}^{\text{dom } x}$$

т.е. определяя «потенциальные элементы» y как отображения $\text{dom } x \rightarrow \mathbb{B}$. При этом для каждого $z \in \text{dom } y$ должно выполняться условие $[z \subset x]^{\mathbb{B}}$. Однако если алгебра \mathbb{B} не принадлежит модели M , то отображения из $\text{dom } x$ в \mathbb{B} не обязательно являются \mathbb{B} -значными множествами. Поэтому будем требовать, чтобы \mathbb{B} принадлежала M . Вместо полноты алгебры \mathbb{B} достаточно требовать, чтобы она была полна в M , т.е. чтобы $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ существовали для $X \subset B$ из M .

Определение

Пусть M — модель ZFC. Предположим, что $\mathbb{B} \in M$ — полная (в M) булева алгебра и $[\cdot]^{\mathbb{B}}$ — отображение из множества всех формул языка теории множеств в \mathbb{B} , удовлетворяющее условиям ①–⑦. Множество $M^{\mathbb{B}}$ всех \mathbb{B} -значных множеств в M вместе с соответствием $[\cdot]^{\mathbb{B}}$ называется **булевозначной моделью** теории множеств.

Осталось проверить, что в $M^{\mathbb{B}}$ выполнены аксиомы ZFC (т.е. для всякой аксиомы φ имеем $[\varphi]^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$), и что правила логического вывода работают в $M^{\mathbb{B}}$ должным образом (т.е. что если $[\varphi]^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$ и ψ — логическое следствие формулы φ , то $[\psi]^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$). Проверка несложная, хотя в некоторых случаях требует длинных выкладок. Она подробно проведена в книге John L. Bell, *Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2005).

Факторизация по ультрафильтру

Булевозначная модель $M^{\mathbb{B}}$ превращается в обычную модель ZFC с помощью факторизации.

Выберем множество $U \subset B$ (возможно, $U \notin M$), которое содержит образы $[\varphi]^{\mathbb{B}}$ тех утверждений, истинности которых мы добиваемся; оно будет играть роль истинностной оценки, так что для произвольного φ U должно содержать либо $[\varphi]^{\mathbb{B}}$, либо $\neg[\varphi]^{\mathbb{B}}$. Другими словами, для любого $x \in B$ должно быть либо $x \in U$, либо $\neg x \in U$ (\neg в смысле \mathbb{B}). Кроме того, поскольку мы хотим трактовать принадлежность множеству U как истинность, должны выполняться условия:

- 1 $1 \in U$
- 2 $0 \notin U$
- 3 если $x \in U$ и $y \in U$, то $x \wedge y \in U$
- 4 если $x \in U$ и $x \leq y$ (т.е. $x \wedge y = x$), то $y \in U$
- 5 для каждого $x \in B$ либо $x \in U$, либо $\neg x \in U$

Подмножество булевой алгебры (и любого ч.у.м.) с этими свойствами называется **ультрафильтром** (а со свойствами 1–4 — **фильтром**; всякий фильтр содержится в ультрафильтре).

После того как выбран ультрафильтр U , строится фактормодель $M^{\mathbb{B}}/U$. Её элементы — классы эквивалентности элементов $M^{\mathbb{B}}$ относительно отношения эквивалентности

$$x \sim_U y \iff [x = y]^{\mathbb{B}} \in U.$$

Класс эквивалентности элемента $x \in M^{\mathbb{B}}$ будем обозначать x^U . На $M^{\mathbb{B}}/U$ возникает предикат \in_U :

$$x^U \in_U y^U \iff [x \in y]^{\mathbb{B}} \in U.$$

$M^{\mathbb{B}}/U$ с этим предикатом — модель ZFC.

Модель $M^{\mathbb{B}}/U$ не обязана быть стандартной (роль отношения принадлежности играет \in_U). Чтобы получить СТМ, нужно начать с СТМ M и в качестве U взять *генерический* ультрафильтр, т.е. ультрафильтр, являющийся генерическим множеством в B . Модель $M^{\mathbb{B}}/U$, которая получается в результате, обычно обозначается $M[U]$.

Имеется стандартная процедура пополнения любого ч.у.м. до полной булевой алгебры. Таким образом, чтобы построить СТМ, в которой нарушается CH, достаточно взять счётную СТМ M , коэновское ч.у.м. $\mathbb{P} \in M$, пополнить \mathbb{P} до полной (в M) булевой алгебры $\mathbb{B} \in M$ и факторизовать $M^{\mathbb{B}}$ по генерическому ультрафильтру $U \subset B$ ($U \notin M$).

Причём тут вынуждение

Заметим, что ультрафильтр U выполняет сразу две функции: это генерическое множество, добавляемое к M , и список высказываний, истинных в $M[U]$. По определению ультрафильтра если $p \leq [\varphi]^{\mathbb{B}}$, то высказывание φ должно быть истинным в $M[U]$ для любого ультрафильтра $U \ni p$, так что отношение $p \Vdash \varphi$ можно формально определить так:

$$p \Vdash \varphi, \quad \text{если} \quad p \leq [\varphi]^{\mathbb{B}}.$$

Таким образом, при булевозначном подходе можно обойтись вообще без символа \Vdash .

Булевозначный и коэновский подходы более или менее равноценны. Имена и интерпретации в коэновском подходе — аналог «нечётких множеств» и факторизации. Определение отношения \Vdash^* соответствует определению соответствия $[\cdot]^{\mathbb{B}}$ формулами ①–⑦. Эти формулы проще формул в определении \Vdash , зато в коэновском подходе можно иметь дело непосредственно с частично упорядоченными множествами и генерическими фильтрами, не пополняя их до булевых алгебр и ультрафильтров.