

Квазитопологические алгебры

Квазитопологические алгебры

Опр.
раздельно
непрерывности

Напомним, что отображение $f: X^n \rightarrow X$ (где X — топологическое пространство) называется раздельно непрерывной по i -й переменной (где $i \leq n$), если для любых $x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0 \in X$ отображение $f_i: X \rightarrow X$, определенное правилом $f_i(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$ непрерывно. Отображение, раздельно непрерывное по всем переменным, называется просто раздельно непрерывным.

Опр.
квазитопологич.
алгебры

Мы будем называть универсальную Σ -алгебру A с топологией квазитопологической, если все операции $\sigma: A^n \rightarrow A$, $\sigma \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, раздельно непрерывны относительно этой топологии.

Многообразие (полное многообразие, широкое многообразие) квазитопологических алгебр определяется дословно так же, как и в случае топологических алгебр. Определение свободной квазитопологической алгебры данного топ. пр-ва в данном многообразии и доказательство её существования тоже дословно повторяют соответствующее определение и доказательство для топ. алгебр, поскольку от свойства непрерывности операции там требуется только, чтобы оно сохранялось при переходе к топологическим произведениям алгебр и подалгебрам, а раздельная непрерывность, очевидно, сохраняемая при этих переходах.

Опр. Свободная квазитопологическая алгебра топ. пр-ва X в многообразии $\mathcal{V}$ квазитоп. алгебр — это алгебра $F_{\mathcal{V}}^X(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непр. отображ. $i_X^*: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^X(X)$ т.е. то

- $F_{\mathcal{V}}^X(X)$ порождается множеством $i_X^*(X)$;
- $\forall$ непр. $f: X \rightarrow A \in \mathcal{V} \exists$ непр. гом. $f: F_{\mathcal{V}}^X(X) \rightarrow A$ такой, что $f = f \circ i_X^*$.

Дословно так же, как в топологическом случае, доказывалось, что непр. отображ. $i_X^*: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^X(X)$ инъективно (если многообразие $\mathcal{V}$ не тривиально), так это можно считать, что множество X содержится в $F_{\mathcal{V}}^X(X)$ как подмногообразие, только топология, которая индуцируется на ней из алгебры $F_{\mathcal{V}}^X(X)$, а не заданной топологии пр-ва X . При этом сама алгебра $F_{\mathcal{V}}^X(X)$ гомеоморфна абстрактной свободной алгебре и её топология — самая сильная из всех топологий, относительно которых все операции раздельно непрерывны и которые индуцируют на X топологию, содержащуюся в заданной топологии пр-ва X .

Прежде чем переходить к свойствам квазитопологических алгебр, рассмотрим св-ва раздельно непрерывных отображений топологических пространств.

Раздельно непрерывные отображения

Кросс-топология на $X \times Y$.

Опр.
Кросс-топология

Пусть X и Y — топ. пр-ва. Через $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ и $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ будем обозначать естественные отображения крестовины. Кросс-топология на декартовом произведении $X \times Y$ состоит из всех м-в $U \subset X \times Y$ с тем свойством, что $\pi_1(U \cap (X \times \{y\}))$ открыто в X для всех $y \in Y$ и $\pi_2(U \cap (\{x\} \times Y))$ открыто в Y для всех $x \in X$. Множество $X \times Y$ с кросс-топологией называется кросс-произведением топ. пр-в X и Y и обозначается $X \otimes Y$.

Легко понять, что $U \subset X \otimes Y$ открыто $\Leftrightarrow$ каждая точка $(x, y) \in U$ содержится в U вместе с "крестиком" $\{x\} \times V \cup W \times \{y\}$, где V и W открыты в Y и X соответственно. Пример подмногообразия плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, открытого в кросс-топологии, но не открытого в обычной топологии:



Декартово произведение $X \times Y$ можно представить как $\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$ или как $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y$. Рассмотрим топологическую сумму всех этих слагаемых и её естественное отображение на $X \times Y$:

$$f^*: \bigoplus_{y \in Y} X \times \{y\} \oplus \bigoplus_{x \in X} \{x\} \times Y \rightarrow X \times Y;$$

каждой точке (x, y) , рассматриваемой как элемент одного из слагаемых $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times Y$, это отображение ставит в соответствие эту же точку (x, y) , но рассматриваемую как элемент мн-ва $X \times Y$. Из определения кросс-топологии ясно, что кросс-топология — это фактортопология на $X \times Y$, соответствующая отображению f^* , т.е. самая слабая топология, относительно которой f^* непрерывно ($U \subset X \times Y$ открыто $\Leftrightarrow f^{*-1}(U)$ открыто в $\bigoplus X \times \{y\} \oplus \bigoplus \{x\} \times Y$, т.е. пересечения мн-ва $f^{*-1}(U)$ со всеми слагаемыми открыты).

Лемма Пусть $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ и $h: X \rightarrow Z$ — отображения, топ. пр-ва, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

коммутативна. Если отображение h непрерывно, а f факторно, то g непрерывно.

□ Для $U \subset Z$ имеем $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Поскольку h непрерывно, из открытости U вытекает открытость множества $f^{-1}(g^{-1}(U))$, а поскольку f факторно, из открытости этого множества вытекает открытость прообраза $g^{-1}(U)$.

Предг. Отображение $\varphi: X \times Y \rightarrow Z$ раздельно непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно как отображение $X \oplus Y \rightarrow Z$.

□ Из определения раздельной непрерывности видно, что φ раздельно непрерывно $\Leftrightarrow \varphi \circ f^*: \bigoplus_{y \in Y} X \times \{y\} \oplus \bigoplus_{x \in X} \{x\} \times Y \rightarrow Z$ непрерывно. Значит, по доказанной лемме из факторности отображения f^* вытекает непрерывность отображения $\varphi: X \oplus Y \rightarrow Z$. Обратно, из непрерывности отображения $f^*: \bigoplus_{y \in Y} X \times \{y\} \oplus \bigoplus_{x \in X} \{x\} \times Y \rightarrow X \oplus Y$ и $\varphi: X \oplus Y \rightarrow Z$ вытекает непрерывность их композиции $\varphi \circ f^*$, а она равносильна раздельной непрерывности отображения φ .

Предг. Если отображения $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ и $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ непрерывны, то непрерывно и их кросс-произведение $f_1 \otimes f_2: X_1 \otimes X_2 \rightarrow Y_1 \otimes Y_2$ (определённое тем же правилом $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$, что и обычное декартово произведение отображений). Если отображения f_1 и f_2 факторны, то факторно и их кросс-произведение.

□ Рассмотрим отображение $F^*: \bigoplus_{x_1 \in X_1} X_1 \times \{x_2\} \oplus \bigoplus_{x_2 \in X_2} \{x_1\} \times X_2 \rightarrow \bigoplus_{y_1 \in Y_1} Y_1 \times \{y_2\} \oplus \bigoplus_{y_2 \in Y_2} \{y_1\} \times Y_2$, определённое своим сужением на слагаемые самым естественным образом:

$$F^*|_{X_1 \times \{x_2\}} = f_1 \otimes f_2|_{X_1 \times \{x_2\}}, \quad F^*|_{\{x_1\} \times X_2} = f_1 \otimes f_2|_{\{x_1\} \times X_2}.$$

По существу сужение $f_1 \otimes f_2$ на $X_1 \times \{x_2\}$ — не что иное, как отображение f_1 ; действительно, каждой точке $(x, x_2) \in X_1 \times \{x_2\}$ оно ставит в соответствие $(f_1(x), f_2(x_2))$, при этом $f_2(x_2)$ фиксировано. То же верно для $f_1 \otimes f_2|_{\{x_1\} \times X_2}$ (по существу это отображение f_2). Следовательно, сужение от-я F^* на каждое слагаемое непрерывно (при условии непрерывности от-я f_1 и f_2), поэтому F^* непрерывно (так как все слагаемые открыто-замкнуты).

Предположим, что f_1 и f_2 факторны. Покажем, что тогда и F^* факторно. Пусть $U \subset \bigoplus_{y_1 \in Y_1} Y_1 \times \{y_2\} \oplus \bigoplus_{y_2 \in Y_2} \{y_1\} \times Y_2$ и $F^{*-1}(U)$ открыто. Это означает, что $\forall x_2 \in X_2$ $F^{*-1}(U) \cap X_1 \times \{x_2\}$ открыто и $\forall x_1 \in X_1$ $F^{*-1}(U) \cap \{x_1\} \times X_2$ открыто.

Заметим, что
 $F^{*-1}(U) \cap X_1 \times \{x_2\} =$
 $= f_1^{-1}(\pi_1(U \cap Y_1 \times \{x_2\})) \times \{x_2\}.$

Из факторности отображения f_1 следует, что $\pi_1(U \cap Y_1 \times \{x_2\})$ открыто для любого $x_2 \in X_2$.

т.е. $\pi_1(U \cap Y_1 \times \{y_2\})$ открыто для любого $y_2 \in Y_2$. Из аналогичных соображений $\pi_2(U \cap \{y_1\} \times Y_2)$ открыто для любого $y_1 \in Y_1$. Значит $U \cap \{y_1\} \times Y_2$ открыто в $\{y_1\} \times Y_2$ для всех $y_1 \in Y_1$. Это означает, что U открыто в $\bigoplus_{y_1 \in Y_1} Y_1 \times \{y_2\} \oplus \bigoplus_{y_2 \in Y_2} \{y_1\} \times Y_2$. Следовательно, F^* факторно.

Из факторности естественного отображения f_x^* вытекает, что композиция $f_y^* \circ F^* = f_y \circ f_2 \circ f_x^*$ факторна, а из непрерывности отображения f_x^* — что $f_y \circ f_2$ факторно: если $(f_y \circ f_2)^{-1}(U)$ открыто, то $f_x^{*-1}((f_y \circ f_2)^{-1}(U))$ открыто, и из факторности отображения $f_y^* \circ F^*$ следует, что U открыто, потому что $f_x^{*-1}((f_y \circ f_2)^{-1}(U)) = (f_y^* \circ F^*)^{-1}(U)$. Отсюда вытекает, что $f_y \circ f_2$

факторно.

Из факторности декартова произведения факторных отображений проистекают многочисленные преимущества и вычислительных алгебр перед топологическими. Например, верна следующая теорема.

[Т.] Пусть A — квазитопологическая алгебра, $\sim$ — конгруэнция на A и B — факторалгебра $A/\sim$ с фактортопологией относительно естественного гомоморфизма $h: A \rightarrow B$. Тогда B является квазитопологической алгеброй, т.е. операции на B раздельно непрерывны.

Зам. В случае топ. алгебр это не так — см. пример на с. 35.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x_1 \in X_1} X_1 \times \{x_2\} \oplus \bigoplus_{x_2 \in X_2} \{y_1\} \times Y_2 & \xrightarrow{F^*} & \bigoplus_{y_1 \in Y_1} Y_1 \times \{y_2\} \oplus \bigoplus_{y_2 \in Y_2} \{y_1\} \times Y_2 \\ f_x^* \downarrow & & \downarrow f_y^* \\ X_1 \otimes X_2 & \xrightarrow{f_1 \otimes f_2} & Y_1 \otimes Y_2 \end{array}$$

Здесь f_x^* и f_y^* — естественные отображения для произведений $X_1 \otimes X_2$ и $Y_1 \otimes Y_2$ (определённые выше).

□ Пусть $\sigma \in \Sigma_j$, $\sigma^A: A^j \rightarrow A$ и $\sigma^B: B^j \rightarrow B$ — соответствующие операции на A и B и $h: A \rightarrow B$ — факторный гомоморфизм. Нужно показать, что отображение σ^B раздельно непрерывно, т.е. $\sigma^B: B^{\otimes j} \rightarrow B$ непрерывно. Имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes j} & \xrightarrow{\sigma^A} & A \\ h^{\otimes j} \downarrow & & \downarrow h \\ B^{\otimes j} & \xrightarrow{\sigma^B} & B \end{array}$$

Пусть $U \subset B$ открыто. Тогда $(h \circ \sigma^A)^{-1}(U)$ открыто в A , т.е. h и σ^A непрерывны. (σ^A непрерывно относительно крос-топологии).

Поскольку диаграмма коммутативна, $(h \circ \sigma^A)^{-1}(U) = (h^{\otimes j})^{-1}(\sigma^{B^{-1}}(U))$, поэтому из того, что $h^{\otimes j}$ факторно (по доказанному предположению), следует, что $\sigma^{B^{-1}}(U)$ открыто в $B^{\otimes j}$, а это и требуется.

Здесь и ниже
верхний индекс
обозначает
степень,
а указывается,
что речь идет
о квазитоп-
алгебрах.

Абсолютно свободная квазитопологическая алгебра

Пусть X — топ. н-о. Тогда существует абсолютно свободная квазитоп. алгебра $W^q(X)$, и она изоморфна алгебре термов $T(X)$ (как абстрактная алгебра).

Напомним, что $\Sigma = \bigcup_{j \in \omega} \Sigma_j$. Будем строить $W^q(X)$ в соответствии с определением терма точно так же, как в случае топологических алгебр, но с заменой произведения крос-произведением. На нулевой и первом шагах берем соответственно, мн-во Σ_0 , стандартное дискретной топологии, и пр-во X , т.е. полагаем

$$W_0^q(X) = \Sigma_0 \text{ и } W_1^q(X) = X.$$

Эти пр-ва являются символами констант и 0-арными операциями (т.е. термами нулевой степени). Обозначим через Φ^0 тождественное отображение $W_0^q(X) \rightarrow T_0(X) = \Sigma_0$, а через Φ^1 — тождественное отображение $W_1^q(X) \rightarrow T_1(X) = X$.

На втором шаге для каждого $j \in \omega$, каждого $\sigma \in \Sigma_j$ и каждого набора $(k_1, \dots, k_j)$, где $k_i \in \{0, 1\}$ для $i \leq j$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = 1$, обозначим через $(W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$ топологическую копию пр-ва $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$. Набор $(t_1, \dots, t_j) \in W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ рассматриваем как элемент именно этой копии, будем обозначать $(t_1, \dots, t_j)_\sigma$. Положим

$$W_2^q(X) = \bigoplus_{j > 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_j \leq 1 \\ \max\{k_1, \dots, k_j\} = 1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma.$$

Каждый элемент каждого слагаемого $(W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$, где $\sigma \in \Sigma_j$, отождествим с термом второй степени с помощью отображения

$$\Phi_{\sigma, k_1, \dots, k_j}^2 : (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma \rightarrow T_2(X),$$

$$\Phi_{\sigma, k_1, \dots, k_j}^2((t_1, \dots, t_j)_\sigma) = \sigma(t_1, \dots, t_j) \in T_2(X).$$

(Здесь $0 \leq k_1, \dots, k_j \leq 1$, $\max\{k_1, \dots, k_j\} = 1$.)

Заметим, что сумма $\Phi^2 = \bigoplus_{j > 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_j \leq 1 \\ \max\{k_1, \dots, k_j\} = 1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$

представляет собой взаимно однозначное соответствие между $W_2^q(X)$ и множеством $T_2(X)$ всех термов второй степени.

Пространства $W_n^q(X)$ для $n > 2$ строятся точно так же. Предположим, что $n > 2$ и мы уже определили пр-ва $W_k^q(X)$ и отождествили их с соответствующими множествами $T_k(X)$ посредством отображения Φ^k для всех $k < n$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$, каждого набора $(k_1, \dots, k_j)$, где $0 \leq k_i \leq n-1$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$, и каждого $\sigma \in \Sigma_j$ обозначим через $(W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$ топологическую копию пр-ва $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ и положим

$$W_n^q(X) = \bigoplus_{j > 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_j \leq n-1 \\ \max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma.$$

Для тех же $j, k_1, \dots, k_j$ и любого набора $(t_1, \dots, t_j) \in W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ положим $\Phi_{\sigma, k_1, \dots, k_j}^n((t_1, \dots, t_j)_\sigma) = \sigma(\Phi^{k_1}(t_1), \dots, \Phi^{k_j}(t_j)) \in T_n(X)$

(здесь $\sigma \in \Sigma_j$ и $(t_1, \dots, t_j)_\sigma$ обозначает набор $(t_1, \dots, t_j)$, рассматриваемый как элемент той копии пр-ва $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$, которая имеет индекс σ). Сумма $\Phi^n = \bigoplus_{j > 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_j \leq n-1 \\ \max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} \Phi_{\sigma, k_1, \dots, k_j}^n$ представляет собой взаимно однозначное соответствие между $W_n^q(X)$ и $T_n(X)$.

Заметим, что $W_n^q(X) \cap W_m^q(X) = \Phi$, если $n \neq m$. В конце концов положим $W^q(X) = \bigoplus_{n \geq 0} W_n^q(X)$, $\Phi = \bigoplus_{n \geq 0} \Phi^n$.

Отображение Φ осуществляет взаимно однозначное соответствие между мн-м $W^q(X)$ и абсолютно свободной (абстрактной) алгеброй $T(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n(X)$.

Операции $\sigma \in \Sigma$ на алгебре $T(X)$ естественным образом порождают операции на $W^q(X)$ (точно так же, как в топологическом случае). А именно, пусть $j > 0$ и $t_1, \dots, t_j \in W^q(X)$. Для каждого $m \leq j$ элемент t_m содержится в ровно одном мн-ве $W_{k_m}^q(X)$. Положим $n = \max\{k_1, \dots, k_j\} + 1$ и $\sigma(t_1, \dots, t_j) = (t_1, \dots, t_j)_\sigma \in W_n^q(X)$.

Лемма. Алгебра $W^q(X)$ является квазитопологической Σ -алгеброй.

- Мы должны проверить, что операции $\sigma \in \Sigma$, определённые на $W^q(X)$, непрерывны относительно кросс-топологии, т.е. раздельно непрерывны относительно обильной топологии произведения. Из определения операций $\sigma \in \Sigma_j$ на $W^q(X)$ видно, что их сужения на каждое слагаемое $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ кросс-степеней $W^q(X)^{\otimes j}$ представляют собой гомоморфизмы между $W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)$ и $(W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))^\sigma$. Значит, операции σ непрерывны как сумма непрерывных от-и:

$$\sigma = \bigoplus_{k_1, \dots, k_j \geq 0} \sigma|_{W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X)}.$$

- Отсюда следует утверждение леммы.

это продолжение всех квазитопологических Σ -алгебр

Лемма. Для любой квазитопол. алгебры $A \in \mathcal{W}$ и любого непрерывного от-я $f: X \rightarrow A$ существует непрерывный гомоморфизм $\hat{f}: W^q(X) \rightarrow A$, для которого $\hat{f} = f|_X$.

- Для $j \geq 0$ обозначим операцию на A , соответствующую операции $\sigma \in \Sigma_j$ на $W^q(X)$, тем же символом. То определение операции σ на $W^q(X)$ всякий раз-т мп-ва $W_n^q(X)$ при $n > 0$ имеет вид $(x_1, \dots, x_j)^\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_j)$, где $j > 0$, $\sigma \in \Sigma_n$, $x_i \in W_{k_i}^q(X)$ для $i \leq j$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$. Определим от-я $f_n: W_n^q(X) \rightarrow A$ для $n \in \omega$ следующим образом. Положим

$$f_1|_X = f, \quad f_0|_{\mathbb{Z}_0} = \text{id}.$$

гомоморфизм отображение

Отобра f_n непрерывно, поскольку f непрерывно на X , а слагаемые Σ_0 дискретны. Для $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$, положим

$$f_2^\sigma((x_1, \dots, x_j)^\sigma) = \sigma(f_{k_1}(x_1), \dots, f_{k_j}(x_j))$$

для $x_i \in W_{k_i}^q(X)$, $k_1, \dots, k_j \in \{0, 1\}$, $\max k_i = 1$. Каждое от-я $f_2^\sigma: W_2^q(X) \rightarrow A$ непрерывно, поскольку оно является композицией непрерывных от-и f_0, f_1 и σ , и оно согласовано с операцией σ в естественном смысле. Поэтому

$$f_2 = \bigoplus_{j \geq 0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_i \leq 1 \\ \max k_i = 1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} f_2^\sigma. \quad \text{Это непрерывное от-я из } W_2^q(X) \text{ в } A,$$

согласованное со всеми операциями σ . Отобра $f_n: W_n^q(X) \rightarrow A$ для $n > 2$ определяются точно так же: предположив, что от-я $f_k: W_k^q(X) \rightarrow A$ определены и непрерывны для всех $k < n$, приведем согласованность со всеми операциями отобра, мы покажем $f_n^\sigma((x_1, \dots, x_j)^\sigma) = \sigma(f_{k_1}(x_1), \dots, f_{k_j}(x_j))$ для $x_i \in W_{k_i}^q(X)$, $k_1, \dots, k_j \leq n-1$, $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$ и $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$. Окончательный гомоморфизм $\hat{f}: W^q(X) \rightarrow A$ определяется так:

$$\hat{f} = \bigoplus_{n \in \omega} f_n.$$

- Он непрерывен, будучи суммой непрерывных отображений.

Т. Для топ. пр-ва X квазитопол. алгебра $W^q(X)$ вместе с тождественным вложением $i_X^W = \text{id}_X^W: X \rightarrow W^q(X)$ является абсолютно свободной квазитопологической Σ -алгеброй. Как абстрактная алгебра $W^q(X)$ изоморфна абсолютно свободной Σ -алгебре $T(X)$ над множеством X .

- Первое утверждение теоремы вытекает из доказанных лемм. Второе утверждение следует из того, что отображение Φ является изоморфизмом между алгеброй $W^q(X)$, рассматриваемой как абстрактная алгебра, и абстрактно абсолютно свободной алгеброй $T(X)$.

Свободные квазитопологические алгебры

Пусть $\mathcal{V}$ — любое многообразие квазитоп. алгебр, и пусть X — любое топ. пр-во. Пусть $\mathcal{W}$ — многообразие всех квазитоп. алгебр той же сигнатуры. Поскольку своб. квазитоп. алгебра $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ принадлежит многообразию $\mathcal{W}$, существует единственный непр. гомоморфизм $Q: W^1(X) \rightarrow F_{\mathcal{V}}^1(X)$, для которого $i_X^1 = Q \circ id_X = Q|_X$ (здесь id_X — тождеств. вложение $X \hookrightarrow W^1(X)$). Мы будем писать Q вместо Q^1 , когда многообразие $\mathcal{V}$ ясно из контекста.

[Т.] Для любого топ. пр-ва X и любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитоп. алгебр топология свободной квазитоп.-я алгебры $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ является фактортопологией относительно естественного гомом-изм. Q алгебры $W^1(X)$ на $F_{\mathcal{V}}^1(X)$.

□ Обозначим через $F_{\mathcal{V}}^Q(X)$ алгебру $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ (без топологии), снабжённую фактортопологией относительно Q . В силу единственности свободной квазитопологической алгебры достаточно проверить, что алгебра $F_{\mathcal{V}}^Q(X)$ вместе с отображением $i_X^1 = Q|_X$ является свободной квазитоп. алгеброй пр-ва X . Ясно, что первое условие в определении свободной квазитоп.-я алгебры выполнено. Проверим второе. Пусть $A \in \mathcal{V}$, $f: X \rightarrow A$ — непр. от-е и $\tilde{f}: W^1(X) \rightarrow A$ — непр. гомоморфизм, продолжающий f . Поскольку $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ является абстрактной своб. алгеброй над множеством $Q(X)$, согласно определению свободной алгебры существует гомом-изм $h: F_{\mathcal{V}}^1(X) \rightarrow A$, продолжающий $f \circ i_X^{-1}$. Композиция $h \circ Q$ является гомом-изм. из $W^1(X)$ в A , и при этом она продолжается от-е f .

Отобр-е мн-ва в алгебру продолжается до гомом-изм. своб. алгебры над этим мн-м в ту же алгебру.

единственным образом. Значит, $\tilde{f} = h \circ Q$. Из непрерывности от-е $\tilde{f}$ и факторности отображения Q вытекает непрерывность гомоморфизма h (по лемме на с. 52). Ясно, что $\tilde{f} = h \circ i_X^1$. Таким образом, для $F_{\mathcal{V}}^Q(X)$ и $i_X^1 = Q|_X$ выполнено второе условие в определении свободной квазитоп. алгебры.

Здесь верхний индекс n — все случаи

По аналогии со случаем свободной топ. алгебры обозначим через $F_{\mathcal{V}}^n(X)$ мн-во полиномов n -й степени на X -х порождающего мн-ва $Q(X)$ в $F_{\mathcal{V}}^1(X)$. Заметим, что $F_{\mathcal{V}}^n(X) = Q(W_n^1(X))$ и $F_{\mathcal{V}}^1(X) = \bigcup_{n \geq 0} F_{\mathcal{V}}^n(X)$.

[Т.] Опреде топ. инд. предела диагона с. 33

[Т.] Для любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр и любого топ. пр-ва X свободная квазитоп. алгебра $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $F_{\mathcal{V}}^1(X) = \bigcup_{n \geq 0} F_{\mathcal{V}}^n(X)$.

□ Пространство $W^1(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $W^1(X) = \bigcup_{n \geq 0} W_n^1(X)$, поскольку оно является топ. суммой своих подпространств $W_n^1(X)$ (и при этом все $W_n^1(X)$ замкнуты в $W^1(X)$). Из факторности отображения Q вытекает, что $F_{\mathcal{V}}^1(X)$ имеет топ. инд. предела относительно разложения $F_{\mathcal{V}}^1(X) = \bigcup_{n \geq 0} Q(W_n^1(X)) = \bigcup_{n \geq 0} F_{\mathcal{V}}^n(X)$ (см. лемму на с. 34).

В случае топологических алгебр эта теорема неверна — см. пример на с. 35-36.

Полугруппа ультрафильтров

Мы видели, что существование непрерывных операций (с определёнными свойствами) на топологическом пространстве накладывает довольно существенные ограничения на топологические свойства этого пространства. Следующая теорема показывает, что существование раздельно непрерывных операций (и даже операций с более слабыми свойствами непрерывности) иногда может иметь сильное следствие.

Т. Элиса — Нумакура

Пусть S — полугруппа с топологией $\mathcal{T}$, причём пространство $(S, \mathcal{T})$ хаусдорфово и компактно и непрерывная операция $\cdot: S \times S \rightarrow S$ непрерывна по первому аргументу. Тогда в S имеется идемпотент, т.е. элемент e с свойством $e \cdot e = e$.

□ Сначала мы докажем существование минимального (по включению) замкнутой подполугруппы H в S , а потом покажем, что любой элемент такой подполугруппы H является идемпотентом.

Лемма Цорна

Напомним лемму Цорна: Если $(X, \leq)$ частично упорядоченное мн-во с тем свойством, что для любого $C \subset X$ такого, что $\forall x, y \in C$ либо $x \leq y$, либо $y \leq x$, существует верхний грань, т.е. элемент $\bar{c} \in X$ со свойством $\forall x \in C \ x \leq \bar{c}$, то в X имеется максимальный элемент, т.е. $\exists \bar{x} \in X$ со свойством $y \geq \bar{x} \Rightarrow y = \bar{x}$.

В качестве $(X, \leq)$ возьмём семейство $\mathcal{H}$ всех замкнутых подполугрупп полугруппы S ,

упорядоченное отношением $\subseteq$, обратное включению. $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow H_1 \supset H_2$. Пусть $E \subset \mathcal{H}$ обладает тем свойством, что $\forall H_1, H_2 \in E$ либо $H_1 \subseteq H_2$, либо $H_2 \subseteq H_1$ (т.е. либо $H_1 \supset H_2$, либо $H_2 \supset H_1$). Ясно, что $\bigcap \{H: H \in E\}$ — замкнутая подполугруппа, если только это пересечение не пусто. Покажем, что оно не пусто. Заметим, что семейство E центрировано (любое конечное пересечение его эл-ов не пусто). Действительно, если $H_1, \dots, H_n \in E$, то из того, что все эл-ты семейства E попарно сравнимы, следует, что одна из полугрупп $H_1, \dots, H_n$ содержится в остальных. Поскольку она не пуста, имеем $H_1 \cap \dots \cap H_n \neq \emptyset$. Итак, E — центрированное семейство замкнутых подполугрупп компакта S . Значит, пересечение всех его эл-ов не пусто (иначе дополнив до эл-ов E образующих бы открытое покрытие компакта S , не содержащее конечного подпокрытия — это противоречит лемме Цорна). Следовательно, $\bigcap \{H: H \in E\} \neq \emptyset$ — замкнутая подполугруппа полугруппы S (т.е. элемент семейства $\mathcal{H}$), и эта подполугруппа содержится во всех подполугруппах $H \in E$, т.е. является верхней гранью мн-ва E (относительно нашего порядка $\leq = \supset$). Значит, применив лемму Цорна, согласно которой существует максимальная (т.е. минимальная по включению) замкнутая подполугруппа H в S .

Пусть $e \in H$. По условию отображение $f: S \rightarrow S$, определённое правилом $f(x) = x \cdot e$, непрерывно. Значит, $H \cdot e$ — непрерывный образ замкнутого ($\Rightarrow$ компактного) подпр-ва H компакта S . Компакт S хаусдорфов, непрерывный образ компакта компактен, любое компактное подпр-во хаусдорфова пр-ва замкнуто $\Rightarrow H \cdot e$ замкнуто в S . Ясно, что это подполугруппа. Ясно также, что $H \cdot e \subset H$.

Из минимальности подполугруппы H следует, что $H \cdot e \subset H$. Следовательно, $\exists x \in H$, для которого $x \cdot e = e$ (так как $e \in H$). Значит, множество $X = \{x \in H: x \cdot e = e\}$ не пусто. Это множество замкнуто, т.к. $X = \{e\}^{-1} \cap H$. Легко видеть, что X — подполугруппа. Поскольку $X \subset H$ и H минимальна, имеем $X = H$. Значит, $e \cdot e = e$.

Теорема Элиаса-Кулишурн показывает довольно неожиданные приложения. В качестве иллюстрации рассмотрим пространство ультрафильтров на полугруппе.

Опр. Фильтр на мн-ве X называется непустое семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

- ① $\emptyset \notin \mathcal{F}$
 - ② если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$ (а значит, и любое конечное пересечение элементов мн-ва $\mathcal{F}$ принадлежит мн-ву $\mathcal{F}$);
 - ③ если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathcal{F}$. В частности, $X \in \mathcal{F}$.
- Фильтр $\mathcal{F}$ называется свободным, если $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ является базой фильтра $\mathcal{F}$, если любое множество $F \in \mathcal{F}$ содержит мн-во $B \in \mathcal{B}$.

Максимальный (по включению) фильтр называется ультрафильтром. Другими словами, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ — ультрафильтр, если $\mathcal{F}$ является фильтром и

- ④ для любого фильтра $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ имеем $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.
- Ультрафильтр $\mathcal{U}$ называется главным, если $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.
Такой образ, главный ультрафильтр = несвободный фильтр
неглавный ультрафильтр = свободный фильтр

Зам. Всякий главный уф на X имеет вид
 $\mathcal{U}_x = \{A \subset X: x \in A\}$

для некоторой (любой) точки x .
[Действительно: ясно, что $\mathcal{U}_x$ — фильтр и $\{x\} \in \mathcal{U}_x$, поэтому при добавлении к $\mathcal{U}_x$ любого мн-ва $A \notin \mathcal{U}_x$ нарушится ④. Очевидно, что $\mathcal{U}_x$ — уф. и $x \in \bigcap \mathcal{U}_x$, то $\mathcal{U}_x \supset \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}_x = \mathcal{U}$.]

пересечение любого конечного числа любых элементов этого семейства пусто.

Т Любое центрированное семейство $\mathcal{E}$ порождает произвольного мн-ва X содержится в некотором ультрафильтре $\mathcal{U}$ на X .

□ Упорядочим семейство $\mathcal{E}$ всех центрированных семейств порождённых мн-ва X отношением включения $\subset$. Если $\Sigma \subset \mathcal{E}$ и $\forall E_1, E_2 \in \Sigma$ либо $E_1 \subset E_2$, либо $E_2 \subset E_1$, то $\mathcal{U}_\Sigma = \{F \subset X: \exists E \in \Sigma (F \in E)\}$ центрировано: если $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{U}_\Sigma$, то $\exists E_1, \dots, E_n \in \Sigma$, для которых $F_i \in E_i$. Все E_i попарно сравнимы. Пусть среди E_i самое большое. Тогда $F_1, \dots, F_n \in E_k$, а значит, $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$.

Итак, у каждого мн-ва $\Sigma \subset \mathcal{E}$, состоящего из попарно сравнимых э-в, есть верхняя грань $\mathcal{U}_\Sigma$. Применяя лемму Зорна. Из неё вытекает существование максимального (по включению) центрированного сн-ва $\mathcal{U}$ порождённого X , содержащего $\mathcal{E}$. Это ультрафильтр. Выполнение условия ① следует из центрированности семейства $\mathcal{U}$; если $A, B \in \mathcal{U}$, то сн-во $\mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ содержит $\mathcal{U}$ и центрировано, значит, $\mathcal{U} \cup \{A \cap B\} = \mathcal{U}$, т.е. $A \cap B \in \mathcal{U}$, так что условие ② тоже выполнено; из тех же соображений выполнено условие ③; условие ④ выполнено потому, что $\mathcal{U}$ максимален не только среди фильтров, но даже и среди центрированных семейств (содержащих $\mathcal{E}$).

Зам. Валков семейств (содержащих $\mathcal{E}$).

След. На любом бесконечном множестве существует неглавный ультрафильтр.

□ Если X бесконечна, то семейство $\mathcal{F} = \{X \setminus F: F \text{ конечно}\}$ центрировано, и $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. По теореме $\mathcal{F}$ содержится в ультрафильтре $\mathcal{U}$ на X . Ясно, что $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.

Т Фильтр $\mathcal{F}$ на мн-ве X является ультрафильтром $\Leftrightarrow \forall A \subset X$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

□ $\Rightarrow$ Пусть $\mathcal{F}$ — у.ф. и $A \subset X$. Если $F \setminus A = \emptyset$ для некоторого $F \in \mathcal{F}$, то $F \subset A$ и $A \in \mathcal{F}$ по св-ву ③. Предположим, что $F \setminus A \neq \emptyset$ для всех $F \in \mathcal{F}$. Если $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, то

$(F_1 \setminus A) \cap (F_2 \setminus A) \cap \dots \cap (F_n \setminus A) = (F_1 \cap \dots \cap F_n) \setminus A \neq \emptyset$, т.е. семейство $\{F \setminus A : F \in \mathcal{F}\}$ центрировано. Оно содержится в нек. ультрафильтре $\mathcal{U}$. Для каждого $F \in \mathcal{F}$ имеем $F \setminus A \in \mathcal{U}$ и, следовательно, $F \in \mathcal{U}$ (так как $F \setminus A \subset F$). Значит, $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, и из минимальности $\mathcal{F}$ вытекает, что $\mathcal{F} = \mathcal{U}$. Следовательно, $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

□ $\Leftarrow$ Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр с тем свойством, что для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо $X \setminus A \in \mathcal{F}$, и пусть $\mathcal{U}$ — у.ф., содержащий $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F} \neq \mathcal{U}$, то $\exists A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$. По предположению $X \setminus A \in \mathcal{F}$, а поскольку $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, имеем $X \setminus A \in \mathcal{U}$. Таким образом, $\mathcal{U}$ содержит непересекающиеся мн-ва A и $X \setminus A$ в противоречие со свойством ① и ② фильтра. Значит, $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

След. Основное свойство ультрафильтров. Если $\mathcal{U}$ — у.ф. на множестве X , $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_m \subset X$ и $X = A_1 \cup \dots \cup A_m$, то $A_i \in \mathcal{U}$ для некоторого $i \leq m$.

□ Пусть $A_i \notin \mathcal{U}$ для всех $i \leq m$. По доказанной теореме $X \setminus A_i \in \mathcal{U}$ для $i \leq m$. Значит, $(X \setminus A_1) \cap \dots \cap (X \setminus A_m) = X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m) \in \mathcal{U}$, но

■ $X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m) = \emptyset$. Противоречие.

Топологическое пространство ультрафильтров

Пусть X — мн-во. Обозначим мн-во всех у.ф. на X через βX . Для каждого $A \subset X$ положим

$$\bar{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}.$$

Семейство $\mathcal{B} = \{\bar{A} : A \subset X\}$ является базой некоторой топологии на βX . В дальнейшем мы будем рассматривать

βX только с этой топологией. Тогда ультрафильтры пространства βX мы будем обозначать строчными латинскими буквами из второй половины латинского алфавита: p, q, r и т.д. Для $A \subset X$

$\bar{A}$ — окрестность у.ф. $p \in \beta X \Leftrightarrow A \in p$.

Множество X мы будем отождествлять с подпространством пр-ва βX , состоящим из главных ультрафильтров: $X \ni x \equiv p_x = \{A \subset X : x \in A\}$.

Свойства пространства βX

1. Мн-во всех главных ультрафильтров, которое отождествляется с X ,
 - густо: $\forall x \in X$ имеем $\{x\} \in p_x$ и $\overline{\{x\}} = \{p_x\}$; ↓ окрестность
 - открыто: $X = \bigcup_{x \in X} \{p_x\} = \bigcup_{x \in X} \overline{\{x\}}$; ↑ ультрафильтр
 - всюду плотно: любая непустая открытая мн-ва $U \subset \beta X$ содержит $\bar{A}$ для нек. непустого $A \subset X$ (так как все $\bar{A}$ составляют базу топологии на βX). Для $x \in A$ имеем $A \in p_x$. Значит, $p_x \in U$.
2. Для любого $A \subset X$ мн-во $\bar{A}$ открыто-замкнуто, т.е. $\beta X \setminus \bar{A} = X \setminus \bar{A}$ (это вытекает из основного св-ва ультрафильтров).
3. Для всякого $A \subset X$ $\bar{A}$ является замыканием мн-ва $A \equiv \{p_x : x \in A\}$ в βX , причем $\bar{A} \cap X = A$. Действительно, из того, что $A \subset \bar{A}$ и $\bar{A}$ замкнуто, следует, что $\bar{A}$ содержит замыкание множества A . Обратно, пусть $p \in \bar{A}$ (т.е. $A \in p$). Тогда окр-ть U точки p в βX содержит окр-ть вида $\bar{B}$, где $B \in p$. Для любой точки $x \in A \cap B$ имеем $p_x \in A$ и $A \cap B \in p_x$, т.е. $p_x \in \bar{A} \cap B \subset \bar{B} \subset U$. Таким образом, любая точка p из $\bar{A}$ является предельной для A . Значит, $\bar{A}$ содержится в замыкании мн-ва A .
Наконец, $p_x \in \bar{A} \Leftrightarrow A \in p_x$, т.е. $x \in A$; значит, $\bar{A} \cap X = A$.

4. Пр-во βX хаусдорфово. Действительно, если $p, q \in \beta X$ и $p \neq q$, то $\exists A \in \mathcal{P}: A \notin q$. Имен $X \setminus A \in p$. Множества A и $X \setminus A$ — непересекающиеся окрестности точек p и q .

5. Пространство βX компактно.

□ Пусть $\mathcal{U} = \{U_i: i \in I\}$ — открытое покрытие пр-ва βX . Для каждого $p \in \beta X$ найдём $A_p \in \mathcal{P}$ и $i_p \in I$, для которых $A_p \subset U_{i_p}$ (и $p \in A_p$). Сем-во $\{A_p: p \in \beta X\}$ является открытым покрытием пр-ва βX .

Предположим, что сем-во $\mathcal{F} = \{X \setminus A_p: p \in \beta X\}$ центрировано. Тогда $\exists p \in \beta X: \mathcal{F} \subset p$. Поскольку $X \setminus A_p \in \mathcal{F}$, имен $X \setminus A_p \in p$, но по построению $A_p \in p$. Это противоречие показывает, что $\mathcal{F}$ не центрировано. Пусть $X \setminus A_{p_1} \cap \dots \cap X \setminus A_{p_n} = \emptyset$. Тогда $A_{p_1} \cup \dots \cup A_{p_n} = X$. По основной св-ву ультрафильтров любой у.ф. $q \in \beta X$ содержит A_{p_i} для некоторого $i \leq n$, т.е. $q \in A_{p_i}$. Значит, $\{A_{p_1}, \dots, A_{p_n}\}$ — покрытие пр-ва βX . Следовательно, $\{U_{i_{p_1}}, \dots, U_{i_{p_n}}\}$ — тоже покрытие (т.к. $A_{p_i} \subset U_{i_{p_i}}$).

Предг. Любое отображение $f: X \rightarrow \beta X$ продолжается до непрерывного от-я $\hat{f}: \beta X \rightarrow \beta X$.

□ Для каждого $p \in \beta X$ положим $\hat{f}(p) = \{A \subset X: f^{-1}(A) \in p\}$ (очевидно, это ультрафильтр). Если $p_x \equiv x \in X$, то $\hat{f}(p_x) = \{A \subset X: f^{-1}(A) \ni x\} = \{A \subset X: f(x) \in A\}$ — это главный у.ф. $p_{f(x)} \equiv f(x)$. Значит, от-я $\hat{f}: \beta X \rightarrow \beta X$ является продолжением от-я f . Надо проверить непрерывность. Пусть V — любая окр-сть точки $\hat{f}(p)$. Она содержит открыто-замкнутую окр-сть вида $\bar{B}$, где $B \in f(p)$, т.е. $f^{-1}(B) \in p$. Ясно, что если $f^{-1}(B) \in q$, то $B \in f(q)$, т.е. если

$q \in f^{-1}(B)$, то $\hat{f}(q) \in \bar{B}$. Значит, $f^{-1}(B)$ — окр-сть точки p , которая содержится в прообразе $\hat{f}^{-1}(V) \supset f^{-1}(B)$. Таким образом, прообраз любой окр-сти точки $\hat{f}(p)$ содержит окр-сть точки p для любого $p \in \beta X$. Значит, $\hat{f}$ непрерывно.

Полугруппы ультрафильтров

Пусть S — полугруппа. Для каждого $s \in S$ определим отображение

$$L_s: S \rightarrow S \subset \beta S$$

правилам

$$L_s(x) = s \cdot x \text{ для всех } x \in S.$$

Рассмотрим непр. продолжение

$$\hat{L}_s: \beta S \rightarrow \beta S.$$

Для $\hat{L}_s(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $S \cdot p$.

Теперь для каждого $q \in \beta S$ рассмотрим отображение

$$R_q: S \rightarrow \beta S,$$

определённое правилами

$$R_q(x) = x \cdot q \text{ для всех } x \in S.$$

Существует непрерывное продолжение

$$\hat{R}_q: \beta S \rightarrow \beta S.$$

Для $\hat{R}_q(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $p \cdot q$. Этот ультрафильтр называется

произведением ультрафильтров p и q . Мы определим бинарную операцию (умножение) на βS . Она непрерывна по первому аргументу, а если первый элемент — элемент полугруппы S (т.е. главный у.ф.), то и по второму. Покажем, что из этих непрерывностей вытекает ассоциативность.

Пусть $p, q, r \in \beta S$. Мы покажем, что любая окр-ть точки $(p \cdot q) \cdot r$ пересекается с любой окр-ью точки $p \cdot (q \cdot r)$. Отсюда и из хаусдорфовости пр-ва βS будет вытекать, что $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.

Пусть O_1 — любая окр-ть точки $(p \cdot q) \cdot r$.
Непр-ть по 1-му арг. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists$ окр-ть $V_1 \ni p \cdot q$, где
которой $V_1 \cdot r \subset O_1$,
и $\exists$ окр-ть $U_1 \ni r$, для кот.
 $U_1 \cdot q \subset V_1$.

Пусть O_2 — любая окр-ть точки $p \cdot (q \cdot r)$.
Непр-ть по 1-му аргументу
 $\Rightarrow \exists$ окр-ть $U_2 \ni p$,
для которой $U_2 \cdot (q \cdot r) \subset O_2$.

Возьмем $x \in S \cap U_1 \cap U_2$.

$x \cdot q \in V_1$, непр-ть по 2-му
аргументу (где первого из S)
 $\Rightarrow \exists$ окр-ть $W_1 \ni q$,
для которой $x \cdot W_1 \subset V_1$.

$x \cdot (q \cdot r) \in O_2$, непр-ть по
2-му аргументу $\Rightarrow$
 $\exists$ окр-ть $V_2 \ni q \cdot r$, для которой
 $x \cdot V_2 \subset O_2$. Непр-ть по 1-му
арг. $\Rightarrow \exists$ окр-ть $W_2 \ni q$,
для кот. $W_2 \cdot r \subset V_2$.

Возьмем $y \in S \cap W_1 \cap W_2$.

$x \cdot y \in V_1$, $V_1 \cdot r \subset O_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x \cdot y) \cdot r \in O_1$. Непр-ть
по 2-му аргументу $\Rightarrow$
 $\exists$ окр-ть $Q_1 \ni r$, для которой
 $(x \cdot y) \cdot Q_1 \subset O_1$.

$y \cdot r \in V_2$, непр-ть по 2-му арг.
 $\Rightarrow \exists$ окр-ть $Q_2 \ni r$, для
которой $y \cdot Q_2 \subset V_2$.
 $x \cdot V_2 \subset O_2 \Rightarrow x \cdot (y \cdot Q_2) \subset O_2$

Возьмем $z \in S \cap Q_1 \cap Q_2$.

Имеем $(x \cdot y) \cdot z \in O_1$ и $x \cdot (y \cdot z) \in O_2$. Из ассоциа-
тивности умножения в полугруппе следует, что

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \in O_1 \cap O_2.$$

Таким образом, любые окрестности точек $(p \cdot q) \cdot r$
и $p \cdot (q \cdot r)$ пересекаются. Значит, эти точки совпа-
дают. Следовательно, умножение в βS ассоциатив-
но, т.е. βS — полугруппа относительно этого
умножения.

Итак, мы продолжили полугрупповую операцию на S
на βS , превратив тем самым βS в компактную
хаусдорфову полугруппу с умножением, непрерывным
по 1-му аргументу, которая содержит S в качестве
(дискретной) подполугруппы. По теореме Элиаса-
Нумакуры в βS есть идемпотент.

Рассмотрим в качестве S полугруппу $\mathbb{N}$
натуральных чисел с обычной операцией сложения.
Она не содержит идемпотентов, поэтому в $\beta \mathbb{N}$
есть идемпотент, являющийся неглавным ультра-
фильтром. Будем обозначать умножение в $\beta \mathbb{N}$ знаком $+$ и

Непросто видеть, что все эти элементы
неглавного ультрафильтра бесконечны. Действительно,
пусть $p \in \beta X$, и пусть $\{x_1, \dots, x_n\} \in p$. Из основ-
ного свойства ультрафильтра следует, что либо $\{x_i\} \in p$,
либо $X \setminus \{x_i\} \in p$. В первом случае p главный, во
втором $X \setminus \{x_i\} \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \{x_2, \dots, x_n\} \in p$. Продолжая
в том же духе, мы будем рассматривать точки
 $x_2, \dots, x_n$ одна за другой. На шаге i мы либо уви-
дим, что $\{x_i\} \in p$, т.е. $p = p_{x_i}$, либо сократим
кол-во точек, т.е. покажем, что $\{x_{i+1}, \dots, x_n\} \in p$. Если
нам удастся дойти до n -го шага (т.е. окажется,
что $\{x_i\} \notin p$ для $i < n$), то с необходимостью окажется,
что $\{x_n\} \in p$, т.е. $p = p_{x_n}$.

Итак, пусть $e \in \beta \mathbb{N}$ — идемпотент (он неглавный),
и пусть $A \in e$ (это мн-во бесконечно). Тогда A —
окр-ть точки e в $\beta \mathbb{N}$. Поскольку $e + e = e$ и сложение
в $\beta \mathbb{N}$ непрерывно по 1-му аргументу, $\exists$ окр-ть U точки e ,
для которой $U + e \subset A$. Окр-ть U содержит окр-ть вида
 B где $B \in e$, причем можно считать, что $B \subset A$
(иначе перейдем к пересечению). Возьмем $x \in B$. Имеем
 $x + e \in A$. Сложение непр- по 2-му аргументу, когда первый
принадлежит мн-ву $\mathbb{N}$ (является главным ультрафильтром)
 $\Rightarrow \exists c \in e: x + c \in A$. Можно считать, что $c \in A$
и $x \notin c$ (иначе пересечем c с A и $c \in \mathbb{N} \setminus \{x\}$).

$e, m.k. e$ неглавный
 $\Rightarrow \{x\} \in e$

Возьмем $y \in C$. Имеем $x+y \in A$. Поскольку $x+y \in N$ и $\bar{A} \cap N = A$ (сл. св-во 3 пр-ва βX), имеем $x+y \in A$. Отсюда немедленно вытекает следующая теорема:

Теорема Шура

Какова бы ни была раскраска натуральных чисел в конечное число цветов, найдутся одноцветные точки x, y, z , являющиеся решением уравнения $x+y=z$.

Действительно, пусть $N = A_1 \cup \dots \cup A_m$ — раскраска мн-ва N в m цветов. Идемпотент $e \in \beta N$ содержит одно из мн-в $A_1, \dots, A_m$ (по основ. лемме св-ва ультрафильтров). Пусть $A_i \in e$. Тогда мы видим, что любой д.т. ультрафильтра e содержит x, y, z , для которых $x+y=z$.

Продолжение операций и тождеств на компактификации

Мы научились продолжать операцию с дискретной полугруппой S на компактификацию βS этой полугруппы, причем продолжение обладает свойствами непрерывности, достаточными для существования изоморфизма.

На самом деле для βX верно утверждение, более сильное, чем предложение на с. 75:

Утв. Для любого отображения $f: X \rightarrow K$ мн-ва X в компактное хаусдорфово пр-во K существует непрерывное продолжение $\bar{f}: \beta X \rightarrow K$.

Хаусдорфов компакт, содержащий данное топологическое пространство в качестве вложенного подпространства, называется компактификацией этого пространства. Хорошо известно, что у всякого тихоновского (т.е. регулярного T_1) пространства X существует максимальная компактификация (она называется также стоун-кеховской), т.е. компактификация βX с тем свойством, что любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow K$ в хаусдорфов компакт продолжается до непрерывного отображения $\bar{f}: \beta X \rightarrow K$. Более того построили такую компактификацию для дискретного пр-ва X (как пр-во ультрафильтров). Максимальная компактификация произвольного тихоновского пр-ва является обобщением этой конструкции (поэтому для нее используется то же обозначение). Ее можно построить тем же способом с помощью максимальных фильтров функционально замкнутых множеств, т.е. семейств $F \subset \mathcal{Z}(X)$, где $\mathcal{Z}(X)$ — все функц. замкнутые подмн-ва пр-ва X ,

$F \subset \mathcal{Z}(X)$ функционально замкнуто, если $F = f^{-1}(0)$ для нек. непрерыв. функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

- и свойствами
- ① $\Phi \notin \mathcal{F}$
 - ② $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
 - ③ $A \in \mathcal{F}, A \subset B \in \mathcal{Z}(X) \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
 - ④ $\mathcal{F}$ максимально по включению среди см-в функц. z -х см-в сов-ий ①-③.

Если S — тихоновская квазитопологическая подгруппа, то её операцию можно продолжить на βS точно так же, как и в S (с записью сохранения непрерывности).

Интересен вопрос, когда операция продолжается до непрерывной или раздельно непрерывной операции. Ниже перечислены некоторые результаты на эту тему.

[T] Для группы G с ^{тихоновской} топологией следующие условия равносильны:

- 1) G — топ. группа и её операция продолжается до непрерывной групповой операции на βG , т.е. βG — топ. группа, содержащая G в качестве топологической подгруппы;
- 2) G — псевдокомпактная топ. группа;
- 3) G — топологическая группа и G^k псевдокомпактно для любого кардинала k ;
- 4) G — псевдокомпактное гр-во и умножение в G непрерывно;
- 5) G — псевдокомпактное гр-во, умножение в G раздельно непрерывно и умножение $\circ: G \times G \rightarrow G$ продолжается до раздельно непр. отображения $\beta G \times \beta G \rightarrow \beta G$.

В связи с этой теоремой возникает проблема (нерешённая):

Проблема Пусть G — топ. группа и умножение $\circ: G \times G \rightarrow G$ продолжается до раздельно непрерывного от-з $\circ: \beta G \times \beta G \rightarrow \beta G$. Верно ли, что G псевдокомпактна?

Для гр-в с операцией Мальцева верна аналогичная теорема:

[T] Для тихоновского гр-ва X с непрерывной операцией Мальцева следующие условия равносильны:

- 1) операция Мальцева на X продолжается до непрерывной операции Мальцева на βX , т.е. βX является мальцевской топ. алгеброй, содержащей X в качестве мальц. подалгебры;
- 2) операция Мальцева на X продолжается до непрерывной тернарной операции на βX ;
- 3) гр-во X псевдокомпактно;
- 4) гр-во X^k псевдокомпактно для любого кардинала k .

Проблема Пусть X — топологическая мальцевская алгебра и операция Мальцева продолжается до раздельно непрерывной тернарной операции на βX . Верно ли, что X псевдокомпактно?

[T] Для тихоновской квазитопол.-й мальцевской алгебры M следующие условия равносильны:

- 1) операция Мальцева продолжается до раздельно непр. операции Мальцева на βM , т.е. βM — квазитопологическая мальц. алгебра, содержащая M в качестве подалгебры;
- 2) гр-во M псевдокомпактно и операция Мальцева на M продолжается до разд. непрерывной тернарной операции на βM ;
- 3) гр-во M псевдокомпактно и операция Мальцева продолжается на βM до тернарной операции, совместно непрерывной по любым двум переменным при фиксации третьей.

[I.] Пусть X — топологическая Σ -алгебра и для всякого $n \in \mathbb{N}$ тако, что $\Sigma_n \neq \emptyset$, пр-во X^n псевдокомпактно. Тогда операции на X продолжаются до непрерывных операций на βX , относительно которых βX является топологической Σ -алгеброй.

[I.] Если X — псевдокомпактная топологическая алгебра, то все операции на X продолжаются до раздельно непр. операций на βX , относительно которых βX является квазитопологической алгеброй.

Продолжение тождеств

Пусть A — хаус. топологическая алгебра, $B \subset A$ — её всюду плотная подалгебра, p и q — любые термы (т.е. полиномы). Если $p \equiv q$ на B , то $p \equiv q$ на A , поскольку p и q являются непрерывными отображениями $A^n \rightarrow A$ (будучи композициями операций, конт. непрерывны по определению топ. алгебры), а если конт. от-я совпадают на всюду плотной подмн-ве, то они совпадают везде.

Для квазитопологических алгебр это не так.

Пример. Пусть $\mathbb{Z}$ — дискретная топ. группа (по сложению) и S — её одноточечная компактификация, т.е. $S = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, окрестности всех точек $x \in \mathbb{Z}$ имеют вид $\{x\}$, а окрестности точки ∞ — дополнения до конечных множеств. Продолжим операцию $+$ на S , положив $\infty + x = x + \infty = \infty$ для $x \in S$. Операцию инверсии тоже продолжим: $-\infty = \infty$.
 S является компактом с тремя операциями.

0-арная: $x \mapsto -x$
унарная: $x \mapsto -x$
двухарная: $x \mapsto -x$
Операции раздельно непр., но тождество $x + (-x) = 0$ на S не выполняется, хотя оно выполнено на всюду плотной подгруппе $\mathbb{Z}$.

Всё дело в том, что композиция раздельно непрерывных операций не обязана быть раздельно непрерывной. Например, в приведенном выше примере композиция $x + (-y)$ не раздельно непрерывна.

Легко проверяется следующее утверждение:

Предп. Пусть X и Z — топ. пр-ва, отображения $f, g: X^n \rightarrow Z$ раздельно непрерывны, $Y \subset X = \overline{Y}$ и $f|_Y = g|_Y$. Тогда $f = g$.

Напомним, что терм (полином) строится шаг за шагом. Полином каждой следующей ступени получается применением операции $\sigma \in \Sigma$ к термам предыдущих ступеней: $t = \sigma(t_1, \dots, t_n)$. При этом для каждого терма определено его переменные. Одна и та же переменная может встречаться в разных термах. Если этого не происходит при построении терма p , то мы будем говорить, что каждая переменная встречается в p не более одного раза. Если на некотором шаге переменная x встречается в двух термах и на всех других шагах этого не происходит, то мы будем говорить, что x встречается в p два раза. Аналогично определяется ситуация, когда x встречается три и т.д. раз.

Легко убедиться в том, что композиция раздельно непр. от-я $X^n \rightarrow X$, в которой каждая переменная встречается ≤ 1 раз, раздельно непрерывна.

Следовательно, верно следующее утверждение.

Предл. Пусть X — квазитоп., Y — её всюду плотная подалгебра и p и q — терм. Если каждая переменная встречается в p и $q \leq 1$ раз и $p \equiv q$ на Y , то $p \equiv q$ на X .

След. Если X — квазитоп. Σ -алгебра, Y — её всюду плотная подалгебра и операция $\sigma \in \Sigma$ ассоциативна (коммутативна) на Y , то σ ассоциативна (коммутативна) и на X .

Пример. Если S — квазитоп. полугруппа, S является всюду плотным подпространством топологического гр-ва X и полугрупповая операция на S продолжается до разд. непрерывной бинарной операции на X . Тогда это продолжение ассоциативно, т.е. X — квазитоп. полугруппа, содержащая S как подполугруппу. Если S коммутативна, то X тоже коммутативна.

Проблема. Существует ли бесконечная дискретная полугруппа S , та же полугрупповая операция продолжается до разд. непрерывной операции на βS ?
[Известно, что если S коммутативна, то продолжение операции на βS разд. непрерывно тогда и только тогда, когда оно коммутативно.]

Т Пусть X — квазитоп. алгебра, Y — её всюду плотная подалгебра и Y псевдокоммутативна. Тогда для любых многочленов p и q , в один из которых каждая переменная встречается ≤ 2 раз, а в другом — ≤ 1 раз, из выполнения тождества $p \equiv q$ на Y вытекает его выполнение на X .

След. Если M — псевдокоммутативная квазитопологическая мальцевская алгебра, X — топ. гр-во, $M \subseteq X = \overline{M}$ и операция Мальцева на M продолжается до разд. непрерывной тернарной операции на X . Тогда это продолжение является операцией Мальцева на X .

Проблема. 1) Найти другие достаточные условия продолжения тождеств на расширение квазитопологических алгебр.
2) Найти условия, при которых каноничное разд. непрерывное отображение разд. непрерывно.