Из этого наблюдения и теоремы Сверчковского мы можем сделать такой вывод:

- Существуют точка $x_0 \in [0,1]$, элемент $\alpha \in F_{\mathcal{V}}([0,1])$, терм t от n переменных и $x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_n \in [0,1]$ со следующими свойствами:

(a) $1-\varepsilon < x_0 < 1$

(b) $\alpha \sim x_0$ (т.е. $h(\alpha) = h(x_0)$)

(c) $\alpha \in \mathcal{U}$

(d) $0 = t(x_1,\dots,x_n)$

(e) $\alpha = t(y_1,\dots,y_n)$

(f) $\sum d_0(x_i, y_i) < \varepsilon$

С помощью (a) и (f) нетрудно показать, что найдётся $c \in [0,1]$, $0 < c < x_0$, с тем свойством, что для всякого $i \le n$ имеем либо $x_i < c$ и $y_i < c$, либо $x_i > c$ и $y_i > c$.

В выражение $t(y_1,\dots,y_n)$ подставим символ переменной x вместо всех $y_i < c$, символ y вместо всех $y_i = 1$ и символ z вместо всех остальных y_i. У нас получился терм $\mu(x,y,z)$. Заметим, что $\mu(x,z,z)$ получается подстановкой символа x вместо всех $y_i < c$ и символа z вместо всех $y_i > c$. В силу выбора числа c то же самое получается при подстановке в $t(x_1,\dots,x_n)$ символа x вместо всех $x_i < c$ и символа z вместо всех $x_i > c$. Из (d) вытекает, что $\mu(x,z,z) = x$ (потому что мы заменили всё, что меньше c, на x). Из (e) и (b), а также из того, что h — гомом-м, следует, что

$$t(h(y_1),\dots,h(y_n)) = h(t(y_1,\dots,y_n)) = h(\alpha) = h(x_0) (= x_0),$$

причём $x_0 > c$ (по выбору c). Рассматривая отрезок $[0,1]$ со склеенными точками $0, 1$ как полуинтервал $[0,1)$ (топология сейчас неважна) и считая, что h переводит 1 в 0 и оставляет все остальные точки на месте, мы видим, что $\mu(x,x,z)$ получается из $t(h(y_1),\dots,h(y_n))$ заменой всех $h(y_i) < c$ на x и всех $h(y_i) > c$ на z, и при этом $\mu(x,x,z) = z$, так как $t(h(y_1),\dots,h(y_n)) = x_0 > c$.

Итак, мы определили терм $\mu(x,y,z)$ так, что в свободной алгебре $F_{\overline{\mathcal{V}}}([0,1])$ выполнены тождества $\mu(x,y,y) = \mu(y,y,x) = x$. Эти тождества будут выполнены и в любой другой алгебре из $\overline{\mathcal{V}}$ (=из $\mathcal{V}$): если $A \in \overline{\mathcal{V}}$ и $a, b, c \in A$, то, рассмотрев отображение $f: [0,1] \to A$, определённое правилом $f([0,c]) = \{a\}$, $f((c,1)) = \{c\}$ и $f(\{1\}) = \{b\}$, и продолжив его до гомоморфизма $\hat{f}: F_{\overline{\mathcal{V}}}([0,1]) \to A$, мы увидим, что $\mu(a,c,c) = a$ и $\mu(a,a,c) = c$. ■

След. Если $\mathcal{V}$ — полное многообразие топ. алгебр с перестановочными конгруэнциями, $A \in \mathcal{V}$, $\overline{B} \in \mathcal{V}$ и $h: \overline{A} \to \overline{B}$ — любой гомоморфизм (абстрактных алгебр $\overline{A}$ и $\overline{B}$), то $\overline{B}$ с фактортопологией является топологической алгеброй (и принадлежит многообразию $\mathcal{V}$).

□ Следует из доказанной теоремы и двух предшествующих лемм. ■

$\boxed{\text{Проблема}}$ Найти другие условия на многообразие топ. алгебр, при которых все гомоморфные образы алгебр из этого многообразия с факторной топологией являются топологическими алгебрами.