Тогда $h(a) = b$. Положим $U = h^{-1}(V)$. Это окр-ть точки a, так как h непрерывно. Из непрерывности операции σ на A вытекает существование окрестностей $U_1, \dots, U_n$ точек $a_1, \dots, a_n$, для которых $\sigma(U_1 \times \dots \times U_n) \subset U$. Положим $V_i = h(U_i)$. Из открытости отображения h вытекает, что V_i — окрестности точек $b_i = h(a_i)$, а из того, что это гомоморфизм, следует, что $\sigma(V_1 \times \dots \times V_n) \subset V$. ■

Лемма Пусть A и B — алгебры с топологией и отображение $f: A \overset{\text{на}}{\to} B$ является факторным отображением относительно этих топологий. Предположим, что для каждого открытого множества $U \subset A$ множество $f^{-1}(f(U))$ тоже открыто. Тогда отображение f является открытым отобр-м.

□ Поскольку для любого открытого мн-ва $U \subset A$ $f^{-1}(f(U))$ открыто, из факторности отобр-я f вытекает, что $f(U)$ открыто. ■

$\boxed{\text{Т.}}$ (Мальцев + W. Taylor) Пусть $\mathcal{V}$ — любое полное многообразие топ. алгебр. Для любой топ. алгебры $A \in \mathcal{V}$ и любой конгруэнции $\sim$ на A $\sim$-насыщение любого открытого мн-ва $U \subset A$ (т.е. множество $U^{\sim} = \{x \in A : \exists y \in U \text{ т., что } x \sim y\}$) открыто тогда и только тогда, когда в $\mathcal{V}$ существует производная операция Мальцева.

□ $\Leftarrow$ (Мальцев): Пусть $A \in \mathcal{V}$, μ — непр. операция Мальцева на A и $U \subset A$ открыто в A. Предположим, что $U^{\sim}$ не открыто в A. Тогда существует $\tilde{a} \in U^{\sim}$ т., что ни одна окрестность точки $\tilde{a}$ не содержится целиком в $U^{\sim}$. По определению мн-ва $U^{\sim}$ существует точка $a \in U$, для которой $a \sim \tilde{a}$. Имеем $a = \mu(\tilde{a}, \tilde{a}, a) \in U$. Из непрерывности операции μ следует, что существует окрестность V точки $\tilde{a}$, для которой $\mu(V \times \{\tilde{a}\} \times \{a\}) \subset U$. По предположению существует $v \in V$, $v \notin U^{\sim}$. Имеем $\mu(v, \tilde{a}, a) \in U$. С другой стороны, поскольку $\tilde{a} \sim a$, а $\sim$ — конгруэнция, имеем также $\mu(v, \tilde{a}, a) \sim \mu(v, a, a) = v$. Следовательно, элемент v эквивалентен некоторому элементу множества U, а значит, обязан принадлежать множеству $U^{\sim}$. Мы получили противоречие, которое показывает, что $U^{\sim}$ открыто.

$\Rightarrow$ (W. Taylor): Пусть $\tilde{F}_{\mathcal{V}}([0,1])$ — абстрактная свободная алгебра $F_{\mathcal{V}}([0,1])$, наделённая топологией, порождённой продолжением обычной метрики d_0 на отрезке $[0,1]$ по Сверчковскому. Она принадлежит многообразию $\mathcal{V}$. Пусть $\sim$ — конгруэнция на $F_{\mathcal{V}}([0,1])$, порождённая отношением эквивалентности на $[0,1]$, которое "склеивает" точки 0 и 1 (т.е. классами эквив-ти являются $\{0,1\}$ и $\{x\}$, $x \in (0,1)$). Пусть d — продолжение метрики d_0 по Сверчковскому. Возьмём $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ достаточно маленькое для того, чтобы была применима теорема Сверчковского, и рассмотрим ε-окрестность U точки $0 \in \tilde{F}_{\mathcal{V}}([0,1])$ в $\tilde{F}_{\mathcal{V}}([0,1])$ (с метрикой d). Обозначим через h естественный гомоморфизм $\tilde{F}_{\mathcal{V}}([0,1]) \to \tilde{F}_{\mathcal{V}}([0,1])/\sim$. Он отождествляет 0 и 1 во всех выражениях вида $t(x_1, \dots, x_n)$, где t — терм и $x_1, \dots, x_n \in [0,1]$, которые образуют алгебру $\tilde{F}_{\mathcal{V}}([0,1])$. По предположению множество $h^{-1}(h(U))$ открыто в $\tilde{F}_{\mathcal{V}}([0,1])$. Это множество является открытой окрестностью точки 1, т.к. $1 \in h^{-1}(h(\{0\})) \subset h^{-1}(h(U))$. Пересечение открытой окрестности точки 1 в $\tilde{F}_{\mathcal{V}}([0,1])$ с $[0,1]$ является открытой окрестностью точки 1 в $[0,1]$ с обычной топологии, т.к. сужение метрики Сверчковского d на $[0,1]$ совпадает с d_0. Значит, на отрезке сколь угодно близко к 1 (но строго левее 1) существует точка x_0 из $h^{-1}(h(U))$, причем эта точка эквивалентна некоторой точке $\alpha \in U$ (по определению гомоморфизма h).