Задание для гр. 207 на 19.09.2013

I. Выучить определения следующих понятий

Топологическое пространство (X, τ), открытые и замкнутые множества, база топологического пространства $\mathscr{B} \subseteq \tau$, база $\mathscr{B}(x)$ в точке x, 1ая и 2ая аксиомы счётности, замыкание множества $\mathrm{Cl}(A)$, внутренность множества $\mathrm{Int}(A)$.

Внутренняя точка, точка прикосновения, граница множества ∂A, точка накопления или предельная точка, производное множество A', плотное в себе множество, изолированная точка, всюду плотное множество, коплотное множество, нигде не плотное множество, сепарабельное пространство.

II. Проверить, что следующие пары (X, τ) являются топологическими пространствами

X – произвольное множество, $\tau_d = 2^X$ (дискретная топология);

X – произвольное множество, $\tau_a = \{\emptyset, X\}$ (антидискретная топология);

$X = \{a, b\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ или $\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ («связное» двоеточие);

$X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, X\}$ («слипшееся» двоеточие);

$X = \mathbb{R}$, $\tau_e = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall a \in A \;\; \exists \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A\}$ (эвклидова топология на $\mathbb{R}$);

$X = \mathbb{R}$, $\tau_{\rightarrow} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall a \in A \;\; \exists \varepsilon > 0 : [a, a + \varepsilon) \subseteq A\}$ (прямая с топологией «стрелка» или прямая Зоргенфрея);

$X = [0, 1]$, $\tau = \{A \cap [0, 1] : A \in \tau_e\}$ (топология, индуцированная топологией τ_e);

X – бесконечное множество, $\tau = \{A \subseteq X : \text{множество } X \setminus A \text{ конечно}\}$ (топология Зарисского);

Плоскость Немыцкого.

III. Доказать следующие свойства

1. Если $A \subseteq B$, то $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$ и $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$.

   $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$. Показать, что на равенство заменить нельзя.

   $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$. Показать, что на равенство заменить нельзя.

2. $\mathrm{Cl}(\emptyset) = \emptyset$.

   $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$.

   $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$.

   $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$.

3. $\mathrm{Int}(X) = X$.

   $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$.

   $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

$\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))) = \operatorname{Int}(A)$.

4. $\operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Cl}(B) \subseteq \operatorname{Cl}(A \setminus B)$.

   $\operatorname{Int}(A) \setminus \operatorname{Int}(B) \supseteq \operatorname{Int}(A \setminus B)$.

5. $\operatorname{Int}(A) = X \setminus \operatorname{Cl}(X \setminus A)$.

6. Множество всех внутренних точек множества A совпадает с $\operatorname{Int}(A)$.

   Множество всех точек прикосновения множества A совпадает с $\operatorname{Cl}(A)$.

   $\partial A = \operatorname{Cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A)$.

   $\operatorname{Cl}(A) = A \cup \partial A$.

   $\operatorname{Int}(A) = A \setminus \partial A$.

   $X \setminus \partial A = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

7. Найти внутренность отрезка на прямой в топологиях τ_e и $\tau_{\to}$ и топологии Зарисского.

8. $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.

   $\partial(X \setminus A) = \partial A$.

   $\partial(\operatorname{Cl}(A)) \subseteq \partial A$.

   $\partial(\operatorname{Int}(A)) \subseteq \partial A$.

   Проверьте, что если множества A и B удовлетворяют условию $A \cap \operatorname{Cl}(B) = \emptyset = \operatorname{Cl}(A) \cap B$, то $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

9. A замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial A \subseteq A$.

   A открыто тогда и только тогда, когда $\partial A \cap A = \emptyset$.

10. A замкнуто тогда и только тогда, когда $A' \subseteq A$.

    Всегда ли производное множество является замкнутым?

    $A' \setminus A = \partial A \setminus A$.

    $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

11. Для каждого положительного целого n множество $A^{(n)}$, *n-е производное множество* подмножества A топологического пространства X, определяется по индукции формулами $A^{(1)} = A'$, $A^{(n)} = (A^{(n-1)})'$.

Приведите пример множества вещественных чисел, имеющего три различных последовательных производных множества.

Приведите пример множества вещественных чисел, которое имеет бесконечно много отличных друг от друга производных множеств.

12. Множество $A \subseteq X$ называется *каноническим открытым*, если $A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$.

    Привести пример открытого, но не канонического открытого множества.

    Проверьте, что внутренность замкнутого множества есть каноническое открытое множество.

    Покажите, что пересечение двух канонических открытых множеств есть каноническое открытое множество. Для объединения это не всегда верно.

    Проверьте, что для канонических открытых множеств A и B включение $A \subseteq B$ имеет место в том и только том случае, если $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$.

IV. Доказать следующие утверждения

1. Для любого $A \subseteq X$ следующие условия эквивалентны:

   (i) точка x принадлежит $\mathrm{Cl}(A)$;

   (ii) для всякой базы $\mathscr{B}(x)$ в точке x и любого $U \in \mathscr{B}$ имеем $U \cap A \neq \emptyset$;

   (iii) существует база $\mathscr{B}(x)$ в точке x такая, что $U \cap A \neq \emptyset$ для каждого $U \in \mathscr{B}$.

2. Пусть топологическое пространство X обладает первой аксиомой счетности и $M \subseteq X$. Доказать следующую равносильность:

$$x \in \mathrm{Cl}(M) \Leftrightarrow \exists\{x_n \in M : n = 1, 2, \ldots\} \to x.$$

   Привести пример топологического пространства, которое не обладает 1ой аксиомой счетности.

3. Какую топологию плоскость Немыцкого индуцирует на прямую $y = 0$?

4. Доказать, что прямая $\mathbb{R}$ с эвклидовой топологией обладает счетной базой.

5. Доказать, что прямая $\mathbb{R}$ с топологией «стрелка» не обладает счетной базой.

6. Пусть топологическое пространство X обладает счетной базой и $G \subseteq X$ – открытое множество. Доказать, что из любого открытого покрытия G можно выбрать счетное подпокрытие.

7. Доказать, что если топологическое пространство обладает счётной базой, то из любой базы можно выбрать счетную базу.

8. Каждое пространство, удовлетворяющее 2ой аксиоме счётности, сепарабельно.

9. Если A всюду плотно в X, то для любого открытого $U \subseteq X$

$$\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A).$$

   Показать, что нигде не плотное множество является коплотным. Привести пример коплотного, но нигде не плотного множества.

   Проверьте, что объединение коплотного множества и нигде не плотного множества является коплотным множеством. Заметим, что объединение двух коплотных множеств не обязательно коплотно.

   Покажите, что любое открытое подмножество плотного в себе пространства плотно в себе.