Пример несохранения непрерывности операций при факторном гомоморфизме

Пример Свободная топологическая группа $F(\mathbb{Q})$ пространства $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (с обычной топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$) не обладает топологией инд. предела относит. разложения $F(\mathbb{Q}) = \bigcup_{n\in\omega} F^n(\mathbb{Q})$. Следовательно, $F(\mathbb{Q})$ не является топологической факторалгеброй абсолютно свободной топ. Σ-алгебры $W(X)$ (где $\Sigma = \{e, {}^{-1}, \cdot\}$), а значит, образ топ. алгебры $W(X)$ при естественном гомоморфизме $Q\colon W(X) \to F(X)$ с факторной топологией не является топологической Σ-алгеброй (операции не непрерывны).

<u>Набросок доказательства</u>. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ зафиксируем какую-нибудь последовательность $(q_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ рациональных чисел, сходящуюся (в $\mathbb{R}$) к $\sqrt{2}/k$. Для каждого $k \in \omega$ положим

$$Q_k = \{ q_{k,n} \cdot \underbrace{0^{-1}\cdot \tfrac{1}{n} \cdot \ldots \cdot 0^{-1}\cdot \tfrac{1}{n}}_{[k/2]-1 \text{ пар}} : n \in \mathbb{N}\}$$

(здесь $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$; считаем, что $Q_0 = \varnothing$ и $Q_1 = \{q_{1,n} : n\in\mathbb{N}\} = Q_2$. 0 — элемент множества $\mathbb{Q}$. Через ${}^{-1}$ и $\cdot$ здесь обозначены операции в свободной группе $F(\mathbb{Q})$, так что $Q_k \subset F(X)$). Ясно, что $Q_k \subset F^k(\mathbb{Q})$.
Положим $\tilde{Q}_k = \bigcup_{\ell\le k} Q_\ell$ и $\tilde{Q} = \bigcup_{k\in\omega} \tilde{Q}_k$.
Имеем $\tilde{Q}_k = F^k(\mathbb{Q}) \cap \tilde{Q}$.

Несложные вычисления показывают, что каждое множество Q_k замкнуто в $F(\mathbb{Q})$ (если рассмотреть его как подмножество топ. группы $F(\mathbb{R})$, то нетрудно убедиться, что единственной предельной точкой этого множества является $\sqrt{2}/k$, так как каждая последовательность $(0^{-1}\cdot\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к e; значит, в топ. группе $F(\mathbb{Q})$, топология которой сильнее той, что индуцирована из $F(\mathbb{R})$, это множество не имеет пред. точек, так как $\sqrt{2}/k \notin F(\mathbb{Q})$).
Следовательно, $\tilde{Q}_k = \tilde{Q} \cap F^k(\mathbb{Q})$ замкнуто в $F^k(\mathbb{Q})$.

Если бы топология группы $F(\mathbb{Q})$ была топологией индуктивного предела, то множество $\tilde{Q}$ было бы замкнуто в $F(\mathbb{Q})$, но это не так — у него есть предельная точка 0. Действительно, из того, что $0 = 0\cdot e$ и умножение непрерывно, следует, что для любой окрестности U точки 0 в $F(\mathbb{Q})$ существуют окрестности V точки 0 и W точки e такие, что $V\cdot W \subset U$. Поскольку $0 \in \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}$ вложено в $F(\mathbb{Q})$ как подпространство, $V \cap \mathbb{Q}$ — окрестность точки 0 в $\mathbb{Q}$. Любая такая окрестность содержит точки $q_{k,n}$ для достаточно больших k (скажем, для $k \ge k_0$) и n. Поскольку $e = e^{k_0}$, существует окрестность W' точки e в $F(\mathbb{Q})$ такая, что $W'^{k_0} \subset W$. Каждая такая окрестность содержит все точки $0^{-1}\cdot\frac{1}{n}$ для достаточно больших n.

Итак, множество $\tilde{Q}$ не замкнуто в $F(\mathbb{Q})$. Следовательно, $F(\mathbb{Q})$ не является индуктивным пределом своих подпространств $F^k(\mathbb{Q})$.

Итак, вообще говоря, факторные гомоморфизмы не сохраняют непрерывность операций. Однако в многообразиях с производной операцией Мальцева (= с перестановочными конгруэнциями) образы топологических алгебр при факторных гомоморфизмах являются топологическими алгебрами. Это вытекает из следующих леммы и теоремы.

<u>Лемма</u> Пусть A — топ. Σ-алгебра, B — Σ-алгебра с топологией и $h\colon A \xrightarrow{\text{на}} B$ — открытое непр. отобр-е, являющееся гомоморфизмом. Тогда B тоже является топологической Σ-алгеброй (т.е. все операции $\sigma\in\Sigma$ непрерывны на B).

□ Пусть $n\in\mathbb{N}$, $\sigma\in\Sigma_n$, $b_1,\ldots,b_n \in B$ и $b = \sigma(b_1,\ldots,b_n)$. Надо показать, что для любой окрестности V точки b в B существуют окрестности V_i точек b_i такие, что $\sigma(V_1\times\ldots\times V_n) \subset V$.
Пусть $a_1,\ldots,a_n \in A$, $b_i = h(a_i)$, и пусть $a = \sigma(a_1,\ldots,a_n)$.

Отображение открыто, если образ каждого откр. множ-ва открыт.