Топология индуктивного предела

применить тот же трюк, что и выше: заметить, что все $F^n(K)$ компактны и потому замкнуты в $F(K)$, что подгруппа $\langle X\rangle$, порождённая множеством X в $F(K)$, совпадает с $F(X)$ как абстрактная группа, и что $F^n(K)\cap\langle X\rangle = F^n(X)$ (как множ-ва). Следовательно, все $F^n(X)$ замкнуты в $\langle X\rangle^{=F(X)}$ с индуцированной из $F(K)$ топологией. Значит, $F^n(X)$ замкнуты в $F(X)$ и в более сильной топологии свободной группы.

Опр. Пусть X — топ. п-о, X_α, $\alpha\in I$, (любое индексное множество) — его подпр-ва и $X=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$. Говорят, что топология пр-ва X является топологией <u>индуктивного предела</u> относительно разложения $X=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$, если множество $S\subset X$ открыто (замкнуто) в X тогда и только тогда, когда $S\cap X_\alpha$ открыто (замкнуто) в индуцированной топологии пр-ва X_α для каждого $\alpha\in I$.

То, что абсолютно свободная топ. алгебра $W(X)$ (в многообразии всех топ. Σ-алгебр для данной фиксир. сигнатуры Σ) является суммой своих подпространств $W_n(X)$, означает, в частности, что топология алгебры $W(X)$ является топологией индуктивного предела относит. разложения $W(X)=\bigcup_{n\in\omega}W_n(X)$.

Т. (Мальцев) Если X — компакт и $\mathfrak{V}$ — любое полное многообр. топ. алгебр с конечной сигнатурой, то $F_{\mathfrak{V}}(X)$ обладает топологией индуктивного предела относительно разложения $F_{\mathfrak{V}}(X)=\bigcup_{n\in\omega}F^n_{\mathfrak{V}}(X)$.

Доказательство у этой теоремы длинное и техническое (оно сводится к доказательству того, что все операции непрерывны относительно топологии индуктивного предела. В общем случае это неверно (см. ниже).

Пример факторалгебры с разрывными операциями (начало)

Мы почти готовы привести пример топ. алгебры, факторалгебра которой не является топ. алгеброй относительно факторной топологии. Для этого нужна лемма.

Лемма. Пусть топ. пр-во $X=\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$ обладает топологией индуктивного предела и $f\colon X\to Y$ — факторное отображение. Тогда Y обладает топологией инд. предела относительно разложения $Y=\bigcup_{\alpha\in I}f(X_\alpha)$.

□ Пусть $U\subset Y$ таково, что $U\cap f(X_\alpha)$ открыто в $f(X_\alpha)$ для каждого $\alpha\in I$. Тогда $f^{-1}(U\cap f(X_\alpha))\cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha\in I$, потому что сужение $f_\alpha=f|_{X_\alpha}$ непрерывно и $f^{-1}(U\cap f(X_\alpha))\cap X_\alpha = f_\alpha^{-1}(U)$. Поскольку $f^{-1}(U\cap f(X_\alpha))\cap X_\alpha = f^{-1}(U)\cap X_\alpha$ и X имеет топологию инд. предела, множество $f^{-1}(U)$ открыто в X. Из факторности отображения f вытекает, что U открыто в Y. ■

Теперь предположим, что нам удалось найти тихоновское пространство X, для которого топология свободной топологической группы $F(X)$ не является топологией инд. предела относительно разложения $F(X)=\bigcup_{n\in\omega}F^n(X)$. Пусть Σ — сигнатура групп (т.е. $\Sigma=\{e,{}^{-1},\cdot\}$) и $W(X)$ — абсолютно свободная топ. алгебра в многообразии всех топ. Σ-алгебр. Как абстрактная алгебра $F(X)$ является факторалгеброй алгебры $W(X)$. Пусть $Q\colon W(X)\to F(X)$ — естественный гомоморфизм. Сужение этого гом-ма на X — тождественный гомеоморфизм. Топология группы $F(X)$ не является топологией инд. предела, значит, Q не факторно (но непрерывно). Значит, топология группы $F(X)$ слабее факторной. С другой стороны, это самая сильная топология из всех, относительно которых операции непрерывны и X гомеоморфно вложено в $F(X)$. Поскольку X гомеоморфно вложено в $F(X)$ с факторной топологией, отсюда вытекает, что операции на $F(X)$ не непрерывны относительно факторной топологии.