Следствие 2 | Пусть $\mathcal{V}$ — любое как обычно, нетривиальное многообразие топ. алгебр. Тогда всякое тихоновское пространство X содержится в свободной топологической алгебре $F_{\mathcal{V}}(X)$ в качестве подпространства.

□ Как мы знаем, $\overline{\overline{\mathcal{V}}}$ — многообразие абстрактных алгебр и $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)} \cong F_{\overline{\overline{\mathcal{V}}}}(X)$. Ещё мы знаем, что топология алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ — самая сильная из всех топологий, согласованных со всеми операциями и индуцирующих на X топологию, содержащуюся в заданной. В силу предыдущего следствия одна из таких топологий индуцирует на X заданную топологию пространства X. Значит, топология свободной алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ тоже её индуцирует. ▨

Утв | Для любого многообразия $\mathcal{V}$ топологических алгебр всякое тихоновское пространство X замкнуто в своей свободной топ. алгебре $F_{\mathcal{V}}(X)$.

□ Пусть K — любой хаусдорфов компакт, содержащий X в качестве подпространства (для тихоновского X такой компакт всегда существует: например, диагональное произведение Δf_α всех непрерывных функций $f_\alpha\colon X \to [0,1]$ осуществляет вложение X в произведение отрезков, которое компактно по теореме Тихонова о произведении компактов). Обозначим через $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$ свободную алгебру $F_{\overline{\overline{\mathcal{V}}}}(K)$ с топологией, порождённой продолжениями псевдометрик по Сверчковскому. Она тихоновская (см. следствие 1), а значит, хаусдорфова, и $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$ содержит компакт K в качестве подпространства. Значит, K замкнут в $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$. Подалгебра $\langle X\rangle$ алгебры $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$, порождённая множеством X, изоморфна свободной алгебре $F_{\overline{\overline{\mathcal{V}}}}(X)$ (как абстрактная алгебра), причём $\langle X\rangle \cap K = X$. Ясно, что все операции на $\langle X\rangle$

непрерывны относительно индуцированной из $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$ топологии и X — замкнутое подпространство алгебры $\langle X\rangle$, так как K — замкнутое подпр-во алгебры $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$. Свободная топ. алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ отличается от $\langle X\rangle$ с индуцированной топологией лишь тем, что на $F_{\mathcal{V}}(X)$ другая топология — она сильнее топологии алгебры $\langle X\rangle$, а как абстрактные алгебры эти алгебры совпадают. Значит, всё, что замкнуто в $\langle X\rangle$, остаётся замкнутым и в $F_{\mathcal{V}}(X)$; в частности, подпр-во X замкнуто в $F_{\mathcal{V}}(X)$. ▨

В случае конечной сигнатуры это же рассуждение доказывает замкнутость и некоторых других подмножеств алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$. В качестве примера рассмотрим свободную топологическую группу $F(X)$. Как известно, её можно представлять себе либо как множество несократимых слов вида $x_1^{\varepsilon_1}\dots x_n^{\varepsilon_n}$, где $n\in\omega$, $x_i \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$ (случаю $n=0$ соответствует пустое слово e), либо как множество произвольных слов такого вида (в этом случае следует объявить слова, которые можно получить друг из друга вставкой и удалением пар соседних букв вида xx^{-1} и $x^{-1}x$, равными). Число n называется <u>длиной</u> слова. Множество $F(X)$ естественно представляется как $F(X) = \bigcup\limits_{n\in\omega} F^n(X)$, где $F^n(X)$ — множество всех слов длины $\le n$. Обозначим через X^{-1} гомеоморфную копию пространства X, не пересекающуюся с X, и положим $\tilde{X} = X \oplus X^{-1} \oplus \{e\}$. Для каждого n подпр-во $F^n(X)$ свободной группы $F(X)$ является образом пространства $\tilde{X}^n$ при естественном отображении умножения $i_n\colon (\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) \mapsto \tilde{x}_1\cdot\ldots\cdot\tilde{x}_n$, где $\tilde{x}_i \in \tilde{X}$. Это отображение непрерывно, так как умножение и инверсия в $F(X)$ непрерывны. Если X компактно, то отсюда вытекает, что все $F^n(X)$ компактны и потому замкнуты в $F(X)$, а если нет, то мы можем вложить X в компакт K и