След. 2 | Пусть $\mathcal{V}$ — любое (как обычно, нетривиальное) многообразие топ. алгебр. Тогда всякое тихоновское пространство X содержится в свободной топологической алгебре $F_{\mathcal{V}}(X)$ в качестве подпространства.

□ Как мы знаем, $\overline{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр и $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)} \cong F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$. Ещё мы знаем, что топология алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ — самая сильная из всех топологий, согласованных со всеми операциями и индуцирующих на X топологию, содержащуюся в заданной. В силу предыдущего следствия одна из таких топологий индуцирует на X заданную топологию пространства X. Значит, топология свободной алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ тоже её индуцирует. ▨

Утв | Для любого многообразия $\mathcal{V}$ топологических алгебр всякое тихоновское пространство X замкнуто в своей свободной топ. алгебре $F_{\mathcal{V}}(X)$.

□ Пусть K — любой хаусдорфов компакт, содержащий X в качестве подпространства (для тихоновского X такой компакт всегда существует: например, диагональное произведение Δf_α всех непрерывных функций $f_\alpha : X \to [0,1]$ осуществляет вложение X в произведение отрезков, которое компактно по теореме Тихонова о произведении компактов). Обозначим через $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$ свободную алгебру $F_{\overline{\mathcal{V}}}(K)$ с топологией, порождённой продолжениями псевдометрик по Сверчковскому. Она тихоновская (см. следствие 1), а значит, хаусдорфова, и $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$ содержит компакт K в качестве подпространства. Значит, K замкнут в $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$. Подалгебра $\langle X \rangle$ алгебры $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$, порождённая множеством X, изоморфна свободной алгебре $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ (как абстрактные алгебры), причём $\langle X \rangle \cap K = X$. Ясно, что все операции на $\langle X \rangle$

непрерывны относительно индуцированной из $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$ топологии и X — замкнутое подпространство алгебры $\langle X \rangle$, т. к. K — замкнутое подпространство алгебры $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(K)$. Свободная топ. алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ отличается от $\langle X \rangle$ с индуцированной топологией лишь тем, что на $F_{\mathcal{V}}(X)$ другая топология — она сильнее топологии алгебры $\langle X \rangle$, а как абстрактные алгебры эти алгебры совпадают. Значит, всё, что замкнуто в $\langle X \rangle$, остаётся замкнутым и в $F_{\mathcal{V}}(X)$, в частности, подпространство X замкнуто в $F_{\mathcal{V}}(X)$. ▨

В случае конечной сигнатуры это же рассуждение доказывает замкнутость и некоторых других подмножеств алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$. В качестве примера рассмотрим свободную топологическую группу $F(X)$. Как известно, её можно представлять себе как множество несократимых слов вида $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, где $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ и $n \in \omega$ (случаю $n = 0$ соответствует пустое слово e). (Можно допустить и сократимые слова; тогда следует объявить слова, которые можно получить друг из друга вставкой и удалением сокращающихся пар вида $x^{-1}x$ и xx^{-1}, равными.) Число n называется длиной слова. Множество $F(X)$ естественно представляется как $F(X) = \bigcup_{n \in \omega} F^n(X)$, где $F^n(X)$ — множество всех слов длины $\le n$. Из непрерывности умножения следует, что для каждого n подпространство $F^n(X)$ свободной группы $F(X)$ является образом пространства $(X \oplus X^{-1})^n$ при естественном непрерывном отображении умножения $i_n : (x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_n^{\varepsilon_n}) \mapsto x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$. Здесь X^{-1} — гомеоморфная копия пространства X, не пересекающая X. Если X компактно, то отсюда вытекает, что все $F^n(X)$ компактны и потому замкнуты в $F(X)$, а если нет, то мы можем вложить X в компакт и применить тот же трюк, что и выше, и увидеть, что $F^n(X)$ всё равно замкнуты