T Сверчковский

Псевдометрика — то же, что метрика, но расстояние между одними точками может быть нулевым

Теорема Сверчковского

Пусть X — топ. пр-во, d_X — непрерывная псевдометрика на X, $\mathfrak{V}$ — многообразие абстрактных алгебр и $F_{\mathfrak{V}}(X)$ — абстрактная свободная алгебра над множеством X. Тогда на $F_{\mathfrak{V}}(X)$ существует псевдометрика d со свойствами:

1) $d|_{X\times X} = d_X$;
2) все операции непрерывны относительно топологии, порождённой псевдометрикой d на $F_{\mathfrak{V}}(X)$;
3) для любого $\alpha\in F_{\mathfrak{V}}(X)$ и любого достаточно маленького $\varepsilon>0$ ε-окрестность (относительно d) элемента α состоит из всех $\beta\in F_{\mathfrak{V}}(X)$, для которых существуют терм t, зависящий от n переменных, и точки $x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_n\in X$ такие, что $\alpha=t(x_1,\dots,x_n)$, $\beta=t(y_1,\dots,y_n)$ и

(*) $\sum_{i=1}^{n} d_X(x_i,y_i)<\varepsilon$.

Доказательство сводится к тому, что сначала определяется функция $\tilde d$ на $F_{\mathfrak{V}}(X)\times F_{\mathfrak{V}}(X)$ как инфимум всех выражений (*) по всем термам t и точкам x_i, y_i, для которых $\alpha=t(x_1,\dots,x_n)$ и $\beta=t(y_1\dots y_n)$, а потом доказывается (с помощью неравенства треугольника), что инфимум достигается и что получившаяся функция действительно является псевдометрикой с нужными свойствами.

След. 1 Если X — тихоновское (т.е. вполне регулярное) пространство и $\mathfrak{V}$ — любое многообразие абстрактных алгебр, то на $F_{\mathfrak{V}}(X)$ существует тихоновская топология $\mathcal{T}$ такая, что X содержится в $(F_{\mathfrak{V}}(X),\mathcal{T})$ в качестве подпространства.

□ Топологическое пространство X является тихоновским тогда и только тогда, когда в нём все конечные множества замкнуты (т.е. X является T_1-простр-а)

и топология X порождается непрерывными псевдометриками в том смысле, что существует семейство $\mathfrak{D}$ псевдометрик на X такое, что все $d\in\mathfrak{D}$ непрерывны и множество шаров $\{B_d(x,\varepsilon): x\in X, \varepsilon>0, d\in\mathfrak{D}\}$ образует базу топологии пространства X. Действительно, если X тихоновское (т.е. $X\in T_1$ и $X\in T_{3\frac12}$; последнее означает, что $\forall x\in X$ и $\forall U_x$ — окрестности точки x — $\exists$ непрерывная функция $f: X\to[0,1]$, $f(x)=0$, $f|_{X\setminus U_x}\equiv 1$), то в качестве $\mathfrak{D}$ можно взять семейство всех псевдометрик, определённых формулами $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ для всех непрерывных $f: X\to[0,1]$; обратно, если семейство $\mathfrak{D}$ существует, то функциями, существование которых требуется в определении тихоновости, являются $f(y)=\min\{\frac{d(x,y)}{\varepsilon},1\}$, где d — псевдометрика из $\mathfrak{D}$ со свойством $B_d(x,\varepsilon)\subset U_x$. (Она существует, потому что по предположению существуют $d\in\mathfrak{D}$, $x'\in X$ и $\varepsilon'>0$, для которых $x\in B_d(x',\varepsilon')\subset U_x$; имеем $d(x,x')<\varepsilon'$, и в силу неравенства треугольника $B_d(x, \underbrace{\varepsilon'-d(x,x')}_{\varepsilon})\subset B_d(x',\varepsilon')\subset U_x$).

Продолжив все псевдометрики $d\in\mathfrak{D}$ на $F_{\mathfrak{V}}(X)$ в соответствии с теоремой Сверчковского, мы получим семейство $\hat{\mathfrak{D}}$ псевдометрик на $F_{\mathfrak{V}}(X)$, каждая из которых порождает на $F_{\mathfrak{V}}(X)$ топологию, согласованную со всеми операциями и порождающую на X топологию, содержащуюся в заданной топологии пространства X. Взяв супремум всех этих топологий, мы получим топологию на $F_{\mathfrak{V}}(X)$, которая порождается семейством псевдометрик $\hat{\mathfrak{D}}$ и потому удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac12}$. Ясно, что она индуцирует заданную топологию пространства X на X. Из свойств продолжения псевдометрики по Сверчковскому несложно усмотреть, что эта топология удовлетворяет также аксиоме T_1, т.е. является тихоновской. ▨