Продолжаем в том же духе. Пусть $n>1$ и для меньших $n$ пространства $W_n(X)$ определены. Полагаем

$$W_n(X) = \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\max\{k_1,\dots,k_j\}=n-1} \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_j} (W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X))_\sigma$$

В каждом слагаемом $(W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X))_\sigma$ каждый элемент каждого сомножителя $W_{k_i}(X)$ отождествлен с некоторым термом $t_i\in T_{k_i}(X)$, и $j$-ка $(t_1,\dots,t_j)_\sigma \in (W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X))_\sigma$ отождествляется с $\sigma(t_1,\dots,t_j)$.

указывает индекс слагаемого, содержащего $(t_1,\dots,t_j)$.

Окончательно полагаем $W(X) = \bigoplus_{n\in\omega} W_n(X)$.

Операции на $W(X)$ определяются естественным образом: для $\sigma\in\Sigma_j$ и любых $t_1,\dots,t_j\in W(X)$ ищем те $k_1,\dots,k_j\in\omega$, для которых $t_i\in W_{k_i}(X)$ (они определены однозначно, так как все слагаемые, участвующие в определении $W_n(X)$, попарно не пересекаются). Полагаем $k=\max\{k_1,\dots,k_j\}+1$ и $\sigma(t_1,\dots,t_j) = (t_1,\dots,t_j)_\sigma \in (W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X))_\sigma \subset W_k(X)\subset W(X)$.

Поскольку $W(X)$ — топологическая сумма подпространств $W_k(X)$, для любого $j\in\mathbb{N}$ степень $W(X)^j$ — топологическая сумма $j$-х степеней этих подпространств и их произведений (в количестве $j$ штук) вида $W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X)$. Понятно, что сужение операции $\sigma$ на каждое такое слагаемое — это гомеоморфизм между $W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X)$ и $(W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X))_\sigma\subset W(X)$. Следовательно, все $\sigma\in\Sigma$ непрерывны.

У нас получилась топологическая алгебра $W(X)$, причём $X$ содержится в $W(X)$ в качестве подпространства и порождает $W(X)$. Проверим выполнение универсального свойства.

Пусть $f\colon X\to A$ — любое непрерывное отображение из $X$ в топологическую $\Sigma$-алгебру $A$ (любую).



Определим продолжение $f$ до гомоморфизма $\hat f\colon W(X)\to A$. Будем строить его по индукции, определяя по очереди сужения $\hat f_n = \hat f|_{W_n(X)}\colon W_n(X)\to A$ для $n\in\mathbb{N}$.

Каждому $\sigma\in\Sigma_0$ соответствует какой-то фиксированный эл-т $a_\sigma$ алгебры $A$. Для $x\in W_1(X)=X\oplus\Sigma_0$ положим $\hat f_1(x)=\begin{cases} a_\sigma, & \text{если } x=\sigma\in\Sigma_0,\\ f(x), & \text{если } x\in X.\end{cases}$

Это отображение непрерывно на $W_1(X)$, так как оно непрерывно на каждом из открыто-замкнутых слагаемых $X$ и $\Sigma_0$ (напомним, что $\Sigma_0$ дискретно). Пусть $n>1$ и для меньших $n$ непрерывные отображения $\hat f_n\colon W_n(X)\to A$ определены. Пространство $W_n(X)$ является топологической суммой слагаемых $(W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X))_\sigma$, где $j>0$, $\max\{k_1,\dots,k_j\}=n-1$ и $\sigma\in\Sigma_j$. Для $(t_1,\dots,t_j)_\sigma\in(W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X))_\sigma$ положим $\hat f_n((t_1,\dots,t_j)_\sigma) = \sigma(\hat f_{k_1}(t_1),\dots,\hat f_{k_j}(t_j))\in A$. В результате мы получим отображение $\hat f_n\colon W_n(X)\to A$. Оно непрерывно, так как его сужение на каждое открыто-з-е слагаемое $(W_{k_1}(X)\times\dots\times W_{k_j}(X))_\sigma$ непрерывно в силу непрерывности отображений $\hat f_{k_i}$ и операции $\sigma$ (на $A$).

Объединяя все отображения $\hat f_n$ в одно отображение $\hat f\colon W(X)=\bigoplus_{n\in\omega} W_n(X)\to A$, мы получим искомый гомоморфизм.

Итак, $W(X)$ — абсолютно свободная топологическая $\Sigma$-алгебра над $X$. Как мы знаем, каждая абстрактная $\Sigma$-алгебра является фактор алгеброй абсолютно свободной абстрактной $\Sigma$-алгебры над некоторым множеством. Естественно ожидать, что аналогичное утверждение верно и для топологических алгебр, однако это не так. Немного дальше мы приведём соответствующий пример, но сначала сформулируем (без доказательства) полезную теорему.