Соглашение Согласно доказанному утверждению для любого нетривиального (а мы только такие и рассматриваем) многообразия $\mathcal{V}$ топологических алгебр отображение $i_X : X \to F_{\mathcal{V}}(X)$ инъективно для любого непустого топологического пространства X. В дальнейшем мы будем считать, что как множество X содержится в $F_{\mathcal{V}}(X)$ (хотя индуцированная из $F_{\mathcal{V}}(X)$ на X топология может быть строго слабее, чем топология пространства X) и $i_X : X \to F_{\mathcal{V}}(X)$ — непрерывное (не гомеоморфное!) тождественное вложение.

Утв. Для любого многообразия $\mathcal{V}$ топ. алгебр и любого топ. пр-ва X топология свободной топ. алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ — самая сильная из всех топологий на $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$, относительно которых все операции непрерывны и которые индуцируют на множестве X топологию, содержащуюся в заданной топологии пространства X. т.е. слабее (нестрого) заданной топ-и

□ Пусть $\mathcal{T}$ — топология свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ и $\mathcal{T}'$ — любая другая топология на $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$, относительно кот-й все операции непрерывны и которая индуцирует на X топологию, содержащуюся в исходной. Обозначим через $\mathcal{T}_X$ топологию пр-ва X, через $\mathcal{T}'_X$ — топологию, которую $\mathcal{T}'$ индуцирует на X, и через $\tilde{\mathcal{T}}_X$ — топологию, которую на X индуцирует $\mathcal{T}$. По определению свободной топ. алгебры для тождественного отображения $id : (X, \mathcal{T}_X) \to (X, \mathcal{T}'_X)$ (которое непрерывно, так как $\mathcal{T}'_X \subset \mathcal{T}_X$) существует непрерывный гомоморфизм $h : F_{\mathcal{V}}(X) \to (\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}, \mathcal{T}')$, для которого $id = h \circ i_X$. Понятно, что гом-м h тождественный, так как id и i_X — тождественные отображения мн-ва X в себя. Осталось показать, что $\mathcal{T}'_X \subset \tilde{\mathcal{T}}_X$. Это немедленно следует из того, что $h|_X$ — непрерывное тождественное отображение $(X, \tilde{\mathcal{T}}_X) \to (X, \mathcal{T}'_X)$. ■

Абсолютно свободная топологическая алгебра

Пусть X — топ. пр-во и Σ — сигнатура. Обозначим через $\mathcal{W}$ многообразие всех топологических Σ-алгебр. Как обычно, в дальнейшем будем считать сигнатуру фиксированной и называть Σ-алгебры просто алгебрами.

Напомним, что через $T(X)$ мы обозначаем алгебру всех термов над X, т.е. абсолютно свободную (абстрактную) алгебру над X. Согласно доказанной теореме в многообразии $\mathcal{W}$ существует свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{W}}(X)$ — абсолютно свободная топ. алгебра над X, причём $\overline{F_{\mathcal{W}}(X)} \cong T(X)$. У неё есть простое описание. Для удобства будем обозначать $F_{\mathcal{W}}(X)$ через $W(X)$. Напомним, что $\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$, где Σ_n — множество символов n-арных операций.

Положим $W_0(X) = \Sigma_0$ с дискретной топологией и $W_1(X) = \Sigma_0 \oplus X$ (здесь $\oplus$ обозначает топологическую сумму — объединение непересекающихся гомеоморфных копий пространств, в котором каждое слагаемое является открыто-замкнутым подпространством).

Определим пространство $W_2(X)$. Его элементы будут соответствовать термам второй ступени (элементам мн-ва $T_2(X)$). Каждый такой терм имеет вид $\sigma(x_1, \dots, x_j)$, где $\sigma \in \Sigma_{j>0}$ и $x_i \in X \cup \Sigma_0 = W_1(X)$. Для каждой фиксированной операции $\sigma \in \Sigma_j$, где $j > 0$, мы отождествим каждый терм $\sigma(x_1, \dots, x_j)$ с j-кой $(x_1, \dots, x_j) \in W_1(X)^j$ и множество всех таких термов — с множеством $W_1(X)^j$. Снабдим это мн-во стандартной топологией произведения. Мы определили топологию на мн-ве всех термов вида $\sigma(x_1, \dots, x_j)$. Чтобы отметить, что это множество соответствует операции σ, мы будем обозначать его $W_1(X)^n_\sigma$ или $(\underbrace{W_1(X) \times \dots \times W_1(X)}_{j \text{ раз}})_\sigma$. Положим $W_2(X) = \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} W_1(X)^j_\sigma$. Каждый эл-т мн-ва $W_2(X)$ — это j-ка из своего экземпляра $W_1(X)^j$ (с номером σ), он отождествляется с термом $\sigma(x_1, \dots, x_j)$.

Чтобы указать, что данная j-ка $(x_1, \dots, x_j)$ принадлежит слагаемому $W_1(X)^j_\sigma$ с конкретным индексом σ, мы будем писать $(x_1, \dots, x_j)_\sigma$.