Существование свободной топологической алгебры | 3

Как-нибудь заиндексируем все непрерывные отображения $X \to A \in \mathfrak{A}$; получится мн-во $\{f_\iota : X \to A_\iota : \iota \in I\}$ (I — индексное мн-во). Одна и та же алгебра $A \in \mathfrak{A}$ может получить несколько индексов, но это неважно. Положим $\tilde{i} = \Delta_{\iota\in I} f_\iota : X \to \prod_{\iota \in I} A_\iota$ и обозначим через $A(X)$ подалгебру алгебры $\prod_{\iota\in I} A_\iota$, порождённую множеством $\tilde{i}(X)$. Через i обозначим то же самое отображение $\tilde{i}$, но рассматриваемое не как отображение $X \to \prod_{\iota\in I} A_\iota$, а как отображение $X \to A(X)$. Покажем, что алгебра $A(X)$ вместе с отображением i обладает нужными свойствами.

Во-первых, ясно (по определению), что $A(X)$ порождена множеством $i(X)$.

Универсальное свойство тоже выполнено. Действительно, пусть $f : X \to B \in \mathcal{V}$ — непрерывное отображение, и пусть B' — подалгебра (топологическая, разумеется) алгебры B, порождённая мн-м $f(X)$. Она топологически изоморфна некоторой алгебре $A \in \mathfrak{A}$ (так мы определяли мн-во $\mathfrak{A}$). Пусть $\psi : B' \to A$ — топологический изоморфизм. Непрерывное отображение $\psi \circ f : X \to A$ — это одно из отображений $f_{\iota_0} : X \to A_{\iota_0}$ (где $A_{\iota_0} = A$). По определению диагонального произведения $f_{\iota_0} = \pi_{\iota_0} \circ \tilde{i}$, где $\pi_{\iota_0} : \prod_{\iota\in I} A_\iota \to A_{\iota_0}$ — проектирование. Понятно, что проектирование — гомоморфизм, и притом непрерывный. Значит, сужение $\pi_{\iota_0}|_{A(X)}$ — тоже непрерывный гомоморфизм, также как и композиция $\psi^{-1} \circ \pi_{\iota_0}|_{A(X)}$. Положим $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \pi_{\iota_0}|_{A(X)}$. Поскольку $f_{\iota_0} = \pi_{\iota_0} \circ \tilde{i}$ и $\tilde{i}$ совпадает с i (у этих отображений только области значений разные, но это ни на что не влияет) имеем $\psi \circ f = f_{\iota_0} = \pi_{\iota_0} \circ i = \pi_{\iota_0}|_{i(X)} \circ i = \pi_{\iota_0}|_{A(X)} \circ i$ (так как $i(X) \subset A(X)$). Следовательно, $f = \psi^{-1} \circ \pi_{\iota_0}|_{A(X)} \circ i = \hat{f} \circ i$. ▨

Несущая алгебра свободной топологической алгебры является свободной абстрактной алгеброй | 3

Отныне будем обозначать свободную топ. алгебру над топ. пр-м X в данном многообразии $\mathcal{V}$ топ. алгебр через $F_{\mathcal{V}}(X)$ или $(F_{\mathcal{V}}(X), i_X)$, где $i_X = i$ — соответствующее отображение $i : X \to F_{\mathcal{V}}(X)$ из определения свободной топ. алгебры.

Напомним, что двумя чертами сверху мы обозначаем несущие алгебры и многообразия данных топ. алгебр и многообразий, т. е. те же алгебры и многообразия, но без топологии.

мы договорились рассматривать только такие

Утв. Пусть $\mathcal{V}$ — (нетривиальное) многообразие топ. алгебр, X — топ. пр-во и $(F_{\mathcal{V}}(X), i_X)$ — свободная топ. алгебра над X в $\mathcal{V}$. Тогда
(i) отображение $i_X : X \to F_{\mathcal{V}}(X)$ инъективно
(ii) $\overline{\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}}$ — свободная алгебра над мн-вом $i_X(X)$ в многообразии $\overline{\overline{\mathcal{V}}}$, так что $\overline{\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}}$ изоморфна абстрактной свободной алгебре над мн-м X в $\overline{\overline{\mathcal{V}}}$.

□ Как мы знаем, $\overline{\overline{\mathcal{V}}}$ — многообразие абстрактных алгебр. Пусть $F_{\overline{\overline{\mathcal{V}}}}(X)$ — свободная алгебра над мн-м X в $\overline{\overline{\mathcal{V}}}$. Из нетривиальности многообразия $\overline{\overline{\mathcal{V}}}$ следует, что $X \subset F_{\overline{\overline{\mathcal{V}}}}(X)$ (и X порождает алгебру $F_{\overline{\overline{\mathcal{V}}}}(X)$). Из доказанного пять страниц назад утверждения следует, что $F_{\overline{\overline{\mathcal{V}}}}(X)$ с антидискретной топологией принадлежит многообразию $\mathcal{V}$. Обозначим эту антидискретную топ. алгебру через $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$. Тождественное отображение $\tilde{i} : X \to \tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$ (помним, что $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$ содержит X, но как подмн-во, а не подпространство; на этом подмножестве индуцированная топология антидискретна) непрерывно, потому что любое отображение откуда угодно в антидискретное пр-во непрерывно. Значит, существует непрерывный гомоморфизм $h : F_{\mathcal{V}}(X) \to \tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$ такой, что $\tilde{i} = h \circ i$. Из инъективности отображения $\tilde{i}$ немедленно вытекает инъективность отображения i. Поскольку $i(X)$ порождает $F_{\mathcal{V}}(X)$ и $X = h(i(X))$ порождает $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$, гомоморфизм h сюръективен. Алгебра $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$ свободна (как абстрактная) $\Rightarrow \exists$ гом-м $g : \tilde{F}_{\mathcal{V}}(X) \to F(X)$, продолжающий i (не обязат. непрерывный). Легко показать, что $g = h^{-1}$. ▨