Свободные топологические алгебры

Напомним, что абстрактная свободная алгебра над X в данном многообразии абстрактных алгебр содержит множество X (в качестве подмножества) и порождается этим множеством. Естественно попытаться определить свободную топологическую алгебру над топологическим пространством X в данном многообразии топ. алгебр так, чтобы она содержала X в качестве подпространства (и порождалась этим подпространством в алгебраическом смысле). Однако так не получится, потому что, например, если $X \notin T_3$, то X нельзя вложить (как подпространство) ни в какую топологическую левую лупу: мы доказали выше, что любая топ. левая лупа удовлетворяет аксиоме отделимости T_3, а это свойство наследуется подпространствами. Поэтому нужно использовать более общее определение:

Опр. свободной топ. алгебры

Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топ. алгебр и X — топ. пр-во. Свободная топологическая алгебра над X в многообразии $\mathcal{V}$ — это топ. алгебра $A(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $i: X \to A(X)$ со след. св-ми: $\boxed{\text{Обозначение: } (F_{\mathcal{V}}(X), i) \text{ или } F_{\mathcal{V}}(X)}$

- $A(X)$ порождается множеством $i(X)$;
- универсальное свойство → для любого непрерывного отображения $f: X \to B \in \mathcal{V}$ существует непр. гом-м $h: A(X) \to B$ т., что $f = h \circ i$.

Зам. Любые две свободные алгебры $(A(X), i)$ и $(A'(X), i')$ топологически изоморфны; точнее, существует топологический изом-м $\psi: A(X) \to A'(X)$ такой, что $i' = \psi \circ i$. Это доказывается дословно так же, как в абстрактном случае.

Док-во существования своб. топ. алгебры тоже аналогично док-ву существования свободной (абстрактной) алгебры. Мы немного изменим док-во, чтобы обойтись без абсолютно свободной топ. алгебры.

Т. Для любого топ. пр-ва X и любого многообразия $\mathcal{V}$ топ. алгебр существует свободная топ. алгебра над X в многообразии $\mathcal{V}$.

Считаем сигнатуру Σ подразумевающейся

□ Нам нужно построить топ. алгебру $A(X)$ и непр. отображение $i: X \to A(X)$ так, что $\forall$ непр. $f: X \to A \in \mathcal{V}$ $\exists$ гомом-м $\hat{f}: A(X) \to A$, который непрерывен и удовлетворяет условию $f = \hat{f} \circ i$.

Во-первых, достаточно научиться строить $\hat{f}$ для отображений $f: X \to A$ с тем свойством, что A порождается образом $f(X)$, потому что если нужный гом-м $\hat{f}$ существует, то $\hat{f}(i(X)) = f(X)$ и $\hat{f}(A(X))$ — подалгебра алгебры A, порождённая множеством $i(X)$, так что дополнение в A до этой подалгебры ни на что не влияет. Таким образом, нас интересуют только непр. отображения пр-ва X в топ. алгебры $A \in \mathcal{V}$ мощности, не превосходящей $\kappa = (|X| + |\Sigma|) \cdot \aleph_0$. Мощность топологии любого топ. пр-ва Y мощности $|Y| \le \kappa$ не превосходит 2^κ, так как топология — это сем-во подмн-в мн-ва Y. Значит, вес $w(Y)$ (наименьшая мощность базы топологии) тоже не превосходит 2^κ. Известный факт из общей топологии: любое топ. пр-во Y веса $\le 2^\kappa$ и мощности $\le 2^{2^\kappa}$ вкладывается в качестве подпространства в тихоновскую степень E^{2^κ}, где E — мн-во $\{0, 1, 2\}$ с топологией $\{\varnothing, \{0\}, \{0,1,2\}\}$. Таким образом, нас интересуют только A, которые вкладываются (как подпр-ва) в E^{2^κ}. На подпр-вах пр-ва E^{2^κ} операции — отображения из конечных степеней этих подпространств в сами подпр-ва, т.е. подмножества (конечных) декартовых произведений $(E^{2^\kappa})^n \times E^{2^\kappa} = (E^{2^\kappa})^{n+1}$. Все такие отображения образуют множество (не собственный класс). Значит, каждая интересующая нас алгебра A топологически изоморфна топ. алгебре из некоторого множества (не класса) $\mathcal{A}$.

Пр-во E^{2^κ} — аналог мн-ва Z из док-ва теоремы Биркгофа (для абстрактных алгебр)

Итак, нам нужно научиться обрабатывать все непрерывные отображения $X \to A \in \mathcal{A}$.