<u>Примеры</u>

1. Класс всех хаусдорфовых топ. групп — не многообразие топ. алгебр.
2. Класс всех предкомпактных топ. групп (т.е. тех, которые вкладываются в компактные топ. группы в качестве топ. подгрупп) — многообразие топ. алгебр (широкое, но не полное)
3. Класс всех топ. групп — полное многообразие.
4. Класс $\mathcal{K}$ топ. алгебр с антидискретной топологией — многообр. топ. алгебр $\Leftrightarrow$ $\bar{\bar{\mathcal{K}}}$ — многообр-е абстрактных алгебр.

<u>Зам.</u> Любая Σ-алгебра A, снабжённая антидискретной топологией (открыты только $\varnothing$ и A), является топологической. Любая Σ-алгебра A, снабжённая дискретной топологией (открыты все подмножества A), является топологической.

<u>Утв.</u> Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топ. алгебр и $A \in \mathcal{V}$. Пусть B — топ. алгебра с антидискретной топологией такая, что $\bar{\bar{B}} \cong \bar{\bar{A}}$. Тогда $B \in \mathcal{V}$.

□ Будем считать без ограничения общности, что $\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{A}}$. Рассмотрим топологическую подалгебру C произведения $A^{\mathbb{N}}$, состоящую из всех последовательностей $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in A$, которые стабилизируются, т.е. принимают постоянное значение начиная с некоторого момента. Определим отображение $h: C \to B$, которое каждой такой последовательности ставит в соответствие это постоянное значение. Ясно, что h — непрерывный гомоморфизм. Покажем, что этот гомоморфизм также и открыт, т.е. переводит открытые множества в открытые. Открытое множество в C может быть пустым или непустым. Пустое множество переходит в пустое, а любое непустое содержит непустое множество вида $(U_1 \times \ldots \times U_k \times A \times A \times \ldots) \cap C$, где $k \in \mathbb{N}$ и U_i — открытые подмн-ва в A. Ясно, что постоянные "хвосты" стабилизирующихся последовательностей в этом мн-ве могут быть любыми. Значит,

образом этого множества при h является вся алгебра B. Следовательно, образ при h любого открытого подмн-ва алгебры C — это либо $\varnothing$, либо B, т.е. он открыт в B.

Из критерия факторности сюръективного гомоморфизма (множество открыто в образе $\Leftrightarrow$ его полный прообраз открыт в прообразе) немедленно вытекает, что всякий открытый гом-м является факторным. Значит, B является образом при факторном гом-ме алгебры C. Из того, что $A \in \mathcal{V}$, следует, что $A^{\mathbb{N}} \in \mathcal{V}$, $C \in \mathcal{V}$ и $B \in \mathcal{V}$. ■

<u>След.</u> Если $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, то $\bar{\bar{\mathcal{V}}}$ — многообразие абстрактных алгебр.

□ Обозначим через $\mathcal{W}$ класс всех топологических алгебр B с антидискретной топологией, для которых существует $A \in \mathcal{V}$ такая, что $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$. В силу доказанного утверждения $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ и $\bar{\bar{\mathcal{W}}} = \bar{\bar{\mathcal{V}}}$. Понятно, что если $\bar{\bar{B}} \in \bar{\bar{\mathcal{W}}}$ и C — любая (абстрактная) подалгебра алгебры $\bar{\bar{B}}$, то C с антидискретной топологией принадлежит классу $\mathcal{W}$, так как B с антидискр. топ. принадлежит многообразию $\mathcal{V}$, а оно замкнуто относит. перехода к подалгебрам. Аналогично, класс $\mathcal{W}$ замкнут относительно произведений. Наконец, если $\bar{\bar{B}} \in \bar{\bar{\mathcal{W}}}$ и $h: \bar{\bar{B}} \xrightarrow{\text{на}} C$ — гом-м абстрактных алгебр, то h непрерывен относит. антидискр. топологий на $\bar{\bar{B}}$ и C. Значит, $C \in \bar{\bar{\mathcal{W}}}$. ■

Считаем сигнатуру Σ фиксир. и рассматриваем только Σ-алгебры

Для многообразий топологических алгебр есть аналоги теоремы Биркгофа. Например, пусть D — направленное множество, и пусть $f: D \to T(X)$ — отображение. Положим $t_d = f(d)$ для $d \in D$. Скажем, что в топологической алгебре A выполнено <u>предельное тождество</u> $t_d \to t$ (где $t \in T(X)$), если $\forall\, \varphi: X \to A$ направленность $t_d(\varphi(x_1^d), \ldots, \varphi(x_{n_d}^d))$ сходится к $t(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$ (здесь $x_1^d, \ldots, x_{n_d}^d$ — переменные, от которых зависит терм t_d и $x_1, \ldots, x_n$ — переменные терма t).

W. Taylor

$\boxed{\text{T}}$ Класс $\mathcal{K}$ топ. алгебр является широким мн-м $\Leftrightarrow$ $\exists$ набор тождеств Γ и набор пред. тож-в Γ' такие, что $\mathcal{K}$ состоит в точности из всех алгебр, в кот. выполнены тож-ва из $\Gamma \cup \Gamma'$!

Для произвольных многообразий топ. алгебр верна аналогичная теорема, только предельные тождества надо заменить на пред. квазитождества, т.е. выражения вида

$$\bigwedge_{i\in I}(x_d^i \to x^i) \Rightarrow t_d \to t.$$

I ← любое индексное мн-во