Многообразия топологических алгебр

Топ. алгебра Опр.

Напомним, что топологическая Σ-алгебра — это Σ-алгебра с топологией, относительно которой все операции непрерывны.

Произвед. Опр.

(Топологические) Произведения топологических алгебр всегда снабжаются Тихоновской топологией (самой слабой топологией, относительно которой все проектирования на сомножители непрерывны).

Если A — топологическая алгебра и $\sim$ — конгруэнция на A, то на факторалгебре может существовать много топологий, относительно которых естественный гомоморфизм $h: A \to A/\sim$ непрерывен (в теории топологических алгебр нас почти всегда интересуют только непрерывные гомоморфизмы).

Топ. факторалгебра Опр.

Топологической факторалгеброй $A/\sim$ топологической алгебры A называется факторалгебра $A/\sim$, снабжённая самой сильной из всех топологий, относительно которых естественный гомоморфизм $h: A \to A/\sim$ непрерывен. Её можно охарактеризовать так: множество $U \subset A/\sim$ открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда его полный прообраз $h^{-1}(U)$ открыт (замкнут) в A. Сюръективные гомоморфизмы с этим свойством наз. факторными.

Такая топология наз. факторной, а соотв. гомоморф. — факторным.

Непрерывные гомоморф. не всегда факторные. Факторные всегда сюръективны.

Топ. подалгебры Опр.

(Топологические) Подалгебры топологических алгебр снабжаются индуцированной топологией.

Абстрактные алгебры

В дальнейшем алгебры без топологии и многообразия (или другие классы) таких алгебр мы будем называть абстрактными, чтобы отличать их от топологических. Если A — топологическая алгебра, то соответствующую абстрактную алгебру (т.е. ту же алгебру, но без топологии) мы будем обозначать через $\overline{A}$.

Если мы попытаемся определить многообразие топологических алгебр по аналогии с многообразием абстрактных, то возникнет множество вариантов.

Мы будем рассматривать топ. алгебры с точностью до топологических изоморфизмов (т.е. непрерывные изоморфизмы с непрерывными обратными).

Опр. многообразие (широкое, полное) топ. алгебр

Класс топологических Σ-алгебр называется многообразием топологических Σ-алгебр, если он замкнут относительно
1) (топологических) произведений
2) перехода к (топологическим) подалгебрам
3) перехода к тем образам при факторных гомоморфизмах, которые сами являются топологическими алгебрами (т.е. операции на образе при факторном гом-ме остаются непрерывными).

Заменив третье условие на условие замкнутости относительно
3') перехода к тем непрерывным гомоморфным образам (т.е. образам при непрерывных гомоморфизмах — это те же факторалгебры, но с топологией, которая может оказаться слабее факторной), которые сами являются топологическими алгебрами (операции непрерывны),

мы получим определение широкого многообразия топологических алгебр.

Наконец, если $\mathfrak{V}$ — произвольное многообразие абстрактных алгебр, то класс всех топологических алгебр A, для которых $\overline{A} \in \mathfrak{V}$, называется полным многообразием топологических алгебр.

[Возможные варианты этим не исчерпываются — можно рассматривать классы топ. алгебр, замкнутые только относительно перехода к замкнутым подалгебрам (и относительно произведений и гомоморфных или факторных образов) или требовать, чтобы все алгебры в классе были хаусдорфовыми.]

Зам. Все широкие и полные многообразия топ. алгебр являются многообразиями. Каждое полное многообразие является широким.

Обозн. $\overline{\overline{\mathfrak{V}}}$ Несущие мн-я и алгебры

Если $\mathfrak{V}$ — многообразие топ. алгебр, то через $\overline{\overline{\mathfrak{V}}}$ мы будем обозначать класс всех абстрактных алгебр вида $\overline{A}$ для $A \in \mathfrak{V}$. Будем называть $\overline{\overline{\mathfrak{V}}}$ и $\overline{A}$ несущими многообразием и алгеброй топ. мн-я $\mathfrak{V}$ и топ. алгебры A.