Пример Пусть $\widetilde{\mathbb{Q}}$ — множество рациональных чисел с топологией, предбазу которой составляют все обычные интервалы $(a,b)\cap\mathbb{Q}$, а также множество $\mathbb{Q}\setminus\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$. Эта топология сильнее обычной, поэтому $\widetilde{\mathbb{Q}}\in T_2$. Однако $\widetilde{\mathbb{Q}}$ не регулярно, так как множество $\mathbb{Q}\setminus\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$ является открытой окрестностью 0 в $\widetilde{\mathbb{Q}}$, но никакая окрестность нуля V не содержится в ней с замыканием. Действительно, V содержит окрестность вида $(-\varepsilon,\varepsilon)\setminus\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$. Пусть $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Базу окрестностей точки $\frac{1}{n}$ составляют обычные интервалы $(a,b)\cap\mathbb{Q}$, поэтому любая окрестность этой точки пересекает V (потому что если $\frac{1}{n}\in(a,b)$, то $((a,b)\cap\mathbb{Q})\setminus\{\frac{1}{k}: k\in\mathbb{N}, k\neq n\}\neq\varnothing$). Значит, $\frac{1}{n}\in\overline{V}$.

Пространство $\widetilde{\mathbb{Q}}^3$ можно представить как $\widetilde{\mathbb{Q}}^3=\Pi_1\cup\Pi_2$, причём

$$\Pi_1\supset\{(x,y,y): x,y\in\mathbb{Q}\},\quad \Pi_2\supset\{(x,x,y): x,y\in\mathbb{Q}\},$$
$$\Pi_1\cap\Pi_2\subset\{(x,y,x): x,y\in\mathbb{Q}\}$$

и множества Π_1 и Π_2 замкнуты.

[Действительно, положим $\Delta=\{(x,x,x): x\in\mathbb{Q}\}$, $X_1=\{(x,y,y): x,y\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{Q}^3$, $X_2=\{(x,x,y): x,y\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{Q}^3$. Множества X_1 и X_2 з-ы в $\mathbb{Q}^3$ и $X_1\cap X_2\subset\Delta$. Значит, $\underbrace{X_1\setminus\Delta}_{Y_1}$ и $\underbrace{X_2\setminus\Delta}_{Y_2}$ з-ы в $\mathbb{Q}^3\setminus\Delta$ и $Y_1\cap Y_2=\varnothing$. Пространство $\mathbb{Q}^3\setminus\Delta$ нормально (потому что метризуемо) и нульмерно (потому что есть база, состоящая из открыто-замкнутых множеств — это $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]\setminus\Delta$ с иррациональными a_i и b_i) и сильно нульмерно (так как есть счётная база). Значит, $\exists A\subset\mathbb{Q}^3\setminus\Delta$: A открыто-замкнуто, $Y_1\subset A$, $Y_2\subset(\mathbb{Q}^3\setminus\Delta)\setminus A$.
A и $(\mathbb{Q}^3\setminus\Delta)\setminus A$ замкнуты в $\mathbb{Q}^3\setminus\Delta$ $\Rightarrow$ в $\mathbb{Q}^3$ есть замкнутые мн-ва F_1 и F_2 т., что $F_1\cap\mathbb{Q}^3\setminus\Delta=A$, $F_2\cap\mathbb{Q}^3\setminus\Delta=(\mathbb{Q}^3\setminus\Delta)\setminus A$. Ясно, что $F_1\cap F_2\subset\Delta$. Положим $\Pi_1=F_1\cup\Delta$, $\Pi_2=F_2\cup\Delta$].

Поскольку топология пр-ва $\widetilde{\mathbb{Q}}$ сильнее топологии пр-ва $\mathbb{Q}$, те же множества Π_1 и Π_2 замкнуты и в $\widetilde{\mathbb{Q}}^3$ (и при этом выполнены те же включения). Операция $\mu:\widetilde{\mathbb{Q}}^3\to\widetilde{\mathbb{Q}}$, определённая правилом

$$\mu(x,y,z)=\begin{cases}x, & \text{если } (x,y,z)\in\Pi_1,\\ z, & \text{если } (x,y,z)\in\Pi_2,\end{cases}$$

определена корректно (так как $\Pi_1\cap\Pi_2\subset\{(x,y,x): x,y\in\mathbb{Q}\}$) и непрерывна, так как прообраз любого з-го мн-ва при μ замкнут: если $F\subset\widetilde{\mathbb{Q}}$, то

$$\mu^{-1}(F)=(F\times\widetilde{\mathbb{Q}}\times\widetilde{\mathbb{Q}})\cap\Pi_1\cup(\widetilde{\mathbb{Q}}\times\widetilde{\mathbb{Q}}\times F)\cap\Pi_2.$$

Примеры пространств, не допускающих непрерывную операцию Мальцева, можно получить, например, из следующего замечания и следующей теоремы.

Зам. Если топологическое пространство X допускает непрерывную операцию Мальцева, то оно является Н-пространством, т.е. допускает непрерывную бинарную операцию $h: X^2\to X$ с единицей (нейтральным эл-м) ($\exists\, e\in X$ т., что $h(x,e)=h(e,x)=x$ $\forall x\in X$).
Действительно, достаточно положить $h(x,y)=\mu(x,e,y)$ для любого фиксированного $e\in X$. (μ — опер. Мальцева).

Т. (Мальцев) Фундаментальная группа любого линейно связного Н-пространства X коммутативна.

□ Будем использовать обозн-е $x*y=h(x,y)$. Пусть e — единица, $a(t)$ и $b(t)$ — (замкн.) пути из e в e (петли). Тогда $c(t)=a(t)*b(t)$ — тоже путь из e в e. Покажем, что $c\sim a\cdot b\sim b\cdot a$.

Здесь $\sim$ обозначает гомотоп. экв-ть.

Расс-м функции $x, y:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, опред. правилами

$$\begin{matrix}x(t,\tau)=2t\\ y(t,\tau)=0\end{matrix},\ \text{если } 2t-\tau<0;\quad \begin{matrix}x(t,\tau)=\dfrac{\tau+2t-2t\tau}{2-t}\\ y(t,\tau)=\dfrac{2t-\tau}{2-\tau}\end{matrix},\ \text{если } 2t-\tau\geq 0.$$

Отображение $[0,1]\times[0,1]\to X$, опред. правилом $(t,\tau)\mapsto a(x(t,\tau))*b(y(t,\tau))$, непрерывно. При фиксир. τ оно даёт непр. путь из e в e (как ф-я от t). При $\tau=0$ получаем $c(t)$, при $\tau=1$ получаем $a\cdot b$. Значит, $c\sim a\cdot b$.

Рассматривая $(t,\tau)\mapsto a(y(t,\tau))*b(x(t,\tau))$, видим, что $c\sim b\cdot a$. ■

След. На пр-ве ∞ нельзя ввести непр. опер-ю Мальцева.