Связь между квазигруппами и лупами

2

Мы видели (когда рассматривали примеры), что у любой группы, левой лупы или квазигруппы имеется производная алгебра с операцией Мальцева.

Утв. У любой квазигруппы имеется производная алгебра, являющаяся лупой.

□ Пусть Q — квазигруппа. Выберем произвольный элемент $e \in Q$ и положим

$$x \circ y = (x * (e \backslash e)) / (y \backslash e)$$
$$x /\!/ y = (x * (y \backslash e)) / (e \backslash e)$$
$$x \backslash\!\backslash y = e / (y \backslash (x * (e \backslash e))).$$

Легко проверить, что Q с операциями e, $\circ$, $/\!/$ и $\backslash\!\backslash$ — лупа. ■

Утв. Пусть A — алгебра. Среди производных операций на алгебре A имеется операция Мальцева μ, удовлетворяющая дополнительному тождеству $\mu(x, y, \mu(y, x, z)) = z$, тогда и только тогда, когда у A имеется производная алгебра A, являющаяся левой лупой.

□ ($\Rightarrow$) Возьмём любой элемент $e \in A$ и положим $x * y = \mu(x, e, y)$ и $x \backslash y = \mu(e, x, y)$. Имеем
$x * (x \backslash y) = \mu(x, e, \mu(e, x, y)) = y$ (в силу дополнительного тождества),
$x \backslash (x * y) = \mu(e, x, \mu(x, e, y)) = y$,
$x * e = \mu(x, e, e) = x$.

($\Leftarrow$) Положим $\mu(x, y, z) = x * (y \backslash z)$.
Заметим, что $y \backslash y = y \backslash (y * e) = e$. Значит, $\mu(x, y, y) = x$. Тож-во $\mu(x, x, y) = y$ выполнено по определению левой лупы. Дополнительное тож-во:
$\mu(x, y, \mu(y, x, z)) = x * (y \backslash (y * (x \backslash z))) = x * (x \backslash z) = z$. ■

Аксиома отделимости T_3 в топологических левых лупах

2

[Топологическое пространство X называется пр-м <u>с выпрямляемой диагональю</u> или просто <u>выпрямляемым</u>, если существуют гомеоморфизм $\psi : X^2 \to X^2$ и точка $e \in X$ такие, что $\pi_1(\psi(x, y)) = x$ и $\psi(x, x) = (x, e)$ для всех $x \in X$ (здесь π_1 — проектирование на первую координату). При этом гомеоморфизме диагональ переходит в "горизонталь" $\{(x, e) : x \in X\}$, отсюда и название. Легко видеть, что если пространство допускает непрерывные операции левой лупы, то оно выпрямляемо: достаточно положить $\psi(x, y) = (x, x \backslash y)$. Верно и обратное: операции левой лупы на выпрямляемом пространстве можно определить как
$x \backslash y = \pi_2(x, y)$ (π_2 — проектирование на вторую координату) и $x * y = \pi_2(\psi^{-1}(x, y))$.]

$\boxed{\text{Т.}}$ Любая топологическая левая лупа L удовлетворяет аксиоме отделимости T_3.

□ По определению левой лупы $e * e = e$ и $e \backslash e = e \backslash (e * e) = e$. Операции непрерывны $\Rightarrow$ для любой окрестности U точки e найдётся окрестность V точки e со свойством $V \backslash V \subset U$ [и $V * V \subset U$.]

Заметим, что для любой точки $a \in L$ отображение $x \mapsto a * x$ (это трансляция) непрерывно и обратимо. Обратное отображение определено правилом $y \mapsto a \backslash y$. Оно тоже непрерывно. Кроме того, отображение $x \mapsto a * x$ сюръективно, поскольку $\forall b \in L$ имеем $b = a * (a \backslash b)$. Значит, это гомеоморфизм, так что $\forall x \in L$ $x * V$ — окрестность точки x.
Замыкание
Возьмём $x \in \overline{V}$. Поскольку $x * V$ — окрестность этой точки $\exists y \in x * V \cap V$. Имеем $y \in V$ и $y = x * z$ для некоторого $z \in V$, так что $x = y \backslash z$. Значит, $x \in V \backslash V \subset U$.

Итак, $\overline{V} \subset U$. Мы показали, что в любой окр-ти e содержится другая окр-ть с замыканием. Поскольку e можно перевести в любую другую точку $a \in L$ гомеоморфизмом $x \mapsto a * x$, этим же свойством обладают и все остальные точки. ■