Топологические свойства

Утв. Пусть A — топологическая алгебра с мальцевским термом (или топологическое пространство с непрерывной операцией Мальцева) и $A \in T_0$ (как топологическое пространство). Тогда $A \in T_2$.

□ Пусть μ — мальцевский терм для A, и пусть $a, b \in A$, $a \neq b$. $A \in T_0 \Rightarrow \exists$ открытое мн-во $U \subset A$, для которого $a \in U \not\ni b$, или $\exists$ открытое мн-во $U \subset A$, для которого $a \notin U \ni b$. Для определённости предположим первое. Имеем $\mu(a, b, b) = a \in U$. Отобр-е $\mu: A^3 \to A$ непрерывно, U открыто $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists$ открытые мн-ва $V \ni a$ и $W \ni b$ такие, что $\mu(V, W, b) \subset U$. Если $c \in V \cap W$, то $\mu(c, c, b) = b \notin U$, но при этом $\mu(c, c, b) \in \mu(V, W, b) \subset U$. Противоречие. ■

Так мы условно обозначаем $\mu(V \times W \times \{b\})$ $= \{\mu(x, y, b) : x \in V, y \in W\}$

Примеры алгебр с мальцевским термом

① Группа: $\mu(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$.

② Левая лупа, т.е. алгебра L с двумя бинарными опер-ми $*$ и $\backslash$, константой e (0-арная опер) и тождествами

$(1)\ x * (x \backslash y) = y$, $(2)\ x \backslash (x * y) = y$, $(3)\ x * e = x$.

Мальц. терм: $\mu(x, y, z) = x * (y \backslash z)$.

$(1) \Rightarrow \mu(x, x, y) = y$, $(2) \Rightarrow x \backslash x = x \backslash (x * e) = e \Rightarrow \mu(x, y, y) = x * e = x$.

Квазигруппа с единицей называется лупой.

③ Квазигруппа, т.е. алгебра Q с тремя бин. опер-ми $*$, $/$ и $\backslash$ и тождествами

$(1)\ (y / x) * x = y$, $(2)\ (y * x) / x = y$, $(3)\ x * (x \backslash y) = y$, $(4)\ x \backslash (x * y) = y$.

Мальц. терм: $\mu(x, y, z) = (x / (y \backslash y)) * (y \backslash z)$

$(1) \Rightarrow \mu(x, y, y) = x$

$(2)+(3) \Rightarrow x / (x \backslash x) = (x * (x \backslash x)) / (x \backslash x) = x \Rightarrow \mu(x, x, y) = y$.

④ Пусть $X^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$, причём

$\{(x, y, z) \in X^3 : y = z\} \subset \Pi_1$ $\quad \Pi_1 \cap \Pi_2 \subset \{(x, y, z) \in A^3 : x = z\}$

$\{(x, y, z) \in X^3 : x = y\} \subset \Pi_2$

Тогда $\mu(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_1 \\ z, & \text{если } (x, y, z) \in \Pi_2 \end{cases}$

— операция Мальцева.

Производные алгебры

Опр. производной операции

Пусть Σ — сигнатура, A — Σ-алгебра. На A имеются производные операции $t^A : A^n \to A$, соответствующие термам $t(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ. Рассмотрим также операции, полученные из производных фиксацией некоторых переменных, т.е. операции вида $(x_1, \dots, x_k) \mapsto t^A(a_1, \dots, a_{i_1 - 1}, x_1, a_{i_1+1}, \dots, a_{i_k - 1}, x_k, a_{i_k+1}, \dots, a_n)$, где t — терм с n переменными и $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$ — фиксированные элементы алгебры A. Такие операции тоже будем называть производными операциями.

Опр. производной алгебры

Пусть Σ' — новая сигнатура, которая состоит из символов некоторых производных операций и некоторых основных ("некоторых" может означать, в частности, "всех" или "ни одной"). На A определены все операции из Σ'. Следовательно, на [несущем множестве алгебры] A имеется структура Σ'-алгебры, естественно порождённая структурой Σ-алгебры. Множество A с такой структурой называется производной алгеброй алгебры A.

Здесь мы трактуем A не как алгебру, а как множество (на котором определяются операции)

Опр. трансляции

Производные операции, которые получаются из термов фиксацией всех, кроме одной, переменных (т.е. унарные производные операции) называются трансляциями. Тождественное отображение $id : A \to A$, $id(x) = x$, является трансляцией (оно порождается термом x). Трансляция τ обратима, если существует трансляция τ', для которой $\tau' \circ \tau = \tau \circ \tau' = id$. [Все трансляции образуют полугруппу с единицей id, а обратимые — группу].

Зам. Если на A имеется топология, относит. которой все основные операции непрерывны, то относит. этой топологии и все производные операции непрерывны. Другими словами, если A — топологическая алгебра, то любая производная алгебра тоже является топологической.