Операция Мальцева. Теорема Мальцева о многообразиях с перестановочными конгруэнциями. Аксиомы отделимости в топологических алгебрах с операцией Мальцева (и в некоторых других). Коммутативность фундаментальной группы линейно связной топологической алгебры, имеющей бинарную операцию с нейтральным элементом | 2

Замечание об отношениях экв-ти на X и конгр-х на $F_{\mathcal{V}}(X)$.

Пусть $\mathcal{V}$ — (нетривиальное) многообразие Σ-алгебр и $X \neq \varnothing$ — множество и $\sim_X$ — отношение экв-ти на X. Положим $Y = X/\sim_X$ и рассмотрим естественное отображение (факторизации) $f\colon X \to Y$. Поскольку $Y \subset F_{\mathcal{V}}(Y)$, это отобр-е можно трактовать как от-е $X \to F_{\mathcal{V}}(Y)$. Оно продолжается до гом-ма $\hat{f}\colon F_{\mathcal{V}}(X) \to F_{\mathcal{V}}(Y)$. Отношение $\ker \hat{f}$ — конгруэнция на $F_{\mathcal{V}}(X)$, причём для $x, y \in X$ $(x,y) \in \ker \hat{f} \Leftrightarrow x \sim_X y$, потому что $\hat{f}$ — продолжение f, а значит, $\hat{f}(x) = \hat{f}(y) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$.

Таким образом, любое отношение эквивалентности на X продолжается до конгруэнции на $F_{\mathcal{V}}(X)$. Алгебра $F_{\mathcal{V}}(Y)$ свободная $\Rightarrow$ $\ker \hat{f}$ — наименьшая конгруэнция на $F_{\mathcal{V}}(X)$, продолжающая отношение $\sim_X$.

Опр. композиции отношений

Пусть X — мн-во, $R_1, R_2 \subset X \times X$ — отношения на X. <u>Композицией</u> (<u>произведением</u>) $R_1 \circ R_2$ отношений R_1 и R_2 называется отношение

$$R_1 \circ R_2 = \{(x,y) \in X \times X : \exists z \in X\ ((x,z) \in R_1 \wedge (z,y) \in R_2)\}.$$

В частности, если $\sim_1$ и $\sim_2$ — отн-я эквив-ти на X, то $x \sim_1 \circ \sim_2 y \Leftrightarrow \exists z \in X\colon x \sim_1 z \sim_2 y$.

Упр. Пусть $\sim_1$ и $\sim_2$ — отн-я экв-ти на X. Композиция $\sim_1 \circ \sim_2$ является отношением эквив-ти $\Leftrightarrow$ $\sim_1 \circ \sim_2 = \sim_2 \circ \sim_1$.

опр. перест. отн. Отношения R_1 и R_2 наз-ся <u>перестановочными</u>, если $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Опр. Многообразие Σ-алгебр называется <u>перестановочным</u> или <u>конгруэнц-перестановочным</u>, если любые две конгруэнции на любой алгебре из этого многообразия перестановочны.

Действительно, пусть $\sim$ — конгруэнция на $F_{\mathcal{V}}(X)$, $\sim \cap (X \times X) = \sim_X$. Положим $A = F_{\mathcal{V}}(X)/\sim$. Пусть h — гомоморфизм $F_{\mathcal{V}}(X) \to A$, $\ker h = \sim$. Тогда $h|X = f\colon X \to X/\sim_X = Y$. Значит, $Y \subset A$. Пусть $i\colon Y \to A$ — вложение, $\hat{i}\colon F_{\mathcal{V}}(Y) \to A$ — продолжающий его гом-м. Тогда гом-м $\hat{i} \circ \hat{f}$ продолжает отображение $i \circ f$. Гом-м h тоже его продолжает. Такой гом-м $F_{\mathcal{V}}(X) \to A$ определён однозначно $\Rightarrow \ker h = \sim = \ker(\hat{i} \circ \hat{f})$. Ясно, что $\ker(\hat{i} \circ \hat{f}) \supset \ker \hat{f}$.

Операция Мальцева (мальцевский терм). Теорема Мальцева о перестановочности конгруэнций | 2

<u>Операция Мальцева (мальцевский терм)</u>

Опр. операции Мальцева

Операция $\mu\colon X^3 \to X$ на множестве X называется <u>операцией Мальцева</u>, если $\forall x, y \in X$ $\mu(x,y,y) = \mu(y,y,x) = x$.

Опр. мальц. терма (Это не общепринятое определение (общепринятое более общее))

Пусть A — Σ-алгебра. Терм $\mu(x,y,z)$ (в сигнатуре Σ) ~~наз-ся~~ будем называть <u>мальцевским термом</u> для A, если $\forall a, b \in A$ $\mu(a,b,b) = \mu(b,b,a) = a$.
Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие Σ-алгебр. Терм $\mu(x,y,z)$ (в сигнатуре Σ) будем называть <u>мальцевским термом</u> в $\mathcal{V}$, если в $\mathcal{V}$ выполнены тождества $\mu(x,y,y) = x$ и $\mu(y,y,x) = x$.

$\boxed{\text{Т. Мальцева}}$ (Нетривиальное) Многообразие $\mathcal{V}$ перестановочно $\Leftrightarrow$ в $\mathcal{V}$ существует мальцевский терм.

□ ($\Rightarrow$) Рассмотрим множество $X = \{a, b, c\}$ $(a \neq b \neq c \neq a)$ и свободную алгебру $F_{\mathcal{V}}(X)$. Пусть

$\sim_1^X = \{(a,b), (b,a), (a,a), (b,b), (c,c)\}$ (это отн-е экв-ти на X, которое склеивает a и b)

$\sim_2^X = \{(b,c), (c,b), (a,a), (b,b), (c,c)\}$ (это отн. экв, кот. склеивает b и c).

Отношения экв-ти $\sim_1^X$ и $\sim_2^X$ порождают на $F_{\mathcal{V}}(X)$ конгруэнции $\sim_1$ и $\sim_2$, причём $a \sim_1 \circ \sim_2 c$.
По предпол-ю $\sim_1 \circ \sim_2 = \sim_2 \circ \sim_1$. Значит, $\exists x \in F_{\mathcal{V}}(X)$: $a \sim_2 x \sim_1 c$. Элемент x является образом нек-го терма $\underset{\mu(a,b,c)}{\mu} \in T(X)$ при гомоморфизме $h\colon T(X) \to F_{\mathcal{V}}(X)$.
Поскольку $\sim_1$ и $\sim_2$ — конгруэнции, имеем

$a \sim_2 \mu(a,b,c) \sim_2 \mu(a,c,c)$ и $\mu(a,a,c) \sim_1 \mu(a,b,c) \sim_1 c$.

Пусть $A \in \mathcal{V}$, $a_1, a_2 \in A$ и $f\colon X \to A$ определено равенствами $f(a) = f(b) = a_1$, $f(c) = a_2$. Тогда $\sim_1 \subset \ker \hat{f}$ (так как $\sim_1^X \subset \ker f$)
$\Rightarrow \mu(a_1, a_1, a_2) = a_2$ в A. $\Rightarrow$ тож-во $\mu(y,y,x) = x$ выполнено во всех алгебрах $A \in \mathcal{V}$. Аналогично доказ-ся выполнение тож-ва $\mu(x,y,y) = x$.

($\Leftarrow$) Пусть $A \in \mathcal{V}$, μ — мальцевский терм и $\sim_1, \sim_2$ — конгруэнции на A. Пусть $a, b, c \in A$, $a \sim_1 b$ и $b \sim_2 c$. Тогда $\mu(a,b,c) \sim_1 \mu(a,a,c) = c$ и $\mu(a,b,c) \sim_2 \mu(a,c,c) = a$. Значит, $a \sim_2 \mu(a,b,c) \sim_1 c$. ▨