Пример: $T(X)$ — свободная алгебра над X в многообразии всех Σ-алгебр. (без тождеств).

Существ-е св. ал.

Т. Для любого нетривиального многообразия $\mathcal{V}$ Σ-алгебр и любого непустого множества X свободная алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ существует. (и определена однозначно).

□ $F_{\mathcal{V}}(X) = T(X)/\sim$ из док-ва теоремы Биркгофа. Эта алгебра обладает универсальным свойством (см. определение свободной алгебры): Пусть $A \in \mathcal{V}$ и $f: X \to A$ — отображение. Положим $Y = f(X)$ и рассмотрим биекцию ψ между Y и подмножеством Z: $\psi(Y) \subset Z$. Подалгебра A', порождённая множеством Y в A, изоморфна некоторой алгебре A'', содержащейся в Z как множество. Пусть ψ'' — соответствующий изоморфизм, $\psi'': A' \to A''$. Положим $f'' = \psi'' \circ f: X \to A''$. Гомоморфизм $\hat{f}'': T(X) \to A''$ — это $\hat{f}_{\iota_0}: T(X) \to A_{\iota_0}$ для некоторого $\iota_0 \in I$. Ясно, что $\hat{f}_{\iota_0} = \pi_{\iota_0} \circ \Delta_{\iota \in I} f_\iota$, где $\pi_{\iota_0}: \prod_{\iota \in I} A_\iota \to A_{\iota_0}$ — каноническая проекция. Это гомоморфизм. Значит, $\psi''^{-1} \circ \hat{f}_{\iota_0} = \psi''^{-1} \circ \hat{f}''$ — тоже гомоморфизм, и $(\psi''^{-1} \circ \hat{f}'')|X = f$. ■

см. док-во т. Биркгофа

$F_{\mathcal{V}}(X)$ порождена мн-м X

След. Любая алгебра $A \in \mathcal{V}$ является гомоморфным образом (изоморфна фактор-алгебре) алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ для некоторого множества X.

□ Возьмём любое бесконечное X, $|X| \geq |A|$. Любая сюръекция $f: X \xrightarrow{\text{на}} A$ продолжается до гомоморфизма, очевидно, сюръективного. ■

Зам. Если алгебра $A \in \mathcal{V}$ порождается множеством Y, то $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ продолжается до сюръективного гомоморфизма $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \to A$.

В дальнейшем шляпкой будем обозначать продолжение отображений на свободные алгебры

Опр. Скажем, что многообразие $\mathcal{V}$ тривиально, если все алгебры в $\mathcal{V}$ одноэлементны.

тривиального мн-я

Зам. Многообразие $\mathcal{V}$ нетривиально $\iff$ среди определяющих его тождеств нет тождеств вида $x = y$.

В дальнейшем будем рассматривать только нетривиальные многообразия.

Утв. В любом нетривиальном многообразии $\mathcal{V}$ для любого (непустого) множества X имеем $X \subset T(X)/\sim$.

можно считать

из т. Биркгофа

□ Для гом-ма $h: T(X) \to T(X)/\ker h$ (см. док-во т. Биркгофа) имеем $(t,s) \in \ker h \iff$ тождество $t = s$ выполнено во всех алгебрах из $\mathcal{V}$. Для $x, y \in X$, $x \neq y$, тождество $x = y$ не выполнено $\Rightarrow (x,y) \notin \ker h \Rightarrow h(x) \neq h(y) \Rightarrow h|X$ — инъекция (будем считать тождественная). ■

Зам. Алгебра $T(X)/\sim$ порождена множеством X, так как $T(X)$ им порождена. (при условии, что $\mathcal{V}$ нетривиально)

Зам. Если многообразие нетривиально, то оно содержит алгебры произвольно большой мощности. Действительно, если A содержит хотя бы две разные точки и принадлежит многообразию, то для любого кардинала κ $|A^\kappa| \geq 2^\kappa > \kappa$ и A^κ принадлежит многообразию.