Многообразие. Опр. Непустой класс Σ-алгебр, замкнутый относительно декартовых произведений и перехода к подалгебрам и гомом-м образам называется <u>многообразием</u> Σ-алгебр.

Зам. Если многообразие содержит хотя бы одну неодноточечную алгебру, то оно не является множеством (мощности декартовых произведений неограничены), даже с точн. до изом-ия.

Зам. Из определения видно, что если многообр-е содержит какую-то алгебру, то оно содержит и все алгебры, ей изоморфные.

Теорема Биркгофа

Т. Биркгофа. Класс $\mathcal{K}$ Σ-алгебр является многообразием $\iff$ его можно аксиоматизировать тождествами.

$\Rightarrow$ □ Пусть X — бесконечное множество. Рассмотрим семейство $\mathcal{A}_X$ всех Σ-алгебр, порождённых множествами Y, $|Y| \le |X|$, и всех отображений $f: X \xrightarrow{на}$ порожд. мн-ву. Они продолжаются до (сюръект.) гомом-в $\hat f: T(X) \xrightarrow{на} A$. Нас интересуют алгебры с точн. до изом-мов, поэтому можно считать, что $A \in \mathcal{A}_X$ содержатся (как мн-ва) в одном и том же множестве Z, так что все такие гом-мы $\hat f$ составляют множество. Заиндексируем его: $\{\hat f_\iota : T(X) \to A_\iota : \iota \in I\}$.

и только они

Допускается: $A_{\iota'} = A_{\iota''}$ для $\iota' \ne \iota''$ (но $\hat f_{\iota'} \ne \hat f_{\iota''}$)

Положим $\sim\; = \bigcap_{\iota \in I} \ker \hat f_\iota$. Это конгруэнция. Заметим, что $(t,s) \in \sim \iff$ во всех алгебрах $A \in \mathcal{A}_X$ выполнено тождество $t = s$. Более того, $(t,s) \in \sim \iff t = s$ во всех алгебрах из $\mathcal{K}$: импликация $\Leftarrow$ очевидна, а $\Rightarrow$ вытекает из того, что если $t(a_1,\dots,a_n) \ne s(a_1,\dots,a_n)$ для некоторых $a_1,\dots,a_n \in A$, $A \in \mathcal{K}$, то мы возьмём (различные) $x_1,\dots,x_n \in X$ и любое отображение $f: X \to A$, при котором $f(x_i) = a_i$; понятно, что $(t,s) \notin \ker \hat f$.
(Ясно, как свести дело к случаю, когда $f(X) \subset X \subset A$ и A порождена мн-м $f(X)$.)

Действительно: Пусть Z — любое мн-во, $|Z| \ge |\Sigma_0| \cdot |X|$. Ясно, что $|A| \le |T(X)| \le |Z|$. Пусть $\psi: A \to Z$ — инъекция, $B = \psi(A)$. Положим $\sigma(\psi(a_1),\dots,\psi(a_n)) = \psi(\sigma(a_1,\dots,a_n))$. Тем самым мы превратили B в Σ-алгебру и ψ — в изоморфизм.

Положим $h = \Delta_{\iota \in I} \hat f_\iota : T(X) \to \prod_{\iota \in I} A_\iota$. Это гомоморфизм и $\ker h = \bigcap \ker \hat f_\iota = \sim$. Значит, $T(X)/\!\sim\; \in \mathcal{K}$ (это подалгебра алгебры $\prod A_\iota$ по теореме об изоморфизме).

Пусть $\mathcal{K}'$ — класс всех Σ-алгебр, в кот. выполнены тождества, выполненные во всех алгебрах из $\mathcal{K}$. Тогда $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$. Для $\mathcal{K}'$ и бесконечного множества X проделаем ту же процедуру, что и выше — рассмотрим отображения $f: X \to A \in \mathcal{K}'$ (с точн. до изом-мов), продолжим их до гомоморфизмов $\hat f$ и положим $\sim' = \bigcap \ker \hat f$. Понятно, что $\sim' = \sim$. Значит, $T(X)/\!\sim' \in \mathcal{K}$. Но любая алгебра $A \in \mathcal{K}'$ является образом $\hat f(X)$ для достаточно большого X (с $|X| \ge |A|$). Значит, $A \in \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, откуда $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$.

■ Импликация $\Leftarrow$ очевидна.

[Следствие (опять): класс конечномерных вект. п-в не задаётся тождествами]

Свободные алгебры

Своб. алг. Опр. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие Σ-алгебр, и пусть X — непустое множество. Алгебра $A \in \mathcal{V}$ называется <u>свободной алгеброй</u> над X в многообразии $\mathcal{V}$, если
- A порождена мн-м X;
- (универсальное св-во) $\forall f: X \to B \in \mathcal{V}$ $\exists$ гом-м $\hat f: A \to B$, $\hat f|_X = f$.

Обозн. $F_{\mathcal{V}}(X)$

Более общее определение: (A, i) — своб. алг. над X, если $i: X \to A$ — вложение, A порождена мн-м $i(X)$ и $\forall f: X \to B \in \mathcal{V}$ $\exists$ гом-м $\hat f: A \to B$, $f = \hat f \circ i$.

Зам. Понятно, что эти определения дают изоморфные алгебры. Пусть (A_1, i_1) и (A_2, i_2) — две св. алгебры. Тогда $i_1 = \hat i_1 \circ i_2$ и $i_2 = \hat i_2 \circ i_1$, где $\hat i_2: A_2 \to A_1$ — гом. Алгебра A_1 порожд. мн-вом $i_1(X)$ $\Rightarrow$ $\forall a \in A_1$ $\exists t \in T(X)$: $a = t(i_1(x_1),\dots,i_1(x_n))$. Имеем $\hat i_2(a) = t(\hat i_2(i_1(x_1)),\dots,\hat i_2(i_1(x_n))) = t(i_2(x_1),\dots,i_2(x_n))$ и $\hat i_1(\hat i_2(a)) = t(\hat i_1(i_2(x_1)),\dots,\hat i_1(i_2(x_n))) = t(i_1(x_1),\dots,i_1(x_n)) = a$, так что $\hat i_1$ и $\hat i_2$ взаимно обратны. ■

Зам. Ясно также, что если гом-м $\hat f$ существует, то он единствен.