Гомоморфизмы, конгруэнции, факторалгебры

Зам. Композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.

Универс. св-во ① Пример: любое отображение $f: X \to A$ мн-ва X в Σ-алг. A порождает гомоморфизм $\hat{f}: T(X) \to A$, определённый естественным правилом $\hat{f}(t(x_1,\dots,x_n)) = t^A(f(x_1)\dots f(x_n))$

изом-м Опр. Гомоморфизм, являющийся биекцией, наз. изоморфизмом

Обозн $\cong$ В универсальной алгебре алгебры рассматриваются с точностью до изоморфизмов.

Опр. ядро Ядро гомоморфизма $h: A \to B$ определяется так:

$$\ker h = \{(x,y) \in A \times A : h(x) = h(y)\}.$$

Утв. Это отношение экв-ти на A. Оно согласовано со всеми операциями: если $\sigma \in \Sigma_n$, $x_1,\dots,x_n \in A$

□ $y_1,\dots,y_n \in A$ и $h(x_i) = h(y_i)$ $\forall i \leq n$, то

$h(\sigma(x_1,\dots,x_n)) = \sigma(h(x_1),\dots,h(x_n)) = \sigma(h(y_1),\dots,h(y_n)) =$

■ $= h(\sigma(y_1,\dots,y_n))$. Другими словами, если обозначить это отношение экв-ти через $\sim$, то будем иметь

$x_1 \sim y_1, \dots, x_n \sim y_n \Rightarrow \sigma(x_1,\dots,x_n) \sim \sigma(y_1,\dots,y_n)$

Конгруэнция Опр. Отношения экв-ти с этим св-вом называются конгруэнциями. Зам. Пересечение конг-й — конгр-я

Мы только что показали, что ядро любого гомоморфизма — конгруэнция. Верно и обратное:

Утв. Любая конгруэнция является ядром нек. гом-ма.

□ Пусть $\sim$ — конгруэнция на A. Для $\sigma \in \Sigma_n$ положим $\sigma([x_1]_\sim,\dots,[x_n]_\sim) = [\sigma(x_1,\dots,x_n)]_\sim$.

Это определение корректно, так как $\sim$ — конгруэнц.

Определили структуру Σ-алгебры на $A/\sim$.

■ Ясно, что естественное отображение $A \to A/\sim$ — гомом-м.

$\boxed{T}$ Для любого гомоморфизма $h: A \xrightarrow{\text{на}} B$ $B \cong A/\ker h$.

об изом-ме

Опр Факторалг. Для любой Σ-алгебры A и любой конгруэнции $\sim$ на A факторпространство $A/\sim$ с определённой выше структурой Σ-алгебры наз. факторалгеброй алгебры A. (по конгруэнции $\sim$).

Зам. Ядро любого гомоморфизма $A \to B$ — подалгебра алгебры $A \times A$ с покоординатными операциями.

Многообразия, тождества

Зам. Пусть A — алгебра, порождённая множеством X. Тогда A является факторалгеброй алгебры $T(X)$ — это следует из теоремы об изом-ме и примера ①. Вообще, для любого $f: Y \xrightarrow{\text{на}} X$ гомоморфизм $\hat{f}: T(Y) \to A$ (см. пример ①) сюръективен, так что $A \cong T(Y)/\ker \hat{f}$.

Многообразия

Интересно рассматривать классы Σ алгебр, на которые наложены условия-аксиомы (как в классах групп и т.п.) Самый простой вариант — аксиоматизация тождествами. Например, класс групп описывается такими тождествами:

- $\forall x \forall y \forall z\, ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
- $\forall x\, (x \cdot 1 = x)$
- $\forall x\, (1 \cdot x = x)$
- $\forall x\, (x \cdot x^{-1} = 1)$
- $\forall x\, (x^{-1} \cdot x = 1)$.

тож-ва Опр. Тождество сигнатуры Σ — это формула вида

$\forall x_1 \dots \forall x_n\, (t = s)$, ← не из фиксир. мн-ва!

Будем писать просто $t = s$.

где $x_1,\dots,x_n$ — символы пер-х, а t и s — термы с переменными, содержащимися среди $x_1,\dots,x_n$.

Понятно, как понимать высказывание "данное тождество выполнено в данной алгебре A":

$\forall a_1 \dots \forall a_n \in A\, (t^A(a_1 \dots a_n) = s^A(a_1 \dots a_n))$ [от некоторых a_i t^A и s^A могут не зависеть].

Зафиксируем любой набор тождеств и будем рассматривать класс $\mathcal{K}$ всех Σ-алгебр, в кот. выполнены все эти тождества.

Классами такого сорта являются классы всех групп, полей, вект. пр-в над данным полем и т.п.

Оказывается, этого достаточно. Понятно, что такой класс должен быть замкнут относительно перехода к подалгебрам, гомоморфным образам и произвольным декартовым произведениям (с покоординатными операциями).

Следовательно, класс всех конечномерных векторных пространств над данным полем не задаётся тождествами.