Универсальные алгебры

Универсальные алгебры

Опр. Пусть A — множество, $A \neq \emptyset$. Для $n \in \omega$ отображение $A^n \to A$ называется *n-арной операцией* на A. В частности, $\{\emptyset\} \to A$ (фиксированный эл-т A) — нульарная операция. *Универсальная алгебра*, или просто *алгебра*, — это непустое мн-во A вместе с произвольным множеством операций.

Формализуем:

Опр. Пусть Σ — множество (символов операций) вместе с функцией $\nu: \Sigma \to \omega$, которая приписывает каждому символу $\sigma \in \Sigma$ его *арность* $\nu(\sigma)$. Для каждого $n \in \omega$ положим $\Sigma_n = \{\sigma \in \Sigma : \nu(\sigma) = n\}$. Тогда $\Sigma = \bigcup \Sigma_n$. Пара (Σ, ν) называется *сигнатурой* или *типом* [универсальных алгебр]. *Структура Σ-алгебры* на (непустом) множестве A — это семейство отображений $\Sigma_n \to A^{A^n}$, $n \geq 0$, которые сопоставляют (интерпретируют) каждому символу $\sigma \in \Sigma$ операцию $\sigma^A : A^{\nu(\sigma)} \to A$. Операции σ^A называются *основными*. Множество A с такой структурой называется *Σ-алгеброй* или (универсальной) *алгеброй сигнатуры* (или *типа*) Σ.

В дальнейшем мы обычно будем опускать верхний индекс A и интерпретировать σ как символ операции или как саму операцию в зависимости от контекста.

Примеры: группа, полугруппа, магма (группоид), вект. п-о.

Топ. алгебры

Опр. Σ-алгебра A, снабжённая топологией, относительно которой все (основные) операции непрерывны, называется *топологической Σ-алгеброй*.

Примеры: топ. группы ($T_0 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} + T_1$, группы Ли)
H-пространства (алгебра с нейтр. эл-м; фунд. группа коммутативна)
топ. вект. пр-ва

Термы

Термы и производные операции

Помимо основных операций на Σ-алгебре возникают производные, которые индуцируются термами или полиномами — композициями основных символов операций.

Пусть X — множество (символов переменных). Считаем сигнатуру Σ фиксированной.

Опр. (по рекурсии).
- Символы из Σ_0 — термы (полиномы) степени 0 (над X). У них нет переменных.
- Символы из X — термы (полиномы) степени 1 над X. Множество переменных терма $x \in X$ — это $\{x\}$.
- Если $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы степеней k_i, то $\sigma(t_1, \dots, t_n)$ — терм степени $\max k_i + 1$ над X. Множество его переменных — это объединение множеств переменных термов $t_1, \dots, t_n$.

Запись $t(x_1, \dots, x_n)$ означает, что t — терм с переменными $x_1, \dots, x_n$.

Мы будем обозначать множество всех термов степени k над X через $T_k(X)$, а множество всех вообще термов над X — через $T(X)$, так что $T(X) = \bigcup T_k(X)$.

Абс. своб. а.

Опр. Легко видеть, что множество $T(X)$ является Σ-алгеброй (по определению термов). Эта Σ-алгебра называется *абсолютно свободной Σ-алгеброй* или *алгеброй слов над X*.

Опр. Производн. опер.

Для любой Σ-алгебры A термы $t \in T(X)$ (ступени ≥ 1) порождают *производные операции* t^A на A, определяемые естественным образом по рекурсии для $t \in T(X)$ (если $t = \sigma(t_1, \dots, t_n)$, то $t^A = \sigma^A \circ (t_1^A \times \dots \times t_n^A)$).

Подалгебры, гомоморфизмы и т.п.

Подалгеб.

Опр. Подмножество $B \subset A$ Σ-алгебры A называется *подалгеброй*, если оно замкнуто относительно всех операций, т.е. $\forall n \in \omega\ \forall \sigma \in \Sigma_n\ \sigma(B^n) \subset B$.

Зам. $T(X)$ порождена мн-м X.

Опр. Алгебра A *порождена* множеством $X \subset A$, если в A нет собственных подалгебр, содержащих X.

Гомоморф.

Опр. Отображение $f: A \to B$ Σ-алгебр *согласовано* с операцией $\sigma \in \Sigma_n$, если $f(\sigma^A(x_1, \dots, x_n)) = \sigma^B(f(x_1), \dots, f(x_n))$ $\forall x_1, \dots, x_n \in A$. Отображение, согласованное со всеми операциями, называется *гомоморфизмом*.

Зам. Образ любого гомоморфизма $h: A \to B$ — подалгебра алгебры B, порождённая множеством $h(A)$.