ЖЁСТКОСТЬ В КОГОМОЛОГИЯХ МОМЕНТ-УГОЛ И КВАЗИТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ ТРЁХМЕРНЫХ МНОГОГРАННИКОВ.

ЕРОХОВЕЦ НИКОЛАЙ ЮРЬЕВИЧ

С каждым простым n-мерным многогранником P с m гипергранями $\{F_1, \dots, F_m\}$ в торической топологии (см. [1]) связывается $(m+n)$-мерное *момент-угол многообразие* $\mathcal{Z}_P$ с действием m-мерного тора T^m. Если в T^m имеется свободно действующая подгруппа $H \simeq T^{m-n}$, то факторпространство $M(P,H) = \mathcal{Z}_P/H$ является $2n$-мерным многообразием с действием n-мерного тора и называется *квазиторическим многообразием.* Оба многообразия определяются комбинаторикой многогранника P, что даёт возможность исследовать комбинаторику многогранников при помощи алгебраической топологии многообразий и наоборот. Не всякий многогранник имеет хотя бы одно квазиторическое многообразие. Из теоремы о четырёх красках следует, что любой трёхмерный многогранник имеет.

Свойство многогранника, набор элементов в кольце когомологий, или комбинаторный многогранник называются *B-жесткими* (*C-жёсткими*) в некотором классе многогранников, если они сохраняются при изоморфизмах градуированных колец момент-угол (квазиторических) многообразий для многогранников из этого класса. Известно, что из B-жёсткости многогранника следует его C-жёсткость.

Простой многогранник называется *флаговым*, если из того, что его набор гиперграней попарно пересекается следует, что он пересекается в совокупности. *k-поясом* для $k > 3$ называется циклическая последовательность различных гиперграней многогранника, в которой пересекаются только последовательные гиперграни.

Утверждение 1. Трёхмерный простой многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда $H^{m-2}(\mathcal{Z}_P) \subset (\widetilde{H}^*(\mathcal{Z}_P))^2$.

Утверждение 2. Трёхмерный простой многогранник не содержит 4-поясов тогда и только тогда, когда умножение $H^3(\mathcal{Z}_P) \otimes H^*3(\mathcal{Z}_P) \to H^6(\mathcal{Z}_P)$ тривиально.

Из утверждений 1 и 2, которые доказываются на основе методов работы [2], следует B-жёсткость свойств флаговости и отсутствия 4-поясов, которая впервые была доказана в [2]. В работе [3] доказана B-жёсткость любого флагового трёхмерного многогранника без 4-поясов.

Известно (см. [1]), что: $H^*(M(P,H)) = \mathbb{Z}[v_1, ..., v_m]/(I_P + J_{P,H})$, где $\deg v_i = 2$, $I_P = (v_{i_1} \dots v_{i_k} \colon F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing)$, а идеал $J_{P,H}$ порождается n линейными соотношениями.

Приведём формулировку основного результата.

Теорема. Набор элементов $\{\pm v_1, \pm v_2, \dots, \pm v_m\}$ является C-жёстким в классе простых флаговых трёхмерных многогранников без 4-поясов. Более того, он отображается биективно на соотвествующий набор при любом изоморфизме градуированных колец когомологий квазиторических многообразий.

Как следствие этого результата можно получить C-жёсткость некоторых характеристических классов квазиторических многообразий.

Доклад основан на совместной работе с В. М. Бухштабером, Т. Е. Пановым и М. Масудой.

Работа частично поддержана грантом победителям конкурса «Молодая математика России» и грантами РФФИ-14-01-00537-а и 16-51-55017-Китай-а.

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, “Toric Topology,” AMS Math. Surveys and monogrpaphs. vol. 204, 2015. 518 pp.
[2] F. Fan, J. Ma, X. Wang, “B-Rigidity of flag 2-spheres without 4-belt arXiv:1511.03624.
[3] F. Fan, X. Wang, “Cohomology rings of moment-angle complexes arXiv:1508.00159.

МГУ имени М.В.Ломоносова
E-mail address: erochovetsn@hotmail.com